Table des matières

COURS VIII
SCHÉMAS ABÉLIENS

Introduction

VIII.0.1. — *Les apports de la théorie des schémas.*– La théorie des schémas permet d'étendre la théorie des variétés abéliennes construite par Weil (voir Paragraphe I.2.7).

La première innovation due à la théorie de Grothendieck est de donner un sens à la notion de *famille algébrique* de variété abélienne. Cette notion s'incarne dans l'introduction – systématique dans le travail de Grothendieck – de la méthode suivante : au lieu d'étudier de travailler relativement à un corps k algébriquement clos, on travaille relativement à un schéma quelconque S, qui peut bien sûr être le spectre d'un corps, mais aussi le spectre d'un anneau de valuation discrète (qui mène à la théorie de la réduction des variétés abéliennes), un schéma non réduit (qui mène à la théorie de la déformation des variétés abéliennes).

VIII.0.2. — *Méthode et langage.*– On fixe un schéma S, dit *schéma de base.*

On appelle S-schéma X tout schéma X muni d'un morphisme $f : X \to S$, appelé *morphisme structural.* Si (P) est une propriété des morphismes de schémas, on dit que X vérifie (P) si son morphisme structural f vérifie (P). On dit encore que X/S est *algébrique* si $f : X \to S$ est de type fini.

On peut voir le S-schéma X comme une famille de schémas, la famille des fibres X_s de X/S aux points s du schéma S – cf Paragraphe VII.2.1.

Exemple VIII.0.3. — Une propriété fondamentale des S-schémas est la *platitude*. Rappelons en particulier que si X est un S-schéma plat de type fini, ses fibres varient de manière cohérente : si y est une spécialisation de x dans X (*i.e.* y appartient à l'adhérence de x dans X), $s = f(x)$, $t = f(y)$, alors :

$$\dim_y(X_t) = \dim_x(X_s)$$

où pour un point x d'un schéma X, $\dim_x(X)$ désigne la dimension de X en x. Cet entier est par définition la borne supérieure des dimensions des composantes irréductibles de X contenant x.

Si S est irréductible et η désigne son point générique, la fibre X_η est appelée la fibre générique de X/S. Si X/S est plat et X_η est équidimensionnel [(1)] de dimension n , alors on déduit de l'égalité précédente que les fibres de X/S sont toutes de dimension n : pour tout $x \in X$, $s = f(x)$, $\dim_x(X_s) = n$. On dit encore que X/S est équidimensionnel de dimension n.

1. *i.e.* toutes ses composantes irréductibles ont même dimension

VIII.1. Schémas en groupes (rappels)

VIII.1.1. — On renvoie à VI.1.15 pour la définition des schémas en groupes.

On rappelle de plus les faits suivants sur les schémas en groupes algébriques :

1. Soit k un corps, G un k-schéma en groupes de type fini et x un point de G. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) G est lisse sur k ;
   (ii) G est lisse sur k en x ;
   (iii) G est géométriquement réduit.

   Cela résulte facilement du fait que les translations sont des isomorphismes et du fait que l'ensemble des points lisses d'un k-schéma X est un ouvert, qui est de plus non vide si X est géométriquement réduit (voir aussi [**SGA3**, VIA, Cor. 1.3.1]).
2. Soit G un k-schéma en groupes de type fini.

   On appelle *composante neutre* de G la composante connexe de l'unité dans G, munie de sa structure réduite. C'est un sous-schéma en groupes de G sur k que l'on note G^0.

   Pour toute extension de corps E/k, on montre que :
   $$G^0 \times_k \mathrm{Spec}(E) = (G \times_k \mathrm{Spec}(E))^0.$$
   (voir [**SGA3**, VIA, Prop. 2.1.1]) En particulier, G^0 est géométriquement réduit, donc lisse d'après le point précédent. Étant lisse et connexe, il est intègre. On en déduit finalement que G^0 est géométriquement intègre.
3. Soit G un k-schéma en groupes de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) G est connexe ;
   (ii) G est géométriquement connexe sur k.
   (iii) G est géométriquement irréductible sur k.

   On le déduit du fait que si G est connexe, $G_{red} = G^0$.

On en déduit le résultat suivant pour les S-schémas en groupes :

Proposition VIII.1.2. — *Soit S un schéma et G un S-schéma en groupes de présentation finie.*

1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (i) *Pour tout point $s \in S$, la fibre G_s est connexe ;*
   (ii) *G est géométriquement connexe sur S ;*
   (iii) *G est géométriquement irréductible sur S.*
2. *De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (i) *G est lisse sur S ;*
   (ii) *G est plat et géométriquement réduit sur S.*

VIII.2. Schémas abéliens

Définition VIII.2.1. — Soit S un schéma.

Un S-schéma abélien A est un S-schémas en groupes propre, lisse et géométriquement intègre.

Remarque VIII.2.2. — D'après la proposition précédente, on peut faire les réductions suivantes :

– un S-schéma en groupes A de présentation finie est abélien si et seulement si il est propre, plat, géométriquement réduit à fibres connexes sur S ;

– sur un corps k, un k-schéma en groupes algébrique est abélien s'il est propre, plat, géométriquement réduit et connexe.

Un S-schéma abélien A est donc un S-schéma plat de présentation finie telle que pour tout point $s \in S$, A_s est un $\kappa(s)$-schéma abélien : « une famille plate de schémas algébriques ».

Exemple VIII.2.3. — Sur un corps k, les courbes elliptiques fournissent tous les exemples de k-schémas abéliens de dimension 1.

On note un corollaire immédiat du théorème VII.2.18 :

Corollaire VIII.2.4. — *Soit A un S-schéma abélien de morphisme structural f. Alors, $f_*(\mathcal{O}_A) = \mathcal{O}_S$.*

Rappelons qu'on en déduit en particulier que les seules fonctions globales sur k-schéma abélien A sont les constantes : $\Gamma(A, \mathcal{O}_A) = k$.

VIII.3. Applications du théorème de rigidité

VIII.3.a. Théorème de rigidité (deuxième forme). —

VIII.3.1. — Rappelons que si A est un anneau et Y un schéma, l'application suivante est bijective :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}ch}(Y, \mathrm{Spec}(A)) \to \mathrm{Hom}_{Ann}(A, \mathcal{O}_Y(Y)).$$

Autrement dit, le foncteur contravariant $\mathrm{Spec}(-)$ est adjoint à droite du foncteur $\Gamma : Y \mapsto \mathcal{O}_X(Y)$. Rappelons par ailleurs, que $\mathrm{Spec}(-)$ est pleinement fidèle : il réalise une anti-équivalence de catégories entre anneaux et schémas affines.

On peut généraliser ce résultat dans le cadre relatif : on dit qu'un S-schéma X est *affine* si pour tout ouvert affine U de S, le schéma $X \times_S U$ est affine.

Notons que si $p : X \to S$ est un morphisme, le $\mathcal{O}_S$-module $p_*(\mathcal{O}_X)$ est muni d'une structure d'algèbre :

$$p_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_S} p_*(\mathcal{O}_X) \to p_*(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X) = p_*(\mathcal{O}_X).$$

La première flèche provient formellement du fait que p_* est adjoint à droite d'un foncteur monoïdal, p^*. [2] Par définition, si X/S est affine, le $\mathcal{O}_S$-module $p_*(\mathcal{O}_X)$ est quasi-cohérent.

Si on se donne un triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\ & S & \end{tikzcd},$$

on obtient un morphisme canonique :

$$f^\sharp : p_*(\mathcal{O}_X) \to p_* f_*(\mathcal{O}_X) \simeq q_*(\mathcal{O}_Y)$$

en appliquant le foncteur p_* au morphisme $\mathcal{O}_X \to f_*(\mathcal{O}_Y)$ structuralement associé au morphisme de schémas f. On vérifie que ceci défini une structure de foncteur contravariant :

$$\underline{\Gamma}_S : \mathscr{S}ch_S \to \mathcal{O}_S\text{−alg}, (p : X \to S) \mapsto p_*(\mathcal{O}_X).$$

D'après ce qu'on vient de dire, $\underline{\Gamma}_S$ envoie un S-schéma affines sur une $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente.

2. En effet, pour tous $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, on définit une flèche canonique :

$$p_*(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_S} p_*(\mathcal{F}) \to p_*p^*\big(p_*(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_S} p_*(\mathcal{F})\big) \simeq p_*\big(p^*p_*(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_S} p^*p_*(\mathcal{F})\big) \to p_*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F})$$

la première et la dernière flèches étant obtenue grâce aux morphismes d'adjonction pour le couple (p^*, p_*).

On fera attention toutefois que ce morphisme n'est pas en général un isomorphisme : on dit que p_* est *faiblement monoïdal*.

Réciproquement, si on se donne une $\mathcal{O}_S$-algèbre $\mathcal{A}$ qui est quasi-cohérente, on peut lui associer un S-schéma en recollant les schémas affines $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}(U))$ indexés par les ouverts affines $U \subset S$. On le note $\mathrm{Spec}_S(\mathcal{A})$. On vérifie facilement qu'on a ainsi définit une foncteur contravariant :

$$(\mathcal{O}_S\!-\!\mathrm{alg}^{qcoh}) \to \mathscr{S}ch_S^{aff}, \mathcal{A} \mapsto \mathrm{Spec}_S(\mathcal{A}).$$

(voir [**EGA2**, 1.3.1]). On obtient alors le résultat suivant :

Proposition VIII.3.2. — *Le foncteur* $\mathrm{Spec}_S(-)$ *est une équivalence de catégorie avec pour quasi-inverse le foncteur* $\underline{\Gamma}_S$. *Plus généralement, pour toute* $\mathcal{O}_S$*-algèbre quasi-cohérente* $\mathcal{A}$ *et tout* S*-schéma* Y*, l'application suivante :*

$$\mathrm{Hom}_S\big(Y, \mathrm{Spec}_S(\mathcal{A})\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S-\mathrm{alg}}\big(\mathcal{A}, \underline{\Gamma}_S(Y)\big)$$

est bijective.

(voir [**EGA2**, 1.2.7]).

VIII.3.3. — Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas tel que $\mathcal{A} = f_*(\mathcal{O}_X)$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente. (3)

Avec les notations de la proposition précédente, on pose $X' = \mathrm{Spec}_S(\mathcal{A})$. On déduit alors du morphisme idendité $Id : f_*(\mathcal{O}_X) \to f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{A}$ un S-morphisme $f' : X \to X'$. On en déduit que le morphisme

$$f'^{\sharp} : \mathcal{O}_{X'} \to f'_*(\mathcal{O}_X)$$

est un isomorphisme. (4)

Ainsi, le morphisme f admet une factorisation canonique (fonctorielle en f) :

$$f : X \xrightarrow{f'} X' \to S \tag{VIII.1}$$

tel que X'/S est affine et $f'_*(\mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{O}_X$ (ce qui implique $\underline{\Gamma}_S(X') = \underline{\Gamma}_S(X)$).

Dire que X/S est affine équivaut à dire que f' est un isomorphisme.

Remarque VIII.3.4. — Les résultats du paragraphe précédent sont à la base du théorème de connexion de Zariski, reformulé par Grothendieck, qui concerne le cas où f est propre et S noethérien.

Le point clé est le *théorème de finitude pour les morphismes propres* qui montre (en particulier) que sous les hypothèses qui précèdent, la $\mathcal{O}_S$-algèbre $f_*(\mathcal{O}_X)$ est cohérente. Ainsi, la factorisation (VIII.1) s'applique à f. Mais de plus, X'/S est fini. On en déduit que f' est propre et géométriquement connexe (cf Déf. VII.2.3).

La proposition précédente permet d'obtenir le résultat suivant :

Proposition VIII.3.5. — *Soit* S *un schéma, et* X, Y *deux* S*-schémas de morphismes structuraux respectifs* p *et* q*. On suppose :*

1. X/S *est affine ;*
2. $\underline{\Gamma}_S(Y) = \mathcal{O}_S$.

Alors, l'application suivante :

$$\mathrm{Hom}_S(S, X) \to \mathrm{Hom}_S(Y, X), \eta \mapsto \eta \circ q$$

est bijective.

De plus, si Y/S *admet une section* ϵ*, alors,* $f = (f \circ \epsilon) \circ q$.

---

3. Il suffit par exemple que f soit séparé de type fini (cf [**EGA1**, 9.2.2]).
4. En effet, pour le voir, il suffit de considérer son image par g_* où g est le morphisme structural de X'/S (car g est affine). Or par définition, cette image le morphisme Id.

On peut dire que sous les hypothèses de cette proposition, tout S-morphisme de Y dans X est constant. De plus, se donner un S-morphisme de Y dans X revient à se donner une section de Y/S.

Démonstration. — Au morphisme de schémas q est associé le morphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbre :

$$q^\sharp : \mathcal{O}_S \to q_*(\mathcal{O}_Y) = \underline{\Gamma}_S(Y)$$

qui est un isomorphisme d'après l'hypothèse 2 – par définition, $q^\sharp = \underline{\Gamma}_S(q)$.

Par fonctorialité de $\underline{\Gamma}_S$, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_S(S,X) \arrow[r, "q^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_S(Y,X) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{–alg}}\big(\underline{\Gamma}_S(X),\mathcal{O}_S\big) \arrow[r, "(q^\sharp)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{–alg}}\big(\underline{\Gamma}_S(X),\underline{\Gamma}_S(Y)\big). \end{tikzcd}$$

On peut donc conclure du fait que la proposition VIII.3.2 et l'hypothèse 1 entraînent que les flèches verticales sont des isomorphismes.

Pour la deuxième assertion, notons qu'on peut de plus compléter le diagramme commutatif précédent comme suit :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_S(S,Y) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_S(S,X) \arrow[r, "q^*"] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{Hom}_S(Y,X) \arrow[d, "\sim"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{–alg}}\big(\underline{\Gamma}_S(Y),\mathcal{O}_S\big) \arrow[r, "(f^\sharp)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{–alg}}\big(\underline{\Gamma}_S(X),\mathcal{O}_S\big) \arrow[r, "(q^\sharp)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{–alg}}\big(\underline{\Gamma}_S(X),\underline{\Gamma}_S(Y)\big). \end{tikzcd}$$

Or, d'après l'hypothèse 2, il n'y a qu'un seul morphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbres de $\underline{\Gamma}_S(Y)$ dans $\mathcal{O}_S$; c'est $(q^\sharp)^{-1}$. Ainsi, s'il existe $\epsilon \in \mathrm{Hom}_S(S,X)$, la commutativitié du diagramme montre que nécessairement :

$$f \circ \epsilon \circ q = q^* f_*(\epsilon).$$

(En effet, son image par l'isomorphisme vertical de droite est égale à : $q^\sharp \circ \big((q^\sharp)^{-1} \circ f^\sharp\big) = f^\sharp$. □

Remarque VIII.3.6. — Rappelons que l'hypothèse sur Y/S se réécrit : $q_*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_S$: en particulier, d'après le théorème VII.2.18, si Y/S est propre, plat, géométriquement intègre, elle est bien vérifiée.

Ce résultat est donc encore une généralisation de la proposition VII.1.12, qui concerne le cas : $S = \mathrm{Spec}(k)$, k un corps et $Y = \mathbb{A}^1_k$.

VIII.3.7. — Le théorème suivant est inspiré de [**MFK94**, Chap. 6, §1, Prop. 6.1] :

Théorème VIII.3.8. — *Soit S un schéma. Considérons un diagramme commutatif de schémas*

(VIII.2)
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

tel que :

(a) *S est noethérien connexe ;*

(b) *p est séparé ;*

(c) *q est propre, plat et géométriquement intègre ;*

(d) *il existe un point $s \in S$ tel que f est constant au-dessus de s :*
i.e. $f(Y_s) = \{*\}$*, ensemble à un élément.*

Alors,

1. *le S-morphisme f est constant : il existe une section η de X/S tel que $f = \eta \circ q$;*
2. *la section η est unique ;*
3. *lorsque q admet une section ϵ, $\eta = f \circ \epsilon$.*

Pour les applications aux schémas abéliens, nous n'aurons besoin que du cas où q admet une section.

Démonstration. — Notons que d'après le théorème de rigidité, la condition (c) entraine :

(c') $q_*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_S$.

<u>Unicité</u> : Nécessairement, q surjectif : d'après (b), q est ouvert (car plat) et fermé (car propre), donc $q(Y)$ est ouvert et fermé dans S ; d'après (c), $q(Y)$ est non vide. Comme S est connexe, $q(Y) = S$. Ainsi, q est un épimorphisme dans la catégorie des ensembles. De plus, la formule (c') montre que q est un épimorphisme dans la catégorie des schémas : $\eta \circ q = \eta' \circ q$ implique $\eta = \eta'$. [5]

<u>Existence</u> : Considérons le cas où X/S admet une section ϵ. On pose alors $\eta = f \circ \epsilon$; on doit montrer l'égalité suivante de morphismes de schémas :

$$f = \eta \circ q. \tag{VIII.3}$$

On considère le sous-ensemble de S défini comme suit :

$$E = \big\{ s \in S \mid f(Y_s) = \{*\} \big\}.$$

On montre le lemme suivant :

Lemme VIII.3.9. — *Pour tout $s \in S$, il existe un voisinage ouvert Ω de s dans S tel que*

$$f_\Omega = \eta_\Omega \circ q_\Omega, \tag{VIII.4}$$

égalité de morphismes de schémas, où pour un S-morphisme h, on pose $h_\Omega = h \times_S \Omega$.

En effet, soit $x \in X$ tel que $f(Y_s) = \{x\}$. Considérons un voisinage ouvert affine U de x dans X. L'ensemble $Z = Y - f^{-1}(U)$ est fermé dans Y. Comme q est fermé, $\Omega = S - q(Z)$ est ouvert dans S. De plus, on vérifie facilement :

- $s \in \Omega$;
- $p^{-1}(\Omega) \subset U$.

Si l'on pose $V = q^{-1}(\Omega)$, on obtient donc un diagramme commutatif de schémas :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "q'"'] & & U \arrow[dl, "p'"] \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

obtenu par restriction du diagramme (VIII.2) au-dessus de l'ouvert Ω, et corestriction dans l'ouvert U.

Notons que d'après la formule (c'), le morphisme $q' = q_\Omega$ satisfait la relation : $\underline{\Gamma}_\Omega(V) = \mathcal{O}_\Omega$. Par ailleurs, comme U est affine, p' est affine. On peut donc appliquer la proposition VIII.3.5 au diagramme précédent. Comme par ailleurs, d'après l'hypothèse 5, ϵ_Ω est une section de q_Ω, on en déduit donc : $f' = (f' \circ \epsilon') \circ q'$, en tant que morphisme de schémas. Comme $q^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de U, on en déduit l'égalité attendue.

---

5. Comme q est surjective, cette implication est vraie au niveau des morphismes d'ensembles sous-jacents aux morphismes de schémas. Il reste à voir que $\eta^\sharp = \eta'^\sharp$. Or l'hypothèse montre que $q^\sharp \circ \eta^\sharp = q^\sharp \circ \eta'^\sharp$. On obtient ce que l'on veut car par hypothèse, $q^\sharp$ est un monomorphisme.

Ce lemme montre que l'ensemble E est ouvert. De plus, si $f(Y_s)$ est réduit à un élément, nécessairement $f(Y_s) = \{\eta(s)\}$. Autrement dit, on en déduit les égalités de sous-ensembles de S suivantes :

$$\begin{aligned} E &= \big\{s \in S \mid f(Y_s) = \{\eta(s)\}\big\} \\ &= \big\{s \in S \mid \forall y \in Y, (q(y) = s) \Rightarrow (f(y) = \eta(s))\big\} \\ &= q\big(\{y \in Y \mid f(y) = (\eta \circ q)(y)\}\big). \end{aligned}$$

Autrement dit, si on pose $\phi = (f, \eta \circ q) : Y \to X \times_S X$ et on note $\Delta \subset X \times_S X$ la diagonale de X/S, on obtient : $E = q(\phi^{-1}(\Delta))$. D'après l'hypothèse (b), p est séparé, donc Δ est fermé dans $X \times_S X$. Il en résulte que E est fermé dans S. Mais l'hypothèse (d) implique que E est non vide : ouvert et fermé non vide d'un espace connexe, $E = S$. Le lemme précédent montre donc l'égalité (VIII.3) et permet de conclure.

Pour montrer le cas général, on va utiliser le lemme suivant :

Lemme VIII.3.10. — *Considérons les hypothèses du théorème précédent. Soit $\pi : S' \to S$ un morphisme fidèlement plat, et considérons le diagramme suivant obtenu par changement de base suivant π :*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "q'"'] & & X'. \arrow[dl, "p'"] \\ & S' & \end{tikzcd}$$

Alors, s'il existe $\eta' \in \mathrm{Hom}'_S(S', X')$ tel que $f' = \eta' \circ q'$, il existe $\eta \in\in \mathrm{Hom}'_S(S', X')$ tel que $f = \eta \circ q$.

Posons $S'' = S' \times_S S'$, et notons $p_1, p_2 : S'' \to S'$ les deux projections canoniques. Rappelons que la théorie de la descente fidèlement plate de Grothendieck, appliquée au morphisme π ([**SGA1**, VIII, 5.2]), montre que le diagramme suivant d'ensembles est exact à gauche :

$$\mathrm{Hom}_S(Y, X) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_{S'}(Y', X') \underset{p_2^*}{\overset{p_1^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{S''}(Y'', X'')$$

Autrement dit, π^* est injectif et son image coïncide avec l'égalisateur de p_1^* et p_2^*. Notons que les hypothèses de l'énoncé sont stables par changement de base. Or, l'assertion d'unicité dans l'énoncé du théorème précédent, que nous avons déjà établie, montre que si η' existe, alors $p_1^*(\eta') = p_2^*(\eta')$ puisqu'ils répondent tous deux à l'énoncé du théorème appliqué à (f'', p'', q''). Ainsi, η' induit un unique morphisme $\eta \in \mathrm{Hom}_S(S, X)$ d'après le diagramme précédent dans le cas $Y = S$. Le fait que π^* soit injectif montre que η répond à la question, ce qui démontre le lemme.

On a déjà vu au début de la preuve que l'hypothèse (c) entraine que q est surjectif, et donc fidèlement plat. On peut donc montrer l'existence de η après avoir fait un changement de base le long de q. Notons que l'on a ainsi remplacé q par $q' : Y \times_S Y \to Y$ qui admet une section : la section diagonale de Y/S. Puisque par ailleurs toutes les hypothèses sont stables par changement de base, on est donc ramené au cas où q admet une section qui a été traité en premier. $\square$

VIII.3.b. Applications aux schéma abéliens. — On va utiliser une forme plus simple du théorème précédent :

Corollaire VIII.3.11. — *Soit S un schéma non vide. On note conventionnellement p_T le morphisme structural d'un S-schéma T.*

Soient X, Y, Z des S-schémas vérifiant les conditions suivantes :

(a) *Y est noethérien connexe ;*

(b) *Z/S est séparé ;*

(c) *X/S est propre, plat et géométriquement intègre.*

Soit $f : X \times_S Y \to Z$ un S-morphisme et ϵ_X, ϵ_Y, ϵ_Z des sections respectives de X/S, Y/S, Z/S telles que :

(d) *$f \circ (Id_X, \epsilon_Y) = \epsilon_Z \circ p_X$;*

(e) *$f \circ (\epsilon_X, Id_Y) = \epsilon_Z \circ p_Y$.*

Alors, $f = \epsilon_Z \circ p_{XY}$.

Démonstration. — Pour tout S-morphisme a, on note a' les Y-morphisme obtenu par changement de base suivant $p_Y : Y \to S$. Avec cette convention, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "p'_X"'] & & Z \times_S Y \arrow[dl, "p'_Z"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

L'hypothèse (d) se réécrit $f(X \times_S \epsilon_Y(s)) = \{\epsilon_Z(s)\}$ pour un point $s \in S$. Autrement dit, on peut appliquer le théorème VIII.3.8 au diagramme précédent. Comme de plus, ϵ'_X est une section de p'_X, on obtient :

$$f' = (f' \circ \epsilon'_X) \circ p'_X.$$

La formule (e) permet alors de réécrire cette relation comme attendu. □

Corollaire VIII.3.12. — *Soit S un schéma noethérien connexe non vide, A un S-schéma abélien et G un S-schéma en groupes séparé.*

Alors, tout S-morphisme de schémas $f : A \to G$ se factorise sous la forme :

$$f = t \circ \varphi$$

où $t : G \to G$ est une translation du S-schéma en groupes G, et $\varphi : A \to G$ est un morphisme de S-schémas en groupes.

Démonstration. — Soient η_A, μ_A (resp. η_G, μ_G) la section unité et la multiplication de A/S (resp. G/S). Pour montrer le corollaire, il suffit de montrer que le morphisme de S-schémas :

$$f.(f \circ \eta_A \circ p_A)^{-1} : A \to G, x \mapsto f(x).f[\eta_A(s)], s = p_A(x)$$

est un morphisme de S-schémas en groupes.

On peut donc supposer : $f \circ \eta_A = \eta_G$ et il s'agit de montrer que f est un morphisme de S-schémas en groupes.

Autrement dit, on doit montrer l'égalité des S-morphismes suivants :

$$\alpha : A \times_S A \xrightarrow{f \times_S f} G \times_S G \xrightarrow{\mu_G} G,$$

$$\beta : A \times_S A \xrightarrow{\mu_A} A \xrightarrow{f} G.$$

Posons $F = \alpha.\beta^{-1}$. Par hypothèse sur f, on obtient les relations : $F(Id_A, \eta_A) = \eta_G \circ p_A$ et $F(\eta_A, Id_A) = \eta_G \circ p_A$.

On peut donc appliquer le corllaire précédent au morphisme F, ce qui montre $F = \eta_G \circ p_{AA}$. Autrement dit, $\alpha = \beta$ comme attendu. □

Corollaire VIII.3.13. — *Soit A un S-schéma abélien.*

Alors, toute structure de S-groupe sur A est commutative. De plus, elle est uniquement déterminée par son morphisme unité.

Pour la première assertion, on applique le corollaire précédent au morphisme inverse de A/S. Pour la deuxième, on applique le même corollaire au morphisme identité.

Références

[EGA1] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de jean dieudonné) : I. le langage des schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (4), 1960.

[EGA2] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de jean dieudonné) : II. étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8), 1961.

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric invariant theory*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1994.

[SGA1] A. Grothendieck et al. *Revêtements étales et groupe fondamental*, volume 3 of *Documents Mathématiques*. Soc. Math. France, 2003. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie 1960–61 (SGA 1). Édition recomposée et annotée du LNM 224, Springer, 1971.

[SGA3] M. Artin, J. E. Bertin, M. Demazure, P. Gabriel, A. Grothendieck, M. Raynaud, and J.-P. Serre. *(SGA3) Propriétés générales des schémas en groupes.*, volume 151 of *Lecture notes in Math.* Springer, 1970.

---

premier semestre 2013

Frédéric Déglise, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* frederic.deglise@ens-lyon.fr
Url : http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/