Table des matières

COURS IX
THÉORIES COHOMOLOGIQUES DES SCHÉMAS

IX.1. Axiomatique des cohomologies en géométrie algébrique

Dans cette section, on décrit abstraitement la plupart des propriétés des diverses cohomologies en géométrie algébrique.

IX.1.a. Structures de bases. —

IX.1.1. — *Catégories source et but.*– Une cohomologie peut être définie sur certains type de schémas. On fixe un schéma de base S et on considère $\mathscr{S}$ une sous-catégorie de la catégorie des S-schémas. Sauf mention expresse du contraire, tous les schémas et les morphismes de schémas sont supposés dans $\mathscr{S}$. On peut classer les exemples dans les catégories suivantes :

(S1) *Cas pur* : $\mathscr{S}$ est la catégorie des S-schémas projectifs (resp. propre) et lisses.

(S2) *Cas mixte* : $\mathscr{S}$ est la catégorie des S-schémas lisses.

(S3) *Cas singulier* : $\mathscr{S}$ est la catégorie de tous les S-schémas.

On peut parfois ajouter des conditions de finitude, comme être de *type fini* ou de présentation finie. On verra aussi que dans le cas mixte, il est parfois utile de se restreindre au schémas *affines lisses.*

Nous considèrerons un anneau Λ et une catégorie abélienne Λ-linéaire $\mathscr{A}$ où prendra ses valeurs la cohomologie. Les grands exemples dans ce paragraphe sont les suivants :

(B1) *Sans torsion* : $\Lambda = K$ est un corps et $\mathscr{A}$ est la catégorie des K-espaces vectoriels. Le cas le plus étudié est celui où K est de caractéristique 0. [1]

(B2) *Coefficients de torsion* : Λ est un anneau quelconque et $\mathscr{A}$ est la catégorie des Λ-modules.

(B3) *Cas enrichi* : $\mathscr{A}$ est la catégorie des K-espaces vectoriels (ou des Λ-modules) gradués et munis d'une structure additionelle : action d'un groupe [2], filtration [3].

(B4) *Cas motivique* : $\mathscr{A}$ est la catégorie des motifs (purs ou mixtes).

1. C'est le cas en particulier pour les axiomes d'une cohomologie de Weil.
2. eg : S est le spectre d'un corps k et G est groupe de Galois absolu de k
3. eg : filtration de Hodge, filtration par le poids

Définition IX.1.2. — Une cohomologie sur $\mathscr{S}$ à valeur dans $\mathscr{A}$ est un foncteur contravariant $\mathbb{Z}$-gradué $H^* : \mathscr{S} \to \mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$.

Un élément $x \in H^i(X)$ est appelé une *classe de cohomologie* de degré i. On pose encore $\deg(x) = i$.

Dans les cas (B3) ou (B4), il n'y a pas de graduation (ou en tous cas, on l'oublie) : par convention, on supposera dans cas là que pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$, $H^i = H^j$ ce qui permet d'énoncer des axiomes communs entre les cas classiques (B1)-(B2) et les cas enrichis (B3)-(B4).

Remarque IX.1.3. — Notons qu'à l'exception de la cohomologie motivique pour laquelle c'est une conjecture, les groupes de cohomologies sont généralement nuls en degrés négatifs.

IX.1.4. — *Structure produit.*– Pour la définition suivante, on suppose que $\mathscr{A}$ est monoïdale symétrique.

Définition IX.1.5. — Une structure produit μ sur une cohomologie H^* est la donnée d'une famille de morphismes :

$$\mu_X^{ij} : H^n(X) \otimes H^m(X) \to Hn + m(X)$$

naturels en X. Souvent, on pose :

$$\mu_{nm}^X(x \otimes y) = x.y\ .$$

On dit que μ est commutative [4] si

$$x.y = (-1)^{nm} y.x\ .$$

Remarque IX.1.6. — Si $\mathscr{A}$ admet des sommes infinies (ou si les groupes de cohomologies s'annulent toujours en degré suffisament grand), on peut mettre sur la catégorie $\mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$ une structure monoïdale : le produit tensoriel d'objets gradués M_* et N_* est égal en degré n à

$$\bigoplus_{i+j=n} M_i \otimes N_j.$$

Dire que H^* admet une structure produit signifie encore que H^* est à valeur dans la sous-catégorie de $\mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$ formée des *monoïdes.* [5]

IX.1.b. Axiomes de bases. —

IX.1.7. — *Dimensions, finitudes cohomologiques.*– Soit H^* une théorie cohomologique.

On considère généralement les bornes suivantes sur la cohomologie :

(Dim1) Pour tout schéma X de dimension d, $H^n(X) = 0$ si $n > 2d$.

(Dim2) Pour tout schéma affine X de dimension d, $H^n(X) = 0$ si $n > d$.

Dans le cas (B1) ou (B2), on considère aussi l'axiome de finitude suivant :

(Fin) Pour tout schéma X, $H^n(X) = 0$ est un Λ-module de type fini.

Remarque IX.1.8. —
1. L'axiome (Dim2) s'appelle parfois la *propriété de Lefschetz faible*, que nous retrouverons un peu plus loin.
2. On trouve encore la terminologie suivante : si X est un schéma dans $\mathscr{S}$ tel que $H^n(X) = 0$ si $n > \delta$ et $H^\delta(X) \neq 0$, on dit que X est de H^*-*dimension cohomologique* δ. [6]

---

4. parfois graduée commutative, ou encore anti-commutative ;
5. Dans une catégorie monoïdale, $(\mathscr{C}, \otimes, \mathbb{1})$, un monoïde X est un objet muni de morphismes $\mu : X \otimes X \to X$ et $\eta : \mathbb{1} \to X$ satisfaisant les axiomes classiques d'un monoïde exprimés en termes de diagrammes commutatives ; cf [?]
6. On remplace parfois H^*-dimension par une terminologie plus suggestive.

IX.1.9. — *Formule de Künneth*.– Soit H^* une cohomologie munie d'un produit. On suppose que $\mathscr{S}$ admet des produits fibrés au-dessus de S et contient les morphismes structuraux des S-schémas.

Pour tous S-schémas X (resp. Y), de morphisme structural p (resp. q), on obtient un morphisme appelé *produit extérieur* :

$$\nu_{nm} : H^n(X) \otimes H^m(Y) \xrightarrow{p^* \otimes q^*} H^n(X \times_S Y) \otimes H^n(X \times_S Y) \xrightarrow{\mu_{nm}} H^n(X \times_S Y).$$

(Kun) (a) Pour tous S-schémas X et Y, le morphisme ν_{nm} est un isomorphisme.

(b) $H^*(S)$ est l'objet neutre pour la structure monoïdale sur $\mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$ – soit K ou Λ concentré en degré 0 dans les cas (B1) et (B2).

Remarque IX.1.10. — 1. Cet axiome est en général seulement vérifié dans le cas où $\mathscr{A}$ est K-linéaire pour un corps K – en particulier le cas sans torsion (B1). Dans le cas de torsion, le défaut dans la formule de Künneth peut être éxprimé en termes des foncteurs Tor_i^{Λ}, foncteurs dérivés du produit tensoriel des Λ-modules.

2. On peut reformuler l'axiome (Kun) comme suit : le foncteur $H^* : \mathscr{S} \to \mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$ est *monoïdal* où la catégorie $\mathscr{S}$ est munie de la structure monoïdale donnée par $\times_S$ et $\mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$ est munie de la structure monoïdale de la remarque IX.1.6

Notons par ailleurs que si $\mathscr{S}$ contient les morphismes diagonaux des S-schémas, une cohomologie H^* telle que le foncteur correspondant $H^* : \mathscr{S} \to \mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$ est monoïdal, est munie d'une structure produit :

$$H^*(X) \otimes H^*(X) \simeq H^*(X \times_S X) \xrightarrow{\delta^*} H^*(X)$$

où δ est le morphisme diagonal de X/S.

IX.1.11. — *Cohomologies typiques*.– Les examples suivants sont des variantes de la propriété dite *d'invariance par homotopie* :

(Htp1) Soit $p : \mathbb{A}^1_X \to X$ la projection canonique. Le morphisme $p^* : H^*(X) \to H^*(\mathbb{A}^1_X)$ est un isomorphisme.

(Htp2) Soit $p : E \to X$ la projection d'un fibré vectoriel sur X. Le morphisme $p^* : H^*(X) \to H^*(E)$ est un isomorphisme.

Dans les axiomes suivants, on suppose que H^* est munie d'un produit. Si Y est un X-schéma de morphisme structural p, relativement à la catégorie $\mathscr{S}$ (*i.e.*, les schémas X, Y et le morphisme p sont dans $\mathscr{S}$) $H^*(Y)$ devient un $H^*(X)$ module comme suit :

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \to H^*(Y), (x, y) \mapsto p^*(x).y.$$

Les axiomes suivants sont des versions imprécises de la *formule du fibré projectif* :

(wProj1) Le $H^*(X)$-module $H^*(\mathbb{P}^1_X)$ est libre de rang 2.

(wProj1') Soit $p : \mathbb{P}^1_X \to X$ la projection canonique. Le conoyau du monomorphisme scindé $p^* : H^*(X) \to H^*(\mathbb{P}^1_X)$ est un $H^*(X)$-module libre de rang 1 engendré par un élément c_1 en degré 2 – *i.e.* $H^*(\mathbb{P}^1_X) = H^*(X) \oplus H^{*-2}(X).c_1$.

(wProj2) Pour tout fibré projectif P/X de rang n, le $H^*(X)$-module $H^*(P)$ est libre de rang n.

Remarque IX.1.12. — Le lien entre la propriété (Htp1) et l'invariance par homotopie est le suivant : soit s_0 et s_1 la section nulle (resp. unité) du X-schéma $\mathbb{A}^1_X$. La propriété (Htp1) entraine que : $s_0^* = (p^*)^{-1} = s_1^*$.

Soit $f, g : Y \to X$ deux morphismes dans $\mathscr{S}ch$. On dit que f et g sont fortement homotopes si il existe un morphisme $H : \mathbb{A}^1_Y \to X$ tel que $H \circ s_0 = f$ et $H \circ s_1 = g$. (7)

On déduit donc, sous (Htp1), que si f et g sont homotopes, alors $f^* = g^*$.

7. Autrement dit, on peut déformer algébriquement f en g par une famille de morphisme paramétrés par $\mathbb{A}^1$.

IX.1.13. — *Cohomologies et recouvrements.*– Contrairement aux morphismes de schémas ou aux sections d'un faisceau, les classes de cohomologie ne sont pas déterminées localement. [8]

On mesure ce défaut par des suites exactes de cohomologies associées à des situations géométriques particulières. Commençons par énoncer une propriété générique, associée à un carré cartésien de schémas dans $\mathscr{S}$:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & V \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

$P(\Delta)$: Au carré cartésien Δ est associé une famille de morphismes $\partial^n, n \in \mathbb{Z}$ s'insérant dans une suite exacte longue de la forme :

$$\cdots \to H^n(X) \xrightarrow{f^*+p^*} H^n(U) \oplus H^n(V) \xrightarrow{q^*-g^*} H^n(W) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(X) \to \cdots$$

On peut classer l'existence de telles suites exactes dans les exemples suivants :

(MV) $P(\Delta)$ est vérifiée quand f et p sont des immersion ouvertes telles que $X = U \cup V$.

(BG) $P(\Delta)$ est vérifiée quand f est une immersion ouverte, $Z = (X - U)$ vu comme sous-schéma fermé réduit de X, et p un morphisme étale telle que $p^{-1}(Z) \to Z$ soit un isomorphisme de schémas.

(cdh) $P(\Delta)$ est vérifiée quand f est une immersion fermée de complémentaire Ω, p est un morphisme propre telle que $p^{-1}(\Omega) \to \Omega$ est un isomorphisme de schémas.

Remarque IX.1.14. — Les propriétés (MV) et (BG) concernent le cas mixte, la propriété (cdh) le cas singulier.

Exercice 1. — Montrer que les axiomes (MV) et (Htp1) entrainent l'axiome (Htp2).

IX.1.c. Twists et dualité. —

IX.1.c.1. Cohomologie bigraduées. —

Définition IX.1.15. — Une cohomologie bigraduée est un foncteur contravariant :

$$H^{**} : \mathscr{S} \to \mathscr{A}^{\mathbb{Z}^2}.$$

Le premier indice est appelé le *degré* et le second indice le *twist* – faute d'une traduction.

Remarque IX.1.16. — Une cohomologie bigraduée est en particulier une cohomologie en oubliant le twist – on est alors à valeur dans $\mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$. Les axiomes précédents s'appliquent donc aussi au cas twistés.

Toutefois, dans le cas d'une cohomologie de Weil, pour tous entiers n, i, j, $H^{n,i}(X) \simeq H^{n,j}(X)$ (non canoniquement). Oublier le twist revient donc à considérer l'un des groupes $H^{n,i}(X)$ (par exemple $i = 0$!).

Exemple IX.1.17. — Un cas typique de twist est obtenu comme suit. On considère une cohomologie H^* à valeur dans la catégorie des K-espaces vectoriels vérifiant la formule (Kun) et la propriété (wProj1').

En particulier, $H^*(\mathbb{P}^1_k)$ est concentré en degré 0 et 2 et $H^2(\mathbb{P}^1_k) \simeq H^0(k) = K$.

On pose $K(-1) := H^2(\mathbb{P}^1_k)$. C'est un K-espace vectoriel de rang 1 : il est donc inversible. On note $K(1)$ son inverse. On définit alors des twists sur H^* en posant pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$H^{n,i}(X) := H^n(X) \otimes (K(1)^{\otimes_K, i}).$$

Précisons que dans ce cas, ces K-espaces vectoriels se notent plus souvent : $H^n(X)(i)$.

8. Dans le cas contraire, l'axiome (Htp1) contredirait l'axiome (wProj1) puisque $\mathbb{P}^1_k$ est réunion de deux ouverts isomorphismes $\mathbb{A}^1_k$.

IX.1.c.2. Dualité : première forme. —

IX.1.18. — *Dualité de Poincaré.*– On va énoncer plusieurs forme de la dualité dite de Poincaré en géométrie algébrique pour une cohomologie bigraduée H^{**}.

La forme classique concerne le cas (B1) sous l'hypothèse que H^{**} vérifie (Kun).

(Dua1) Pour tout S-schéma X de *dimension relative* d sur S,

(a) il existe un morphisme :

$$\mathrm{Tr}_X : H^{2d,d}(X) \to K$$

appelé *morphisme trace* tel que $\mathrm{Tr}_{X\times_S Y} = \mathrm{Tr}_X \otimes_K \mathrm{Tr}_Y$;

(b) l'accouplement :

$$\epsilon : H^{n,i}(X) \otimes_K H^{2d-n,d-i}(X) \xrightarrow{\mu} H^{2d,d}(X) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_X} K$$

est un accouplement parfait de K-espaces vectoriels. (9)

Remarque IX.1.19. — 1. Cet axiome n'est valable que dans le cas pur, (S1). Bien sûr, on peut avoir une cohomologie H^* définie sur la catégorie de tous les S-schémas telle que la restriction de H^* à la catégorie des S-schémas lisses vérifie (Dua1) – ce qui est le cas habituel.

2. Si $H^{*,*}$ est concentré en degrés positifs, et S est le spectre d'un corps, l'axiome (Dua1) pour les S-schéma propres implique l'axiome (Dim1).

IX.1.c.3. Dualité : deuxième forme. — Pour la deuxième forme, on utilise la définition abstraite suivante d'un accouplement parfait.

Définition IX.1.20. — Soit $(\mathscr{C}, \otimes, \mathbb{1})$ une catégorie monoïdale symétrique.

On dit qu'un objet M de $\mathscr{C}$ est *rigide* (ou encore *fortement dualisable*) si il existe un objet M^* de $\mathscr{C}$ et des morphismes :

$$\eta : \mathbb{1} \to M^* \otimes M, \quad \epsilon : M \otimes M^* \to \mathbb{1}$$

tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "M\otimes\eta"] \arrow[dr, "1_M"'] & M\otimes M^*\otimes M \arrow[d, "\epsilon\otimes M"] \\ & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M^* \arrow[r, "\eta\otimes M^*"] \arrow[dr, "1_{M^*}"'] & M^*\otimes M\otimes M^* \arrow[d, "M^*\otimes\epsilon"] \\ & M^*. \end{tikzcd}$$

On dit alors que M^* est un *dual* (ou encore un *dual fort*) de M.

Exemple IX.1.21. — 1. Dans la catégorie des K-espaces vectoriels, un objet E est rigide si et seulement si il est de dimension finie. Un dual de E est donné par le dual habituel $E^* = \mathrm{Hom}_K(E, K)$.

2. Si X est un schéma, dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules, un objet $\mathcal{E}$ est rigide si et seulement si il est localement libre de rang fini. Un dual de $\mathcal{E}$ est alors donné par $\mathcal{E}^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ – cf construction II.3.1.

Remarque IX.1.22. — Dire que M^* est un dual fort de M revient à dire que le foncteur $(M^* \otimes -)$ est adjoint à droite et à gauche du foncteur $M\otimes -$. Rappelons que dans une catégorie monoïdale, l'adjoint à droite du foncteur $(M \otimes -)$ est appelé le foncteur Hom interne de source M, souvent noté $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{C}}(M, -)$.

Il résulte de ces notations que si M est rigide, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{C}}(M, \mathbb{1})$ est un dual de M.

9. *i.e* le morphisme qui s'en déduit :

$$H^{n,i}(X) \to \big(H^{2d-n,d-i}(X)\big)^* := \mathrm{Hom}_K(H^{2d-n,d-i}(X), K)$$

est un isomorphisme.

IX.1.23. — *Dualité de Poincaré abstraite.*– On suppose que $\mathscr{A}$ est monoïdale et on se donne une cohomologie H^* vérifiant (Kun). On suppose que H^* est de plus twisté de la manière suivante : il existe un objet $\otimes$-inversible $\mathbb{1}(1)$ dans $\mathcal{A}$ et pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$,

$$H^{n,i}(X) = H^n(X) \otimes (\mathbb{1}(1))^{\otimes,i}.$$

Sous ces conditions, on peut énoncer la dualité comme suit :

(Dua2) Pour tout S-schéma X de dimension relative d, $H^*(X)$ est rigide dans $\mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$ et a pour dual $H^{2d-*,d}(S)$.

Remarque IX.1.24. — Sous les conditions d'énoncés communes de (Dua1) et (Dua2), on voit facilement que (Dua2) implique (Dua1).

IX.1.d. Fonctorialité exceptionnelle. —

IX.1.25. — Considérons un cohomologie bigraduée H^{**}.

On fixe $\mathcal{P}$ une propriété des morphismes de schémas dans $\mathscr{S}$ stable par composition. On appelle $\mathcal{P}$-morphismes les morphismes vérifiant $\mathcal{P}$. On suppose qu'à tout $\mathcal{P}$-morphisme d est associé un entier $d(f)$ tel que pour deux ¶-morphismes composables f et g,

$$d(gf) = d(f) + d(g).$$

Exemple IX.1.26. — L'entier $d(f)$ s'interprète comme la dimension relative de f.

Le cas le plus simple supposé est celui où $\mathcal{P}$ est la propriété d'être propre et lisse de dimension relative constante. Alors, $d(f)$ est le rang du $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\Omega_{Y/X}$.

Dans le cas mixte, un cas moins trivial est celui où $\mathcal{P}$ est la propriété d'être propre.

Définition IX.1.27. — On dit que H^{**} admet des morphismes de Gysin relativement à $\mathcal{P}$ si pour tout $\mathcal{P}$-morphisme $f : Y \to X$, on se donne un morphisme :

$$f_* : H^{n+2d(f),i+d(f)}(X) \to H^{n,i}(Y)$$

de telle façon que pour deux $\mathcal{P}$-morphismes composables f et g, on ait la relation : $g_* f_* = (gf)_*$.

Exemple IX.1.28. — (Cas pur : $\mathscr{S}$ est la catégorie des S-schémas propres et lisses). Supposons que H^{**} est une cohomologie bigraduée vérifiant la propriété (wDua). Alors tout morphisme $f : Y \to X$ dans $\mathscr{S}$ admet un morphisme de Gysin, défini par la composée suivante :

$$f_* : H^{n,i}(Y) \simeq \left(H^{2d_Y-n,d_Y-i}(Y)\right)^\vee \xrightarrow{(f^*)^\vee} \left(H^{2d_Y-n,d_Y-i}(X)\right)^\vee \simeq H^{2(d_X-d_Y)+n,(d_X-d_Y)+i}(X)$$

avec $d(f) = d_X - d_Y$.

Notons qu'avec cette définition, si p est le morphisme structural d'un S-schéma propre et lisse, de dimension relative d, la relation suivante est immédiate :

$$\mathrm{Tr}_X = p_* : H^{2d,d}(X) \to H^{0,0}(S) = K.$$

Remarque IX.1.29. — Pour les cohomologies en géométrie algébrique, la terminologie *morphisme de Gysin* dans le cas des morphismes propres est bien établie. Elle connait quelques variantes, notamment dans le cas des morphisme fini, où on parle plutôt de *transferts*.

IX.1.30. — Soit H^{**} une théorie bigraduée munie de twists. On introduit les propriétés suivantes, appelées toutes les deux *formules de projection* :

(FProj1) Pour tout carré cartésien dans $\mathscr{S}$

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

tel que p et q sont des $\mathcal{P}$-morphismes, si $d(p) = d(q)$, [10] alors $f^*p_* = q_*g^*$.

(FProj2) On suppose que H^{**} admet des produits. Pour tout $\mathcal{P}$-morphisme $f : Y \to X$, et toutes classes de cohomologie $y \in H^{**}(Y)$ et $x \in H^{**}(X)$, la relation suivante est vérifiée :

$$f_*(y.f^*(x)) = f_*(y).x\ .$$

Exemple IX.1.31. — On se place dans les conditions du paragraphe IX.1.23 et dans le cas pur (S1). On considère les morphismes de Gysin donnés dans l'exemple IX.1.28.

Soit $p : \mathbb{P}^1_X \to X$ la projection canonique et s la section de p correspondant au point à l'infini. On en déduit donc deux morphismes de Gysin :

$$s_* : H^0(X) \to H^2(\mathbb{P}^1_X)(1), p_* : H^2(\mathbb{P}^1_X)(1) \to H^0(X).$$

Alors, on peut vérifier formellement [11] que le morphisme :

$$H^*(X) \oplus H^{*-2}(X) \to H^*(\mathbb{P}^1_X), (x, y) \mapsto p^*(x) + p^*(y).s_*(1)$$

est un isomorphisme : $\big(1, s_*(1)\big)$ est une base du $H^*(X)$-module $H^*(\mathbb{P}^1_X)$ – cf propriété (Proj1).

On verra un peu plus bas que $s_*(1)$ est une classe charactéristique – du X-schéma $\mathbb{P}^1_X$ – et plus particulièrement une *classe de Chern*.

IX.1.32. — *Suite exacte longue de localisation.*– On suppose que H^{**} admet des morphismes de Gysin par rapport aux immersions fermées régulières $i : Z \to X$, et on pose $d(i) = -c(i)$ où c est la codimension de Z dans X.

(Loc) Pour toute immersion fermée $i : Z \to X$ d'immersion ouverte complémentaire $j : U \to X$, il existe une famille de morphismes ∂_i^{nr} qui s'insèrent dans la suite exacte longue de la forme suivante :

$$\cdots \to H^{n-d(i),r-d(i)}(Z) \xrightarrow{i_*} H^{n,r}(X) \xrightarrow{j^*} H^{n,r}(U) \xrightarrow{\partial_i^{nr}} H^{n+1-d(i),r-d(i)}(X) \to \cdots$$

La suite exacte précédente est appelée *suite exacte longue de localisation* associée à i.

Exemple IX.1.33. — Sous les hypothèses de l'exemple précédent, on obtient une suite exacte courte scindée :

$$0 \to H^{*-2,*-1}(X) \xrightarrow{s_*} H^{**}(\mathbb{P}^1_X) \xrightarrow{j^*} H^{**}(\mathbb{P}^1_X - s_1(X)) \to 0$$

On suppose de plus que (Htp1) est vérifiée. Or $\mathbb{P}^1_X - s_1(X)$ est égal à $\mathbb{A}^1_X$. Il résulte de la propriété (Htp1) que le morphisme :

$$j^* : H^{**}(\mathbb{P}^1_X) \to H^{**}(\mathbb{P}^1_X - s_1(X)) = H^{**}(\mathbb{A}^1_X)$$

est isomorphe au morphisme $s^* : H^{**}(\mathbb{P}^1_X) \to H^{**}(\mathbb{P}^1_X)$ ce qui donne la suite exacte courte scindée :

$$0 \to H^{*-2,*-1}(X) \xrightarrow{s_*} H^{**}(\mathbb{P}^1_X) \xrightarrow{s^*} H^{**}(X) \to 0$$

que l'on aurait pu déduire de l'exemple précédent et de la relation $s^*s_*(1) = 0$.

IX.1.34. — Sous la forme précédente, la propriété de localisation pour la cohomologie H^{**} est une structure (à cause des morphismes ∂_i^{nr} qu'on appelle *résidus*).

Toutefois, en général, les groupes de cohomologie $H^{**}(X)$ coexistent avec d'autres groupes. En particulier, si Z est un fermé de X, on dispose des groupes de cohomologie de X à support Z, notés $H^*_Z(X)$. Ces groupes sont liés à la cohomologie classique par un morphisme d'oubli du support :

$$H^{**}_Z(X) \xrightarrow{o} H^{**}(X)$$

10. On dit alors que f est transverse à p

11. Utiliser la formule de projection (FProj2), la compatibilité des morphismes de Gysin à la composition et la dualité

qui s'insère naturellement dans une suite exacte longue :

$$\cdots \to H_Z^{n,r}(X) \xrightarrow{o} H^{n,r}(X) \xrightarrow{j^*} H^{n,r}(U) \xrightarrow{\partial} H_Z^{n+1,r}(X) \to \cdots$$

La propriété (Loc) se reformule avantageusement en la *propriété de pureté* suivante :

(Pur) Pour toute immersion fermée régulière $i : Z \to X$ de codimension c, il existe un isomorphisme :

$$H_Z^{**}(X) \simeq H^{*-2c,*-c}(Z).$$

Remarque IX.1.35. — On fera attention que cette propriété de pureté ainsi que la suite de localisation ne sont pas raisonnables sans hypothèse de régularité sur X et Z. Le cas facile est celui où X et Z sont des S-schémas lisses. La cas plus difficile, dans lequel la propriété précédente est appelée *pureté absolu*, est celui où X et Z sont seulement supposés être des schémas réguliers.

IX.2. Examples

IX.2.a. Groupes de Chow. —

IX.2.1. — On se place dans le cas mixte (S1) pour $S = \mathrm{Spec}(k)$ où k est un corps.

Pour X un k-schéma lisse, on note $CH^*(X)$ le groupe abélien des cycles modulo équivalence rationnelle (cf Définition IV.3.15).

Alors, CH^* est une théorie cohomologique munie d'un produit et de morphismes de Gysin pour les morphismes propres vérifiant les propriétés suivantes : (Dim1), (Htp2), (wProj2), (BG), (FProj1,2).

Notons que par définition, $CH^n(X) = 0$ si $n > \dim(X)$.

Par contre CH^* ne vérifie pas (Kun) ni a fortiori (Dua). Elle ne vérifie pas en général la propriété (Fin).

Exemple IX.2.2. — On a vu que si X est un k-schéma lisse, il existe un isomorphisme : $\mathrm{Pic}(X) \simeq CH^1(X)$. On note cet isomorphisme c_1 et pour tout fibré inversible L/X on appelle $c_1(L)$ la *première classe de Chern* de L/X.

Soit C/k une courbe propre, lisse, géométriquement intègre. Alors, si l'on note J sa Jacobienne, on obtient par définition une suite exacte courte scindée

$$0 \to J(k) \to CH^1(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$$

où le morphisme deg est par définition le morphisme de Gysin associé au morphisme structural du k-schéma X.

Remarque IX.2.3. — Toutefois, si X est un k-schéma projectif lisse pour k un corps de nombres ou k un corps fini, $CH^*(X)$ est un groupe abélien de type fini.

La seule évidence pour cette conjecture est le théorème de Mordell-Weil :

Si A est un schéma abélien sur un corps de nombres k, $A(k)$ est un groupe abélien de type fini. La conjecture précédente en résulte d'après l'exemple ci-dessus.

IX.2.4. — Les groupes de Chow forment une théorie cohomologique avec produit initiale. On formule cette assertion par la propriété fondamentale suivante d'une cohomologie H^* dans le cas (B1) ou (B2) :

(C) Pour tout entier n, il existe un morphisme

$$\gamma_X : CH^n(X) \to H^{2n}(X)$$

Si H^* est munie d'un produit, γ_X envoie un produit de cycles algébriques sur leur produit dans $H^*(X)$.

Si H^* est bigraduée, γ_X se réécrit :

$$\gamma_X : CH^n(X) \to H^{2n,n}(X).$$

Si H^{**} est admet des morphismes de Gysin par rapport aux morphismes propres f, γ_X est compatible aux morphismes de Gysin : $\gamma_X f_* = f_* \gamma_X$.

Pour un cycle algébrique σ sur X, $\gamma_X(\sigma)$ est appelé la *classe de cohomologie* associée à σ.

Remarque IX.2.5. — Si H^{**} est une cohomologie twistée admettant des morphismes de Gysin, pour une immersion fermée $i : Z \to X$ entre k-schéma lisses, la classe de cohomologie $i_*(1)$ est la classe de cohomologie associée au cycle algébrique associé à Z dans X – cf Définition IV.2.3.

IX.2.b. Cohomologies de Weil. —

IX.2.6. — Une *cohomologie de Weil* est une cohomologie vérifiant les propriétés suivantes : cas pur (S1), cas sans torsion (B1) et K est de caractéristique 0, positivement graduée, vérifiant la formule de Künneth (Kun), la finitude (Fin), la dualité (Dua1) et munie d'une classe de cycle (C) – compatible aux produits et aux morphismes de Gysin.

Remarque IX.2.7. — Le nom provient des conjectures de Weil, et des idées de Weil sur la cohomologie et les nombres de Betti qui ont abouties à la formulation des axiomes précédents et au projet de définir une telle cohomologie pour les variétés (ou schémas !) sur un corps fini.

Exemple IX.2.8. — Soit k un corps de base de charactéristique 0.

1. *Cohomologie de Betti*.– On suppose donné un plongement complexe $\sigma : k \to \mathbb{C}$. Si X est un k-schéma projectif lisse, on note X^σ l'espace topologique des points complexes du schéma $X \times_k^\sigma \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$.

   On pose : $H^*_B(X, \mathbb{Z}) = H^*_{sing}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ où H^*_{sing} est la cohomologie singulière de l'espace $X(\mathbb{C})$.

   La partie rationnelle de ces groupes abéliens est notée : $H^*_B(X, \mathbb{Q})$. C'est une cohomologie de Weil.

2. *Cohomologie de De Rham*.– Pour tout k-schéma lisse X, on défini la cohomologie de De Rham de X/k comme le k-espace vectoriel gradué :

   $$H^n_{dR}(X) = H^n(X, \Omega^*_{X/k})$$

   où $\Omega^*_{X/k}$ est le complexe de faisceaux abéliens sur X des formes différentielles de X/k et le membre de droite désigne l'hypercohomologie en degré n de X à valeur dans $\Omega^*_{X/k}$: autremenet dit la valeur du n-ème foncteur dérivé du foncteur section globale $\Gamma(X, -)$ appliqué au complexe $\Omega^*_{X/k}$.

   Notons que d'après un théorème de Grothendieck, si X est affine lisse sur k,

   $$H^n_{dR}(X) = H^n\big(\Gamma(X, \Omega_{X/k})\big).$$

   La cohomologie H^*_{dR}, restreinte aux k-schémas projectifs lisses est une cohomologie de Weil.

IX.2.9. — Conjecturalement, sur un corps donné k, il n'existe à isomorphisme près qu'une seule cohomologie de Weil.

On dispose ainsi de l'*isomorphisme des périodes* dû en géométrie algébrique à Grothendieck : pour tout k-schéma projectif lisse X, où k est un corps muni d'un plongement complexe σ, il existe un isomorphisme :

$$H^*_{dR}(X) \otimes_k^\sigma \mathbb{C} \simeq H^*_B(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

naturel en X et plus généralement compatible à toutes les structures supplémentaires envisagées précédemment.

Exemple IX.2.10. — Soit k muni d'un plongement complexe σ.

Soit X une courbe propre, lisse, connexe sur $\mathbb{C}$ et de genre g. Reprenons la suite exacte exponentielle (III.7)

$$H^1_B(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2_B(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X)$$

Alors, le groupe abélien $H^1_B(X,\mathbb{Z})$ est un réseau dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^1(X,\mathcal{O}_X) \simeq \Gamma(X,\mathcal{O}_X)^*$ qui est de dimension g. Donc, $H^1_B(X,\mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre de dimension $2g$. On en déduit :

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^1_B(X,\mathbb{Q}) = 2g.$$

Et plus généralement, pour toute courbe propre, lisse, géométriquement intègre sur k,

$$\dim_k H^1_{dR}(X) = \dim_{\mathbb{Q}} H^1_B(X,\mathbb{Q}) = 2g.$$

Autrement dit, la dimension de ces cohomologies de Weil en degré 1 est égale à 2 fois la dimension de la jacobienne de X. Notons par ailleurs, que $H^0_{dR}(X) = k$ et par dualité de Poincaré, $H^2_{dR}(X) \simeq k$.

En ce sens, la jacobienne de X contient l'information cohomologique de X : les classes de cycles modulo équivalence homologique et les nombres de Betti.

Exemple IX.2.11. — *Cohomologie rigide*.– On se donne un anneau de valuation discrète complet V de corps résiduel k de caractéristique p et de corps des fonctions K de caractéristique 0.

Si X est un k-schéma de type fini, on dispose de groupes de cohomologies rigide notés $H^*_{rig}(X/K)$ à valeurs dans les K-espaces vectoriels.

Restreinte aux k-schémas lisses, la cohomologie rigide est une cohomologie de Weil. Elle vérifie même la propriété (Fin) pour tous les k-schémas et la propriété (Kun) pour les k-schémas lisses.

(Indication de définition) Dans le cas où X est un k-schéma affine lisse A_0, il existe d'après un théorème d'Elkik une V-algèbre lisse A telle que $A \otimes_V k = A_0$ – on appelle A un *relèvement* de A. On définit suivant Tate la *complétion faible* de la $\mathscr{V}$-algèbre A, notée $A^\dagger$. [(12)]

La cohomologie rigide de X se calcule alors comme la cohomologie du complexe suivant :

$$H^n_{rig}(X/K) = H^n((A^\dagger \otimes_A \Omega A/V) \otimes_V K).$$

Remarque IX.2.12. — La définition de la cohomologie rigide est due à Berthelot. Dans le cas affine lisse, les groupes de cohomologie formés par le membre de droite de l'égalité précédente avaient été introduits auparavant par Monsky et Washnitzer ; on appelle cette cohomologie la cohomologie de Monsky-Washnitzer.

Enfin, la restriction de la cohomologie rigide aux k-schémas propres et lisses coïncide avec une troisième cohomologie, la cohomologie dite cristalline, introduite par Grothendieck et développée par Berthelot. Notons que la cohomologie cristalline peut-être définie dans le cas des k-schémas lisses mais elle ne vérifie pas nécessairement la propriété (Fin).

IX.2.c. Cohomologie étale. —

IX.2.13. — *Topos étale*.– Soit X un schéma quelconque. On note $X_{ét}$ la catégorie des X-schémas étales (notons que les morphismes entre deux schémas étales sont nécessairement étales).

Un faisceau étale sur X est un foncteur contravariant $F : X_{ét} \to \mathscr{E}ns$ tel que pour toute famille $(p_i : V_i \to V)_{i\in I}$ de morphismes dans $X_{ét}$ telle que $V = \cup_{i\in I} p_i(V_i)$, la suite suivante est exacte à

12. Dans le cas où $A = V[t_1,...,t_n]$, $A^\dagger$ est la V-algèbre des séries formelles $\sum_i a_i.t_1^{i_1}...t_n^{i_n}$ surconvergentes : son rayon de convergence est strictement supérieur à 1. Le cas général s'en déduit en choisissant un présentation finie de A/V.

droite :

(IX.1) $$0 \longrightarrow F(V) \xrightarrow{a} \prod_{i\in I} F(V_i) \overset{b_1}{\underset{b_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I^2} F(V_i \cap V_j).$$

On note $\tilde{X}_{\acute{e}t}$ la catégorie des faisceaux étales sur X.

Remarque IX.2.14. — Sous les conditions de la définition précédente, on dit encore que (p_i) est un recouvrement étale de V. La donnée des recouvrements étales des X-schémas étales définit une pré-topologie sur $X_{\acute{e}t}$. On dit que $X_{\acute{e}t}$ est un *site* et la catégorie $\tilde{X}_{\acute{e}t}$ est le *topos* associé.

Un autre exemple de site est donné par la catégorie des ouverts de X, munie de la pré-topologie formée par les recouvrements ouverts. On l'appelle le site Zariski de X et on le note X_{Zar}. Les objets de $\tilde{X}_{Zar}$ sont appelés les *faisceaux Zariski* sur X.

IX.2.15. — La catégorie $X_{\acute{e}t}$ généralise la catégorie des faisceaux Zariski sur X qu'on a déjà vue.

Ainsi, on peut considérer la sous-catégorie de $X_{\acute{e}t}$ des objets en groupes abéliens. Il s'agit précisément des faisceaux de groupes abéliens sur $X_{\acute{e}t}$.

Plus généralement, on fixe Λ un anneau et on considère $\mathrm{Fx}(X_{\acute{e}t}, \Lambda)$ la catégorie des faisceaux étales de Λ-modules sur $X_{\acute{e}t}$: foncteurs contravariants $F : X_{\acute{e}t} \to \Lambda-\mathrm{mod}$ tels que la suite (IX.1) de Λ-modules est exacte à droite.

La catégorie $\mathrm{Fx}(X_{\acute{e}t}, \Lambda)$ est abélienne de Grothendieck. Le foncteur section globale :

$$\Gamma : \mathrm{Fx}(X_{\acute{e}t}, \Lambda) \to \Lambda-\mathrm{mod}, F \mapsto F(X)$$

est exact à gauche. On peut le dériver à droite.

Définition IX.2.16. — Pour tout faisceau F dans $\mathrm{Fx}(X_{\acute{e}t}, \Lambda)$, on définie la cohomologie étale de X à coefficients dans F comme le Λ-module :

$$H^n(X_{\acute{e}t}, F) := \mathbf{R}^n\Gamma(F).$$

La *cohomologie étale de X à coefficients dans* Λ est le groupe :

$$H^n_{\acute{e}t}(X, \Lambda) := H^n(X_{\acute{e}t}, \Lambda_X)$$

où Λ_X est le faisceau constant sur $X_{\acute{e}t}$ de valeur Λ.

Exemple IX.2.17. — Soit $\bar{k}$ une clôture séparable de k et G_k le groupe de Galois de $\bar{k}/k$.

Si X est le spectre d'un corps k, $X_{\acute{e}t}$ est la catégorie opposée de la catégorie des produits d'extensions finies séparables de k. Être un faisceau sur $X_{\acute{e}t}$ revient alors à être additif. On en déduit que la catégorie $\mathrm{Fx}(X_{\acute{e}t}, \Lambda)$ est équivalente à la catégorie des Λ-modules discrets avec action continue du groupe profini G_k, *i.e.* les Λ-modules galoisiens sur k.

On en déduit de plus que pour tout Λ-module galoisien M, identifié à un faisceau sur $k_{\acute{e}t}$, on obtient le calcul suivant :

$$H^n(k_{\acute{e}t}, M) = H^n(G_k, M)$$

où le membre de droite désigne la cohomologie du $\Lambda[G_k]$-module M – calculée par exemple avec la bar-résolution (cf [**Ser94**]).

IX.2.18. — *Twists.*– On suppose maintenant que n est un entier inversible sur X et on considère le cas $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note μ_n la faisceau étale des *racines n-ème de l'unité* : on considère le schéma en groupes $\mathbb{G}_m$, vu comme un faisceau étale sur $X_{\acute{e}t}$, et on note μ_n le noyau de la multiplication par n sur $\mathbb{G}_m$ dans $X_{\acute{e}t}$:

$$0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \to 0.$$

Notons que μ_n est non canoniquement isomorphe à Λ_X. En particulier, il est inversible pour le produit tensoriel de $\mathrm{Fx}(X_{\acute{e}t}, \Lambda)$.

Pour tout faisceau étale F sur $X_{ét}$ de Λ-module, on définit le *i-ème twist* de F comme le faisceau :

$$F(i) := F \otimes \mu_n^{\otimes, i}.$$

Ainsi, la cohomologie à coefficients dans F est bigraduée :

$$H^{n,i}(X_{ét}, F) := H^n(X_{ét}, F(i)).$$

IX.2.19. — Si on fixe un entier n, que l'on pose $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et que l'on considère la catégorie $\mathscr{S}$ des $\mathbb{Z}[1/n]$-schémas, la cohomologie étale

$$H^n_{ét}(X, \Lambda(i)) := H^n(X_{ét}, \Lambda_X(i))$$

est une théorie cohomologique bigraduée munie d'un produit. Elle satisfait les axiomes (Dim1,2), (Htp2), (wProj2), (BG) et (cdh). Elle est aussi munie de morphismes de Gysin pour les morphismes propres entre schémas lisses sur un schéma S – et même pour les morphismes projectifs localement d'intersection complète. Elle est munie d'une classe de cycles pour les schémas lisses sur un corps de caractéristique première à n.

IX.2.20. — *Cohomologie étale l-adique.*– On fixe un corps algébriquement clos k et on considère la catégorie $\mathscr{S}$ des k-schémas algébriques.

Soit X un k-schéma algébrique. On obtient alors une tour de groupes abéliens :

$$H^n_{ét}(X, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(i)) \to \ldots \to H^n_{ét}(X, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}(i)) \xrightarrow{\nu_r} H^n_{ét}(X, \mathbb{Z}/l^{r+1}\mathbb{Z}(i)) \to \ldots$$

où ν_r est induit par le morphisme de réduction modulo l.

On définit la *cohomologie étale l-adique de X* comme la limite projective de cette tour :

$$H^n_{ét}(X, \mathbb{Z}_l(i)) := \varprojlim_{n>0} \left(H^n_{ét}(X, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}(i))\right).$$

Notons que ce groupe abélien est naturellement un $\mathbb{Z}_l$-module.

On définit la *cohomologie étale l-adique rationnelle de X* comme la partie rationnelle des groupes précédents :

$$H^n_{ét}(X, \mathbb{Q}_l(i)) := H^n_{ét}(X, \mathbb{Z}_l(i)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Ces groupes sont des $\mathbb{Q}_l$-espaces vectoriels.

On a ainsi des théories cohomologiques bigraduées, à coefficients dans $\mathbb{Z}_l$ ou $\mathbb{Q}_l$, définies sur $\mathscr{S}$. Elles vérifient les mêmes propriétés que celles données dans le paragraphe précédente.

De plus, la théorie cohomologique $H^*_{ét}(-, \mathbb{Q}_l)$ est une théorie de Weil (pour tout corps k).

Remarque IX.2.21. — On peut définir la cohomologie étale l-adique pour des $\mathbb{Z}[1/l]$-schémas quelconques mais il faut alors prendre une "limite projective dérivée" car les $\mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}$-modules $H^n_{ét}(X, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}(i))$ ne sont pas nécessairement de type fini.

Références

[Ser94] J.-P. Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 1994.

---

premier semestre 2013

Frédéric Déglise, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* frederic.deglise@ens-lyon.fr
Url : http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/