Table des matières

COURS VI
SCHÉMAS DE PICARD ET SCHÉMAS JACOBIEN

VI.1. Schémas de Picard

Cette section nous sert à introduire la méthode de Grothendieck pour traiter le problème de la représentabilité de la jacobienne d'une courbe. Cette méthode vient après de nombreux travaux visant à prouver l'existence cette variété algébrique. Elle est révolutionnaire par l'introduction du point de vue fonctoriel et la formulation en termes de représentabilité. On décrit cette méthode dans la section qui suit et on rappelle ensuite comment Grothendieck l'applique traiter les jacobiennes, et plus en fait.

VI.1.a. Foncteurs représentables. — On rappelle dans ce paragraphe quelques notions fondamentales de théorie des catégories.

Définition VI.1.1. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie.

Un préfaisceau F sur $\mathscr{C}$ est un foncteur

$$F : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{E}ns$$

où $\mathscr{E}ns$ désigne la catégorie des ensembles.

Un morphisme de préfaisceau est une transformation naturelle de foncteurs. On note $\hat{\mathscr{C}}$ la catégorie des préfaisceaux.

Remarque VI.1.2. — La théorie des catégorie n'a pas de modèle logique indiscutable dans les mathématiques contemporaines. Essentiellement, on a le choix entre deux modèles : l'un est fondé sur la théorie des classes de Bernays-Gödel et l'autre sur la théorie des univers de Bourbaki-Grothendieck-Verdier (cf [**SGA4**, I]).

Suivant le modèle choisi, il faut être un peu soigneux pour définir la catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre, comme ici dans le cas particulier des préfaisceaux.

L'expérience montre, comme il doit être de tout bon fondement logique d'une théorie, que ces précautions sont anodynes dans la pratique et peuvent toujours être prises de manière satisfaisante. On a donc choisi d'ignorer ces problèmes logiques dans ce cours. (1)

1. Le problème de fondement logique de la théorie des catégories ne semble pas idéalement résolu à l'heure actuelle : une théorie idéale serait constituée de fondements logiques qui permettent de parler de catégories de foncteurs entre deux catégorie, catégories localisés d'une catégorie, ..., sans avoir à se contorsionner à chaque fois.

Exemple VI.1.3. — Si X est un object de $\mathscr{C}$, l'association $\delta_X : Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$ défini un préfaisceau sur $\mathscr{C}$.

Si on dispose d'un morphisme $f : X \to X'$, on en déduit naturellement une transformation naturelle de foncteurs :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X'), g \mapsto f \circ g.$$

On a donc défini un foncteur, dit de Yoneda :

$$\delta : \mathscr{C} \to \hat{C}.$$

Le plus célèbre des résultats de la théorie des catégories :

***Lemme VI.1.4* (Yoneda).** — *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Le foncteur*

$$\delta : \mathscr{C} \to \hat{C}$$

défini dans l'exemple précédent est pleinement fidèle.

(preuve en exercice)

Définition VI.1.5. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie.

On dit qu'un préfaisceau F sur $\mathscr{C}$ est représentable s'il existe un object X de $\mathscr{C}$ est un isomorphisme de préfaisceaux $F \simeq \delta_X$.

Autrement dit, F est représentable s'il appartient à l'image essentielle du foncteur de Yoneda δ. Il résulte formellement du lemme de Yoneda que si F est représentable par un objet X, l'objet X muni de son isomorphisme $F \simeq \delta_X$ est unique à un unique isomorphisme près. (2)

Si F est représentable, on peut donc parler de *l'objet X représentant le foncteur F* sans ambiguïté – l'isomorphisme $\delta_X \simeq F$ étant sous-entendu.

VI.1.6. — Dans ce cours, on appliquera ces considérations à la catégorie des S-schémas noethériens $\mathscr{S}ch_S$ où S est un schéma de base supposé noethérien. (3)

Rappelons qu'un *S-schéma* est un morphisme de schémas $p : X \to S$; S est alors appelé la *base* du schéma relatif X et p son *morphisme structural*. Un morphisme $f : Y \to X$ de S-schémas, parfois appelé *S-morphisme*, est la donnée d'un morphisme de schémas f rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

où p et q sont les morphismes structuraux.

Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas. Rappelons les définitions suivantes :

- f est *plat* si pour tout pour point $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(B)$ de y dans Y et un voisinage ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de $f(y)$ dans X tel que $V \subset f^{-1}(U)$ et le morphisme d'anneaux correspondant $A \to B$ est plat.
- f est *fidèlement plat* si f est plat et surjectif sur les ensembles sous-jacents.

Rappelons le théorème fondamental suivant dit *de descente fidèlement plate* – voir [**Gro95a**].

***Théorème VI.1.7* (Grothendieck).** — *Soit F un préfaisceau sur la catégorie $\mathscr{S}ch_S$.*

Alors, pour que F soit représentable, il faut que les conditions suivantes soit vérifiées :

2. Si X' est un autre objet représentant F, on en déduit un isomorphisme $\delta_X \simeq F \simeq \delta_{X'}$ qui correspond à un uique isomorphisme d'après la pleine fidélité du foncteur δ.

3. On peut relâcher cette hypothèse de finitude.

1. *(Prod) Pour tout famille finie* $(X_i)_{i\in I}$ *de* S*-schémas, le morphisme canonique :*

$$F\big(\sqcup_i X_i\big) \xrightarrow{(\nu_i^*)_{i\in I}} \prod_{i\in I} F(X_i)$$

est un isomorphisme où $\nu_i : X_i \to \sum_i X_i$ *est l'inclusion canonique.*

2. *(Ex) Pour tout* S*-morphisme* $f : Y \to X$ *fidèlement plat de type fini, le diagramme suivant est exact à gauche :*

$$F(X) \xrightarrow{f^*} F(Y) \underset{p_2^*}{\overset{p_1^*}{\rightrightarrows}} F(Y \times_X Y)$$

où $p_1, p_2 : Y \times_X Y \to Y$ *sont les projections respectives sur les premiers et deuxième facteurs du produit fibré :* f^* *est injectif, et son image coïncide avec l'égalisateur de* p_1^* *et* p_1^* *:*

$$\mathrm{coIm}(p_1^*, p_2^*) = \{y \in F(Y) \mid p_1^*(y) = p_2^*(y)\}.$$

Démonstration. — Il s'agit de vérifier qu'un préfaisceau représentable $F = \delta_W$ satisfait les deux conditions du théorème.

Le fait que δ_W transforme sommes finie de schémas en produits est évident compte tenu de la propriété universelle des sommes de schémas.

Pour la condition *(Ex)*, on se ramène au lemme suivant :

Lemme VI.1.8. — *Soit* B/A *une extension d'anneaux fidèlement plate.*

Pour tout entier $n \geq 0$*, on note* $T^n(B/A)$ *la puissance tensorielle* n*-ème de la* A*-algèbre* B*. On considère le morphisme :*

$$d^n : T^n(B/A) \to T^{n+1}(B/A), (b_1 \otimes \ldots b_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i.(b_1 \otimes \ldots \otimes \underset{i\grave{e}me\ place}{1} \otimes \ldots \otimes b_n).$$

Pour $n < 0$*, on pose* $T^n(B/A) = 0$*,* $d^n = 0$*. Alors, le complexe* $(T^\bullet(B/A), d^\bullet)$ *de* A*-modules est exact.*

Du fait que B/A est fidèlement plat, pour vérifier que $T^\bullet(B/A)$ est exact, il suffit de vérifier que $T^\bullet(B/A) \otimes_A B$ est exact. On peut donc remplacer A par B et B par $B \otimes_A B$: cela permet de se ramener au cas où $A \to B$ admet une section $s : B \to A$. A l'aide de cette section, on construit facilement un contraction du complexe $T^\bullet(B/A)$. □

Remarque VI.1.9. —

1. Les deux conditions sur F de ce théorème se traduisent dans le langage des faisceaux : elles signifient que F est un faisceau pour une *topologie*[4] sur la catégorie $\mathscr{S}ch_S$; il s'agit de la topologie dont les recouvrements correspondent aux morphismes fidèlement plats $f : Y \to X$.

   On peut ainsi comparer la condition *(Ex)* ci-dessus avec la condition (II.1) du paragraphe II.1.1.[5]

2. L'acronyme *fpqc* signifie fidèlement plat quasi-compact. La condition de quasi-compacité est ici impliquée du fait que l'on considère des schémas noethériens. Sans cette hypothèse, il faudrait considérer dans la condition *(Ex)* des morphismes f fidèlement plats et quasi-compacts.

---

4. ou encore : *topologie de Grothendieck*.
5. Compte tenu de la condition *(Prod)*, ces deux conditions coïncident pour un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ d'un S-schéma X en posant $Y = \sqcup_{i\in I} U_i$ et en regardant le morphisme fidèlement plat $p : Y \to X$ obtenu en regardant la somme des immersions ouvertes évidentes.

3. Le théorème précédent est un théorème de *descente* des S-morphismes : dans le cas où F est représentable par un S-schéma noethérien X', il signifie que se donner un morphisme $a : X \to X'$ est la même chose que se donner un morphisme $a : Y \to X'$ pour un recouvrement fidèlement plat $f : Y \to X$ satisfaisant la *condition de descente* :

$$a \circ p_1 = a \circ p_2.$$

   Traduisant cet énoncé dans le cas où f est une somme couvrante d'ouverts de X, et tenant compte de la propriété *(Prod)*, on retrouve l'énoncé classique.

Pour la proposition qui suit, un préfaisceau F satisfaisant les conditions *(Prod)* et *(Ex)* du théorème précédent sera appelé un faisceau fpqc sur S. L'énoncé quit suit est une généralisation des considérations rappelées dans le paragraphe II.1.5 :

Proposition VI.1.10. — *Soit F un préfaisceau sur $\mathscr{S}ch_S$.*
Alors, il existe un couple $(a(F), \eta)$ satisfaisant les conditions suivantes :
– *$a(F)$ est un faisceau fpqc sur S,*
– *$\eta : F \to a(F)$ est une transformation naturelle de préfaisceaux sur $\mathscr{S}ch_S$,*
– *pour toute transformation naturelle $F \xrightarrow{\phi} G$ tel que G est un faisceau fpqc sur S, il existe un unique morphisme $\tilde{\phi}$ de préfaisceaux sur $\mathscr{S}ch_S$ s'inscrivant dans le diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\eta"'] & & G. \\ & a(F) \arrow[ur, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

On appelle $a(F)$ le faisceau fpqc associé à F. Notons que si F a une structure de préfaisceau abélien, il en est de même du faisceau associé.

VI.1.b. Foncteurs et schémas de Picard. —

VI.1.11. — On fixe un schéma de base S (noethérien).

On considère le préfaisceau suivant sur $\mathscr{S}ch_S$:

$$\underline{\mathrm{Pic}}_X : (T/S) \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T),$$

qui est fonctoriel en X d'après l'existence d'image inverse des $\mathcal{O}_X$-modules inversibles.

Compte tenu du théorème VI.1.7, ce préfaisceau n'est certainement pas représentable en général. [(6)] Pour remédier à cela, on introduit suivant Grothendieck une légère modification de ce préfaisceau sur $\mathscr{S}ch_S$:

$$\underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S} : (T/S) \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T)/\,\mathrm{Pic}(T),$$

appelé le *faisceau de Picard relatif* de X/S.

Définition VI.1.12. — Avec les notations qui précèdent, on défini le faisceau de Picard d'un S-schéma X comme le faisceau fpqc (Proposition VI.1.10) associé au préfaisceau $\underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S}$. On le note $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$.

Remarque VI.1.13. — Par définition, on dispose donc d'un morphisme canonique :

$$\eta : \underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}\,.$$

Si l'on suppose que pour tout S-schéma T, $Y = X \times_S T$, $f : Y \to T$ le morphisme structural de Y/T, le morphisme canonique associé à f

$$\mathcal{O}_T \to f_*(\mathcal{O}_Y)$$

6. D'après le théorème *loc. cit.*, ce devrait au moins être un faisceau pour la topologie de Zariski. Or, si $X = \mathbb{P}^1_S$, le faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ est trivial si on le restreint à un ouvert affine sans être trivial globalement sur X.

est un isomorphisme, alors le morphisme η est un monomorphisme de préfaisceaux. Si on suppose de plus que le morphisme structural de X/S admet une section, alors, η est un isomorphisme (voir [**Kle05**, Th. 2.5]).

Définition VI.1.14. — Si le fonteur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est représentable, on appelle *schéma de Picard* associé au schéma X/S le schéma qui le représente. On le note $\mathrm{Pic}_{X/S}$.

VI.1.15. — Rappelons qu'un *schéma en groupes* sur S est un S-schéma G muni de S-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} e : S \to G, & m : G \times_S G \to G, & i : G \to G, \\ \text{neutre,} & \text{addition,} & \text{opposé,} \end{array}$$

satisfaisant les propriétés habituelles d'un groupe.

D'après le lemme de Yoneda (VI.1.4), il revient au même de demander que le faisceau δ_G représenté par G est un faisceau de groupes.

On dit de plus que G/S est commutatif (ou abélien) si δ_G est un faisceau de groupes abéliens.

Du fait que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ n'est pas seulement un faisceau d'ensembles mais un faisceau de groupes abéliens, on en déduit donc que le schéma de Picard, s'il existe, admet une structure canonique de schéma en groupes commutatif.

Rappelons que pour un morphisme de schémas $f : X \to S$ et un point $s \in S$, de corps résiduel $\kappa(s)$, le schéma $X_s := X \times_S \mathrm{Spec}(\kappa(s))$ Le théorème principal de la théorie ([**Gro95b**, Th. 3.1], [**Kle05**, Th. 4.8].) est le suivant :

***Théorème VI.1.16* (Grothendieck)**. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas noethériens tel que f est projectif, plat et pour tout $s \in S$, $X_s = X \times_S \mathrm{Spec}(\kappa(s))$ est géométriquement intègre sur $\kappa(s)$.*

Alors, le schéma de Picard de X/S existe. Il est de plus séparé et localement de type fini sur S. (7)

Dansle cas où S est le spectre d'un corps k, on a un théorème moins restrictif (cf [**Kle05**, Cor. 4.18.3]) :

***Théorème VI.1.17* (Grothendieck)**. — *Soit X un k-schéma propre.*

Alors, le schéma de Picard $\mathrm{Pic}_{X/k}$ de X/k existe. Il est de plus réunion disjointe de k-schémas quasi-projectifs. (8)

VI.1.18. — Cette théorie donne la réponse la plus générale possible du problème de l'existence de la jacobienne d'une courbe.

Sous les hypothèses du théorème précédent, on note $\mathrm{Pic}^0_{X/k}$ la composante connexe de l'élément neutre dans le schéma en groupes $\mathrm{Pic}_{X/k}$.

Comme annoncé, le théorème suivant dépasse le problème original d'existence de la jacobienne d'une courbe (cf [**Gro95b**, Th. 2.1 et Cor. 3.2]) :

Théorème VI.1.19. — *Soit X un k-schéma propre et lisse.*

Alors, le k-schéma en groupes $\mathrm{Pic}^0_{X/k}$ est propre. De plus, le sous-schéma réduit qui lui est associé est un schéma en groupes propre et lisse sur k.

Définition VI.1.20. — Sous les hypothèses du théorème précédent, le schéma en groupes propre et lisse $(\mathrm{Pic}^0_{X/k})_{red}$ est appelé le *schéma d'Albanese* associé à X/k. On le note $\mathrm{Alb}(X)$.

---

7. $f : X \to S$ est localement de type fini si pour tout point $x \in X$, il existe $V = \mathrm{Spec}(B)$ (resp. $U = \mathrm{Spec}(A)$) voisinage ouvert affine de x dans X (resp. $f(x)$ dans S) tel que $f(V) \subset U$ et B est une A-algèbre de type fini via f.

8. *i.e.* de sous-schémas de $\mathbb{P}^n_k$ pour n convenable.

Dans le cas où X/k est de dimension 1, le schéma d'Albanese ainsi défini n'est pas autre chose que la jacobienne de X/k – cf paragraphe suivant.

Remarque VI.1.21. — En dimension quelconque, il existe toujours une flèche $\alpha : X \to \mathrm{Alb}(X)$. On peut montrer que le couple $(\mathrm{Alb}(X), \alpha)$ vérifie une propriété universelle : $\mathrm{Alb}(X)$ est le schéma en groupes propre et lisse (*i.e.* abélien !) universelle dans lequel s'envoie X.

VI.2. Schémas jacobiens

VI.2.a. Foncteur des points. —

VI.2.1. — On fixe k un corps de base. Soit C une courbe propre, lisse et géométriquement intègre sur k. On suppose que C admet un point rationnel sur k.

Suivant la voie tracée par la théorie du schéma de Picard, on ramène le problème à un problème de représentabilité d'un préfaisceau.

Dans le cas des courbes, on va en fait considérer un sous-foncteur du foncteur de Picard de C/k qui correspondra directement à la "composante connexe de l'élément neutre" (cf Paragraphe VI.1.18).

Soit T un k-schéma. Le schéma $C_T := C \times_k T$ est une courbe sur T. Pour tout point $t \in T$, on note C_t la fibre de $C \times_k T/T$ au point t. Notons que $C_t = C \times_k \mathrm{Spec}(\kappa(t))$, le $\kappa(t)$-schéma obtenu par extension des scalaires le long de $\kappa(t)/k$. Notons que $C_t = C \otimes_k \kappa(t)$ est une courbe propre et lisse. On obtient donc un morphisme degré :

$$\deg_t : \mathrm{Pic}(C_t) \to \mathbb{Z}.$$

A tout fibré inversible $\mathcal{L}$ sur C_T, et à tout point t de T, on associe un entier

$$\deg_t(\mathcal{L}) = \deg_t(\nu_t^*(\mathcal{L})).$$

On peut donc considérer le sous-groupe suivant de $\mathrm{Pic}(C_T)$:

$$\mathrm{Pic}^0(C_T/T) = \big\{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(C_T) \mid \forall t \in T, \deg_t(\mathcal{L}) = 0\big\}.$$

Notons que pour tout $\mathcal{L}_0 \in \mathrm{Pic}(T)$, le faisceau inversible $p^*(\mathcal{L}_0)$ sur C_T est de degré 0 en tout point de T. On en déduit un morphisme canonique :

$$p^* : \mathrm{Pic}(T) \to \mathrm{Pic}^0(C_T/T), \mathcal{L} \mapsto p^*(\mathcal{L}).$$

Avec ces notations, on définit donc un préfaisceau sur $\mathscr{S}ch_k$:

$$\underline{\mathrm{Pic}}^0_{C/k} : \mathscr{S}ch_k^{op} \to \mathscr{E}ns, (T/k) \mapsto \mathrm{Pic}^0(C_T/T)/\mathrm{Pic}(T) := \mathrm{coKer}(p^*),$$

qui est comme annoncé un sous-préfaisceau de $\underline{\mathrm{Pic}}'_{C/k}$ (qui est isomorphe au préfaisceau $\underline{\mathrm{Pic}}_{C/k}$ compte tenu de la remarque VI.1.13).

Définition VI.2.2. — Considérons les notations qui précèdent.

Si le préfaisceau $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{C/k}$ est représentable, on appelle *schéma jacobien* associé à C le k-schéma qui le représente.

S'il existe, on note $J(C)$ ce schéma, ou simplement J si C est claire.

D'après cette définition, si k est algébriquement clos, on obtient :

$$J(k) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(k), J) \simeq \mathrm{Pic}^0(C/k)/\mathrm{Pic}(k) = \mathrm{Pic}^0(C).$$

Comme annoncé, les points fermés de J coïncident avec le groupe des diviseurs de degré 0.

VI.2.3. — Supposons, avec les notations qui précèdent, que le schéma jacobien J de C/k est bien défini.

Pour tout k-schéma T, il existe une bijection naturelle en T :

$$\varphi_T : \mathrm{Hom}_k(T, J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^0(C_T/T)/\,\mathrm{Pic}(T).$$

On peut la décrire comme suit. L'identité de J donne un élément canonique $\mathcal{L}$ dans $\mathrm{Pic}^0(C_J/J)$ et donc un fibré inversible $\mathcal{L}$ sur $C \times_k J$ dont la restriction à tout point J est de degré 0 qui est bien défini modulo l'image de $p^* : \mathrm{Pic}(J) \to \mathrm{Pic}(C \times_k J)$.

On l'appelle le *fibré de Poincaré* associé à C. Alors, par définition, l'isomorphisme φ peut s'écrire :

$$\mathrm{Hom}_k(T, J) \to \mathrm{Pic}^0(C_T/T)/\,\mathrm{Pic}(T), f \mapsto f^*(\mathcal{L}).$$

Notons que l'on peut déjà lire sur le foncteur $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ les propriétés du schéma qui le représente – même sans avoir prouvé cette représentabilité.

Proposition VI.2.4. — *Considérons les hypothèses de la définition précédente. Si le faisceau jacobien de C/k est représentable par un k-schéma J, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *J admet une structure de k-schéma en groupes abéliens,*
2. *J est propre sur k.*

Démonstration. — La structure de schéma en groupes est triviale du fait que $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est un préfaisceau abélien.

La propreté de J/k vient du critère valuatif de propreté : soit R un anneau de valuation contenant k, de corps des fractions K et de corps résiduel κ. On note considère les immersion évidentes :

$$X_K \xrightarrow{j} X_R \xleftarrow{i} X_\kappa$$

D'après (IV.3), on obtient une suite exacte de groueps abéliens

$$CH^0(X_\kappa) \xrightarrow{i_*} CH^1(X_R) \xrightarrow{j^*} CH^1(X_K) \to 0.$$

Or, compte tenu du fait que X_κ est un diviseur principal de X_R, le morphisme i_* a son image nulle modulo équivalence rationnelle. Appliquant enfin l'isomorphisme du théorème IV.5.9, on en déduit que le morphisme

$$j^* : \mathrm{Pic}(X_R) \to \mathrm{Pic}(X_K)$$

est un isomorphisme, ce qui permet de conclure. □

VI.2.5. — On continue à explorer les conséquences de l'existence de $J = J(C)$. Soit g le genre de C.

Considérons un point rationnel $x \in C(k)$. On définit sur $C \times_k C$ un diviseur algébrique :

$$D_x = \Delta - C \times_k \{x\} - \{x\} \times_k C.$$

D'où un fibré inversible $\mathcal{L}(D_x)$ sur $C \times_k C$ dont on vérifie qu'il est partout de degré 0 relativement à l'une des projections (au choix) sur C. D'où un élément $\mathcal{L}(D)$ de $\Gamma(C, \underline{\mathrm{Pic}}^0_{C/k})$ qui à son tour correspond à un morphisme :

$$f_x : C \to J.$$

Du fait que J est un k-schéma en groupes, on en déduit un morphisme :

$$\sigma : C^g \xrightarrow{f_x^g} J^g \to J$$

où la dernière flèche est le morphisme de multiplication itéré $(g-1)$-fois.

Notons que l'on peut calculer les section de ce morphisme sur les points rationnels. On obtient d'après par définition :

$$\sigma_k : C(k)^g \mapsto J(k) = \mathrm{Pic}^0(C), (x_1, ..., x_g) \mapsto \mathcal{L}(x_1 + \ldots + x_g - g.x).$$

Proposition VI.2.6. — *Le morphisme σ est surjectif et génériquement fini.*

On en déduit que J est nécessairement un schéma irréductible de dimension g.

Démonstration. — Pour vérifier cela, il suffit de voir que pour tout corps E/k, le morphisme $\sigma(E) : C(E)^g \to J(E)$ induit sur les E-points est surjectif à fibres finies.

Par changement de base, on peut supposer $E = k$.

Montrons la surjectivité de σ_k. Soit $\mathcal{L}$ un élément de $\mathrm{Pic}^0(C)$. Alors $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}(g.x)$ correspond à un diviseur D de degré g. D'après le théorème de Riemann-Roch, il est rationnellement équivalent à un diviseur effectif $D_0 = x_1 + \ldots + x_g$. D'où $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D_0) \otimes \mathcal{L}(-g.x)$ ce qui démontre le résultat.

D'après ce qui précède, pour tout diviseur algébrique D de degré 0,

$$\sigma_k^{-1}(\mathcal{L}(D)) = |D + g.x|.$$

Autrement dit, les fibres de σ_k correspondent aux systèmes linéaires complets de diviseurs, dont chaque membre D est de degré d. Or, pour un tel diviseur, d'après le théorème de Riemann-Roch,

$$l(D) = 1 + l(K_C - D)$$

où K_C est le diviseur canonique de C/k.

Or par définition, $l(K_C) = g$ – d'après la relation (III.5). Soit Z le support du diviseur K_C. Alors, si $D \cap Z = \emptyset$, $l(K_C - D) = 0$. Donc $l(D) = 1$ ce qui implique que $|D|$ est fini : les fibres de σ_k sont finies au-dessus de l'ouvert $C^g - Z^g$. □

Remarque VI.2.7. — Le groupe des permutations Σ_g de l'ensemble à g éléments agit sur C^g par permutation des facteurs. Du fait que J est abélien, le morphisme σ est constant sur les orbites de cette action.

Du fait que C^g est projectif, on peut voir que le schéma quotient C^g/Σ_g est bien défini.

On en déduit donc une flèche canonique :

$$\bar{\sigma} : C^g/\Sigma_g \to J$$

où le membre de gauche désigne le préfaisceau quotient de δ_{C^g} suivant l'action de Σ_g.

La méthode de Chow pour démontrer l'existence du schéma jacobien revient à constater que $\bar{\sigma}$ est nécessairement un isomorphisme. On se ramène à la représentabilité du préfaisceau quotient C^g/Σ_g qui est facile (et valable pour tout quotient d'un schéma projectif par un groupe fini).

VI.2.b. Cas des courbes de genre 1. —

Théorème VI.2.8. — *Soit C une courbes algébrique propre, lisse géométriquement intègre sur k de genre 1. On suppose que C admet un point rationnel e.*

Alors, le schéma C représente le foncteur jacobien $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{C/k}$ de C/k. De plus, la structure k-schéma en groupes induite sur C a pour élément neutre le point e.

Remarque VI.2.9. — On verra qu'on peut reformuler cette proposition en disant qu'il existe toujours sur C une *unique* structure de k-schéma en groupes dont l'élément neutre est le point e.

Démonstration. — Cette preuve est directement tirée de [**Har77**, Th. IV.4.11].

On va définir sur $C \times_k C$ un fibré inversible $\mathcal{L}$ qui jouera le rôle du fibré de Poincaré. Soit $\delta : C \to C \times_k C$ l'immersion diagonale de C/k, et Δ son image dans $C \times_k C$. On pose

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}(\Delta - e \times_k C).$$

Ceci définit un élément de $\mathrm{Pic}^0(C \times_k C/C)$, et donc une section de $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{C/k}$ sur C et d'après le lemme de Yoneda un morphisme de préfaisceaux :

$$\epsilon : \delta_C \to \underline{\mathrm{Pic}}^0_{C/k}\,.$$

On montre que ϵ est un isomorphisme. Autrement dit, pour tout k-schéma T et tout élément $\mathcal{M} \in \Gamma(T, \underline{\mathrm{Pic}}^0_{C/k})$, il existe un unique morphisme $f : T \to C$ tel que $(1_C \times_k f)^*(\mathcal{L}) = \mathcal{M}$.

Par définition, un tel élément $\mathcal{M}$ correspond à un fibré inversible sur $C \times_k T$ de degré 0 relativement à T, déterminé uniquement modulo l'image de $p^* : \mathrm{Pic}(T) \to \mathrm{Pic}(C \times_k T)$ où p est la projection évidente.

On pose alors : $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}(e \times_k T)$. Ce fibré inversible est partout de degré 1 relativement à T. Utilisant les arguments de *loc. cit.* on obtient que le $\mathcal{O}_X$-module $p_*(\mathcal{M}')$ est localement libre de rang 1.

On peut donc remplacer $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M} \otimes p^*p_*(\mathcal{M}')$. Alors, on obtient $p_*(\mathcal{M}') = \mathcal{O}_C$: il existe donc une section globale $s \in \Gamma(C \times_k T, \mathcal{M}')$ et l'on obtient un diviseur $Z = \mathrm{div}(\mathcal{M}', s)$ de $C \times_k T$ d'après la construction du paragraphe V.2.3.

La composition $a : Z \to C \times_k T \xrightarrow{p} T$ est un isomorphisme par construction de $\mathcal{M}'$ et de Z. D'où un morphisme le morphisme f attendu comme la composée :

$$T \xrightarrow{a^{-1}} Z \to C \times_k T \to C. \tag{VI.1}$$

En effet, en tant que diviseur algébrique $Z = (1_C \times_k f)^*(\Delta)$. D'où :

$$\mathcal{M}' = (1_C \times_k f)^*(\mathcal{L}(\Delta)) \Leftrightarrow \mathcal{M} = (1_C \times_k f)^*(\mathcal{L}).$$

Ceci prouve l'existence. Réciproquement, si f vérifie l'égalité qui précède, nécessairement, $Z = (1_C \times_k f)^*(\Delta)$. On en déduit que f est égale à la composée (VI.1). □

Références

[Gro95a] Alexander Grothendieck. Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. II. Le théorème d'existence en théorie formelle des modules. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 5*, pages Exp. No. 195 (1960), 369–390. Soc. Math. France, Paris, 1995.

[Gro95b] Alexander Grothendieck. Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. V. Les schémas de Picard : théorèmes d'existence. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 7*, pages Exp. No. 232 (1962), 143–161. Soc. Math. France, Paris, 1995.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Kle05] Steven L. Kleiman. The Picard scheme. In *Fundamental algebraic geometry*, volume 123 of *Math. Surveys Monogr.*, pages 235–321. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, and J.-L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, volume 269, 270, 305 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1972–1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie 1963–64 (SGA 4).

---

premier semestre 2013

Frédéric Déglise, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* `frederic.deglise@ens-lyon.fr`
Url : `http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/`