

**UNIVERSITÉ PARIS 13**  
INSTITUT GALILÉE

**THÈSE DE DOCTORAT**  
pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13**  
dans la discipline des mathématiques

**RÉALISATIONS TANNAKIENNES DES MOTIFS MIXTES  
TRIANGULÉS**

présentée et soutenue publiquement par  
**BRADLEY DREW**

le 14 juin 2013 devant le jury composé de

M. CHRISTIAN AUSONI (Université Paris 13)  
M. LAWRENCE BREEN (Université Paris 13)  
M. DENIS-CHARLES CISINSKI (Université Paul Sabatier)  
M. CHARLES DE CLERCQ (Université Paris 13)  
M. FRÉDÉRIC DÉGLISE (ENS Lyon, CNRS) DIRECTEUR  
M. GEORGES MALTSINIOTIS (Université Paris 7, CNRS)  
M. BERTRAND TOËN (Université Montpellier 2)

RAPPORTEURS

M. ALEXANDER BEĪLINSON (University of Chicago)  
M. MARC LEVINE (Universität Duisburg-Essen)

## Réalisations tannakiennes des motifs mixtes triangulés

### Résumé

On généralise la notion d'une théorie de Weil mixte, due à D.-C. Cisinski et F. Déglise ([CD12a]), afin d'obtenir un formalisme de réalisations tannakiennes des motifs mixtes triangulés au sens de V. Voevodsky sur un schéma de type fini sur un corps parfait. On l'applique à la construction d'un foncteur de réalisation de Hodge mixte rationnelle. Sur un schéma  $X$ , quasi-projectif, lisse sur un corps de caractéristique nulle  $\kappa$ , on obtient un foncteur de réalisation de De Rham à valeurs dans la catégorie dérivée des  $\mathcal{D}_{X/\kappa}$ -modules holonomes. Cela permet d'en déduire une correspondance de Riemann-Hilbert purement algébrique.

## Tannakian realizations of triangulated mixed motives

### Abstract

We generalize the notion of a mixed Weil theory, introduced by D.-C. Cisinski and F. Déglise in [CD12a], in order to obtain a formalism of Tannakian realization functors on V. Voevodsky's triangulated mixed motives over schemes of finite type over a perfect field. We apply this formalism to the construction of a rational mixed Hodge realization functor. For a scheme  $X$ , smooth, quasi-projective over a characteristic zero field  $\kappa$ , we obtain a de Rham realization functor with values in the derived category of holonomic  $\mathcal{D}_{X/\kappa}$ -modules. This allows us to deduce a purely algebraic Riemann-Hilbert correspondence.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
Remarques historiques et motivation . . . . .	5
Résultats principaux . . . . .	6
Remerciements . . . . .	11
<b>Notations et conventions</b>	<b>12</b>
<b>1 Homotopie motivique stable enrichie</b>	<b>13</b>
1.0 Catégories tannakiennes . . . . .	13
1.1 Préfaisceaux . . . . .	20
1.2 Structures de modèles globales . . . . .	27
1.3 Structures de modèles Nisnevich-locales . . . . .	32
1.4 Structures de modèles $\mathbf{A}^1$ -locales . . . . .	50
1.5 Spectres symétriques et l'axiome du monoïde . . . . .	53
1.6 Structures de modèles $\mathbf{P}^1$ -stables . . . . .	67
<b>2 Théories de Weil mixtes enrichies</b>	<b>75</b>
2.1 Axiomes et représentabilité . . . . .	76
2.2 Formalisme des six opérations de Grothendieck . . . . .	82
2.3 Structures de poids . . . . .	93
<b>3 Coefficients de De Rham</b>	<b>96</b>
3.1 $\mathcal{D}$ -modules holonomes . . . . .	96
3.2 Formule de Künneth . . . . .	103
3.3 Réalisation de De Rham . . . . .	106
3.4 Correspondance de Riemann-Hilbert . . . . .	120
<b>Bibliographie</b>	<b>122</b>
<b>Index des terminologies</b>	<b>128</b>

ἀλλ' ἄλλην χρῆ πρῶτον ὁδὸν τελέσαι καὶ ἰκέσθαι  
εἰς Ἄϊδαο δόμους καὶ ἐπαινῆς Περσεφονείης  
ψυχῇ χρησομένους Θηβαίου Τειρεσίαο

Homère, *L'Odyssée*, X, 490–492.

# INTRODUCTION

## REMARQUES HISTORIQUES ET MOTIVATION

Grâce aux efforts de F. Morel, V. Voevodsky ([MV99]), R. Jardine ([Jar00]), M. Hovey ([Hov01]), B. Dundas, O. Röndigs, P. Østvær ([DRØ03]), J. Riou ([Rio07]), J. Ayoub ([Ayo07a, Ayo07b]), D.-C. Cisinski et F. Déglise ([CD12b]), entre autres, on dispose d'un formalisme des six opérations de Grothendieck sur les motifs mixtes triangulés à coefficients rationnels comme prévu par A. Beilinson dans [Beĭ87]. Ce formalisme en place, se présente la tâche de fabriquer des foncteurs de réalisation et de vérifier qu'ils sont compatibles aux six opérations de Grothendieck.

Dans [Ayo10, 2.1], J. Ayoub construit un foncteur de réalisation  $\mathcal{R}_{\text{Betti}}^* : \mathcal{SH}_{\mathcal{M}}(X) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{M}}(X(\mathbf{C})^{\text{an}})$ , où  $X$  est un schéma sur un sous-corps  $\kappa \subseteq \mathbf{C}$ ,  $\mathcal{M}$  est une catégorie de coefficients (1.0.13) dont les équivalences faibles et les fibrations sont stables par petite colimite filtrante,  $\mathcal{SH}_{\mathcal{M}}(X)$  est la catégorie homotopique stable à coefficients dans  $\mathcal{M}$  ([Ayo07b, 4.5.53]) et  $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}(X(\mathbf{C})^{\text{an}})$  est la catégorie dérivée des faisceaux sur le petit site analytique  $X(\mathbf{C})^{\text{an}}$  à valeurs dans  $\mathcal{M}$ . De plus, si  $\mathcal{M}$  est une catégorie de modèles monoïdale symétrique, alors  $\mathcal{R}_{\text{Betti}}^*$  induit par restriction un foncteur entre les sous-catégories triangulées épaisses engendrées par les objets « constructibles » qui commute aux six opérations de Grothendieck d'après [Ayo10, 3.7]. De même, lorsque  $\ell \in \mathbf{Z}_{>2}$  est un nombre premier, J. Ayoub construit dans [Ayo11, 5.6] un foncteur de réalisation  $\ell$ -adique qui commute aux six opérations de Grothendieck sous certaines hypothèses techniques d'après [Ayo11, 6.9].

Outre ces réalisations de Betti et  $\ell$ -adique, dans [Hub00, Hub04], A. Huber a construit une réalisation de  $\mathcal{DM}_{\text{gm}}(\kappa)$  à valeurs dans la catégorie dérivée des  $\mathbf{Q}$ -complexes de Hodge mixtes de [Beĭ86, 3.2], où  $\kappa$  est un sous-corps de  $\mathbf{C}$  et où  $\mathcal{DM}_{\text{gm}}(\kappa)$  la catégorie des motifs mixtes géométriques de V. Voevodsky. Dans [LW12], F. Lecomte et N. Wach construisent des réalisations de Hodge à coefficients entiers des motifs mixtes géométriques.

Par rapport à la réalisation de Betti construite par J. Ayoub, ces constructions de A. Huber et de F. Lecomte et N. Wach ont l'avantage de tenir compte de structures plus fines sur la cohomologie des  $\kappa$ -schémas, à savoir celles des structures de Hodge mixtes. En revanche, on rencontre des difficultés dès que l'on cherche à modéliser ces foncteurs par des foncteurs de Quillen entre catégories de modèles ou, plus généralement, par des  $(\infty, 1)$ -foncteurs de  $(\infty, 1)$ -catégories. Autrement dit, les catégories triangulées sont défaillantes à plusieurs égards et l'on souhaiterait remédier à cela en les remplaçant par des variantes plus raffinées, telles les  $(\infty, 1)$ -catégories stables ([Lur12]), les dg-catégories ou les catégories de modèles. Or il n'y a pas de raffinement évident de ces foncteurs de réalisation de Hodge sur  $\text{Spec}(\kappa)$ .

Une autre difficulté, qui n'est pas tout à fait indépendante de la précédente, est celle posée par le passage des foncteurs de réalisation de  $\mathcal{DM}_{\text{gm}}(\kappa)$  aux foncteurs de réalisation de  $\mathcal{DM}_{\text{gm}}(X)$  pour  $X$  un  $\kappa$ -schéma de type fini. Plus précisément, on voudrait construire un foncteur de réalisation  $\mathcal{DM}_{\text{gm}}(X) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{MHM}(X))$  pour tout  $\kappa$ -schéma de type fini  $X$ , où  $\mathcal{D}^b(\mathcal{MHM}(X))$  est la catégorie dérivée bornée des modules de Hodge mixtes sur  $X$  définie dans [Sai90].

Dans [CD12a] et [CD12b, §17.2], D.-C. Cisinski et F. Déglise introduisent une nouvelle approche de la construction de foncteurs de réalisation compatibles aux six opérations de Grothendieck et très satisfaisants d'un point de vue  $(\infty, 1)$ -catégorique. L'idée est la suivante. Les foncteurs de réalisation de Betti, de De Rham,  $\ell$ -adique et rigide sont censés être compatibles aux définitions des cohomologies de Weil éponymes. De plus, on peut représenter ces théories cohomologiques par des préfaisceaux de dg- $\mathbf{K}$ -algèbres dg-commutatives sur

la catégorie  $\text{SmAff}\downarrow\mathbf{B}$  des  $\mathbf{B}$ -schémas affines, lisses de type fini, où  $\mathbf{K}$  est un corps de caractéristique nulle qui dépend de la théorie choisie et  $\mathbf{B}$  est un schéma de base. Par suite, on peut les représenter par des monoïdes commutatifs  $\mathcal{E}$  de la catégorie des spectres de Tate symétriques  $\text{Sp}_{1_{\mathbf{K}(1)}}^{\mathfrak{S}}(\mathbf{B}, \mathbf{K})$  sur  $\mathbf{B}$ . Si l'on note  $\text{Mod}(\mathcal{E})$  la catégorie des modules sur le monoïde commutatif  $\mathcal{E}$ , alors  $\text{Mod}(\mathcal{E})$  admet une structure de modèles par rapport à laquelle le foncteur canonique  $(-) \otimes \mathcal{E} : \text{Sp}_{1_{\mathbf{K}(1)}}^{\mathfrak{S}}(\mathbf{B}, \mathbf{K}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{E})$  est de Quillen à gauche et l'on peut interpréter son foncteur dérivé comme un foncteur de réalisation par rapport à la théorie cohomologique choisie. De plus, pour tout  $\mathbf{B}$ -schéma  $X$ , l'image inverse  $\mathcal{E}_X$  de  $\mathcal{E}$  sur  $X$  est un monoïde commutatif de  $\text{Sp}_{1_{\mathbf{K}(1)}}^{\mathfrak{S}}(X, \mathbf{K})$  et les catégories  $\text{Mod}(\mathcal{E}_X)$  vérifient un formalisme des six opérations de Grothendieck. Notant  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  la catégorie homotopique de la catégorie de modèles  $\text{Mod}(\mathcal{E})$ , les foncteurs canoniques  $(-) \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{E}_X : \mathcal{SH}(X) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  se factorisent à travers la catégorie  $\mathcal{DM}_{\mathbf{B}}(X)$  des motifs de Beilinson définie dans [CD12b, 14.2.1] et les foncteurs induits  $(-) \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{E}_X : \mathcal{DM}_{\mathbf{B}}(X) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  sont compatibles aux six opérations de Grothendieck lorsque l'on les restreint aux objets constructibles. Ainsi, on obtient de cette façon un formalisme très naturel de foncteurs de réalisation.

Même si les avantages des foncteurs de réalisation de [CD12b, 17.2] sont nombreux, se posent toutefois les questions naturelles suivantes.

- (i) Comment peut-on récupérer les informations plus fines sur les cohomologies  $\ell$ -adique, de Betti et rigide fournies par l'action du groupe de Galois absolu, la structure de Hodge mixte et la structure de F-isocristal, respectivement ?
- (ii) À quel point la catégorie  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  ressemble-t-elle à son analogue « classique » ? Par exemple, si  $\mathcal{E}$  représente la cohomologie de De Rham algébrique, peut-on comparer  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  à la catégorie dérivée des  $\mathcal{D}$ -modules quasi-cohérents sur  $X$  ?

On propose dans le deuxième chapitre de cette thèse une réponse à la première question et, dans le troisième chapitre, on répond à la seconde dans le seul cas des coefficients pour la cohomologie de De Rham algébrique. Le cas des coefficients de Betti est traité dans [CD12b, 17.1.7]. Le cas des coefficients pour la cohomologie rigide, dont on ne traitera pas dans le présent, est particulièrement intéressant, car l'analogue « classique » de  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  dans ce cas est le sujet d'une théorie encore naissante des  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques ([Car12]).

## RÉSULTATS PRINCIPAUX

**Coefficients tannakiens.** Le premier théorème important de ce travail est un résultat technique qui affirme que, pour toute catégorie tannakienne,  $\mathbf{Q}$ -linéaire  $\mathcal{T}_0$  de Ext-dimension finie (1.0.3) et pour tout schéma noethérien  $S$  de dimension de Krull finie, si l'on pose  $\mathcal{T} := \text{Ind}(\mathcal{T}_0)$ , alors on dispose d'une théorie d'algèbre homotopique particulièrement agréable dans  $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(S)$ , la catégorie homotopique stable de  $S$  à coefficients dans la catégorie  $\text{Cplx}(\mathcal{T})$  des complexes dans  $\mathcal{T}$ .

**Théorème 1.6.3.** *Soient  $\mathcal{T}_0$  une  $\mathcal{A}$ -petite catégorie tannakienne,  $\mathbf{Q}$ -linéaire de Ext-dimension finie,  $\mathcal{T} := \text{Ind}(\mathcal{T}_0)$ ,  $S$  un  $\mathcal{A}$ -schéma noethérien de dimension de Krull finie et  $T$  un objet cofibrant de  $\mathcal{PSh}(\text{Sm}\downarrow S, \text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{proj}}$ . Alors les  $\text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$ -catégories de  $\mathcal{A}$ -modèles monoïdales symétriques*

$$\text{Sp}_T^{\mathfrak{S}} \left( \mathcal{PSh}(\text{Sm}\downarrow S, \text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}} \right)_{\text{st-proj}}$$

et

$$\text{Sp}_T^{\mathfrak{S}} \left( \mathcal{PSh}(\text{Sm}\downarrow S, \text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-inj}} \right)_{\text{st-proj}}$$

sont stables,  $\mathfrak{A}$ -tractables,  $\mathfrak{A}$ -cellulaires, propres à gauche et vérifient l'axiome du monoïde. De plus, elles sont parfaites au sens de [CD12b, 7.2.3] et elles admettent une famille génératrice et homotopiquement génératrice d'objets cofibrants,  $\mathfrak{K}_0$ -présentables et homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentables.

En particulier,  $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(\mathcal{S})$  est la catégorie homotopique d'une structure de modèles monoïdale symétrique sur la catégorie des spectres de Tate symétriques  $\mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathcal{S}}(\mathcal{S}, \mathrm{Cplx}(\mathcal{T}))$  qui vérifie l'axiome du monoïde de [SS00, 3.3] ; la catégorie des monoïdes commutatifs de  $\mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathcal{S}}(\mathcal{S}, \mathrm{Cplx}(\mathcal{T}))$  admet une structure de modèles ; et, pour tout monoïde commutatif  $A$  de  $\mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathcal{S}}(\mathcal{S}, \mathrm{Cplx}(\mathcal{T}))$ , la catégorie  $\mathrm{Mod}(A)$  des modules sur  $A$  admet une structure de modèles monoïdale symétrique qui vérifie l'axiome du monoïde.

Il est envisageable que la théorie des  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques, telle qu'elle est développée dans [Lur12], rende désuète cette approche de l'algèbre homotopique via l'axiome du monoïde. Cependant, à l'heure actuelle, la théorie des  $(\infty, 1)$ -catégories enrichies ne semble pas être au point et l'on ne peut pas encore se passer de ces détails techniques de la théorie des catégories de modèles.

**Théories de Weil mixtes.** Le théorème 1.6.3 étant démontré, on est en mesure de généraliser la définition de D.-C. Cisinski et F. Déglise d'une théorie de Weil mixte au cas de coefficients ind-tannakiens. Grossièrement, si l'on pose  $\mathcal{T} := \mathrm{Ind}(\mathcal{T}_0)$  avec  $\mathcal{T}_0$  une petite catégorie tannakienne,  $\mathbf{Q}$ -linéaire et que  $\mathbf{B}$  est un schéma noethérien de dimension de Krull finie, alors une  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte sur  $\mathbf{B}$  est un préfaisceau  $E_{\mathbf{B}}$  sur  $\mathrm{SmAff}\downarrow\mathbf{B}$  à valeurs dans la catégorie  $\mathcal{CAlg}(\mathrm{Cplx}(\mathcal{T}))$  des monoïdes commutatifs de la catégorie monoïdale symétrique  $\mathrm{Cplx}(\mathcal{T})$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (W1)  $E_{\mathbf{B}}$  satisfait à la propriété de descente par rapport aux hyper-recouvrements Nisnevich ;
- (W2)  $E_{\mathbf{B}}$  satisfait à la propriété d'invariance par  $\mathbf{A}^1$ -homotopie ;
- (W3) la cohomologie de  $\mathbf{B}$  par rapport à  $E_{\mathbf{B}}$  est celle du « point », c'est-à-dire le complexe  $E_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})$  est quasi-isomorphe au complexe  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}[0]$  concentré en degré 0 donné par l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}$  de  $\mathcal{T}$  ;
- (W4)  $E_{\mathbf{B}}$  est  $\mathbf{P}^1$ -stable en ce sens que  $E_{\mathbf{B}}(\mathbf{G}_{m,\mathbf{B}}) \cong \mathbf{1}_{\mathcal{T}}[0] \oplus \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_{\mathbf{E}}[-1]$ , où  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_{\mathbf{E}}$  est un objet  $\otimes$ -inversible de  $\mathcal{T}$  ; et
- (W5)  $E_{\mathbf{B}}$  vérifie la formule de Künneth, c'est-à-dire le morphisme canonique  $E_{\mathbf{B}}(X) \otimes_{\mathcal{T}}^L E_{\mathbf{B}}(Y) \rightarrow E_{\mathbf{B}}(X \times_{\mathbf{B}} Y)$  est un quasi-isomorphisme pour tous  $X, Y \in \mathrm{SmAff}\downarrow\mathbf{B}$ .

Un tel préfaisceau est représenté par un monoïde commutatif de la catégorie des spectres de Tate symétriques à coefficients dans  $\mathcal{T}$  :

**Théorème 2.1.4.** Soit  $E_{\mathbf{B}} \in \mathrm{ob}(\mathcal{CAlg}(\mathcal{PSh}(\mathrm{SmAff}\downarrow\mathbf{B}, \mathrm{Cplx}(\mathcal{T}))))$  une  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte. Alors il existe un monoïde commutatif  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  de  $\mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathcal{S}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})$  et un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Rhom}_{\mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathcal{S}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})}^{\mathrm{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T}}(X), \mathcal{E}_{\mathbf{B}}(r)) \simeq E_{\mathbf{B}}(X)(r)_{\mathbf{E}}$$

dans la catégorie dérivée  $\mathcal{D}(\mathrm{Ind}(\mathcal{T}))$  pour tous  $X \in \mathrm{ob}(\mathrm{SmAff}\downarrow\mathbf{B})$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ , où  $K(r)_{\mathbf{E}} := K \otimes_{\mathcal{T}}^L \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(r)_{\mathbf{E}}$  pour tout  $K \in \mathrm{ob}(\mathrm{Cplx}(\mathcal{T}))$ . De plus,  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  est un  $\Omega^{\infty}$ -spectre faible.

**Réalisation de Hodge mixte.** Les conditions (W1)–(W5) sont des propriétés communes à toutes les cohomologies de Weil classiques munies des structures tannakiennes. En revanche,

la possibilité de représenter ces théories cohomologiques par des préfaisceaux de monoïdes commutatifs dans  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})$  est une question relativement délicate. Si l'on oublie la structure tannakienne, on trouve dans [CD12a, §3] de tels préfaisceaux pour les théories de De Rham, rigide et  $\ell$ -adique. Nous construisons dans 2.1.8 un préfaisceau de monoïdes commutatifs de la catégorie des complexes de ind-objets de la catégorie  $\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\text{pol}}$  des  $\mathbb{Q}$ -structures de Hodge mixtes polarisables qui permet de récupérer la structure de Hodge mixte de P. Deligne ([Del71, 3.2.5]) sur la cohomologie de Betti à coefficients rationnels d'un  $\mathbf{C}$ -schéma affine, lisse.

**Théorème 2.1.8.** *Il existe une  $\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\text{pol}}$ -théorie de Hodge mixte  $E_{\text{Hdg,Spec}(\mathbf{C})}$  sur  $\text{Spec}(\mathbf{C})$  telle que  $\mathfrak{h}^r E_{\text{Hdg,Spec}(\mathbf{C})}(X)$ , le  $r$ -ième objet de cohomologie de  $E_{\text{Hdg,Spec}(\mathbf{C})}$ , s'identifie à la structure de Hodge mixte polarisable sur la cohomologie de Betti rationnelle  $H_{\text{Betti}}^r(X, \mathbb{Q})$  pour tous  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathbf{C})$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ .*

**Structures de poids.** En s'appuyant sur les résultats de [CD12b], on obtient dans §2.2 un formalisme des six opérations de Grothendieck canoniquement associé à un spectre de Tate symétrique  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  qui représente une  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte. En particulier, à tout  $\mathbf{B}$ -schéma de type fini  $\pi_X : X \rightarrow \mathbf{B}$  on peut associer un monoïde commutatif  $\mathcal{E}_X = \mathbf{L}\pi_X^* \mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  de  $\text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathbb{C}}(X, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T}))$  et, à tout morphisme séparé  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathbf{B}$ -schémas de type fini, on peut associer deux adjonctions  $\mathbf{L}f^* \dashv \mathbf{R}f_*$  et  $f_! \dashv f^!$  reliant les catégories homotopiques  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  et  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_Y)$  de  $\text{Mod}(\mathcal{E}_X)$  et  $\text{Mod}(\mathcal{E}_Y)$ , respectivement. On introduit dans 2.3.0 la condition suivante sur la  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte  $E_{\mathbf{B}}$  sur  $\mathbf{B}$  :

(W6) pour tous  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}\text{m}\text{Aff}\downarrow\mathbf{B})$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}$ , si  $2r < s$ , alors  $\text{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{T})}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, E_{\mathbf{B}}(X)(r)_E[s]) = 0$ ,

où  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$  désigne la catégorie dérivée de  $\mathcal{T}$ . Par exemple, la  $\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\text{pol}}$ -théorie de Weil de 2.1.8 vérifie cette hypothèse comme l'a remarqué A. Beilinson dans [Beil86, 5.1]. On peut donc adapter les arguments de D. Hébert ([Héb11, 3.3]) afin de développer une théorie de poids compatible aux six opérations de Grothendieck sur les sous-catégories  $\mathcal{D}_{\text{gm}}(\mathcal{E}_X) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  engendrées par les objets géométriques (2.2.12) lorsque  $\mathbf{B}$  est le spectre d'un corps parfait.

**Théorèmes 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4.** *Si  $\mathbf{B}$  est le spectre d'un corps parfait et que la  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte  $E_{\mathbf{B}}$  vérifie (W6), alors, pour tout  $\mathbf{B}$ -schéma de type fini  $X$ , la catégorie  $\mathcal{D}_{\text{gm}}(\mathcal{E}_X)$  admet une unique structure de poids au sens de [Bon10, 1.1.1] vérifiant les conditions suivantes :*

- (i) *pour tout  $r \in \mathbb{Z}$  et tout morphisme projectif  $f : Y \rightarrow X$  de  $\mathbf{B}$ -schémas de type fini avec  $Y$  régulier,  $\mathbf{R}f_* \mathcal{E}_Y(r)$  appartient au cœur de cette structure de poids ;*
- (ii) *pour tout morphisme séparé  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathbf{B}$ -schémas de type fini, les foncteurs  $\mathbf{L}f^*$ ,  $f_!$  et  $\otimes_{\mathcal{E}}^{\mathbf{L}}$  préservent les objets de poids négatif ; et*
- (iii) *le foncteur canonique  $\mathcal{DM}_{\mathbf{B}, \aleph_0}(X) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{gm}}(\mathcal{E}_X)$  préserve les objets de poids négatif et les objets de poids positif, où  $\mathcal{DM}_{\mathbf{B}, \aleph_0}(X)$  désigne la catégorie des motifs de Beilinson ([CD12b, 14.2.1]) homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables sur  $X$ .*

On voit ici l'un des principaux avantages de la notion générale d'une  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte par rapport au cas particulier des  $\text{Mod}(\mathbf{K})$ -théories de Weil mixtes avec  $\mathbf{K}$  un corps de caractéristique nulle : dans le cas où  $\mathcal{T} = \text{Mod}(\mathbf{K})$ , comme l'ont remarqué D.-C. Cisinski et F. Déglise dans [CD12a, 2.1.6], il existe un isomorphisme non canonique  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}(1) \cong \mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  dans  $\mathcal{SH}_{\mathbf{K}}(\mathbf{B})$  et l'on ne peut donc pas munir  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  d'une structure de poids compatible à celle sur  $\mathcal{DM}_{\mathbf{B}, \aleph_0}(X)$ .

**Réalisation de De Rham.** Le but du dernier chapitre de cette thèse est de construire un foncteur de réalisation de De Rham de  $\mathcal{SH}_{\mathbb{X}_0}(X)$ , la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{SH}(X)$  engendrée par les objets homotopiquement  $\mathbb{X}_0$ -présentables sur  $X$ , un schéma régulier, quasi-projectif sur le spectre d'un corps  $\kappa$  de caractéristique nulle, à valeurs dans  $\mathcal{D}_h^b(\mathcal{D}_{X/\kappa})$ , la catégorie dérivée bornée, holonome des  $\mathcal{D}_{X/\kappa}$ -modules quasi-cohérents, et d'étudier sa compatibilité aux six opérations de Grothendieck. À cette fin, on est obligé à travailler dans le cadre des  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques, car la théorie des six opérations de Grothendieck sur les  $\mathcal{D}_{X/\kappa}$ -modules holonomes n'est pas adaptée à celle des catégories de modèles.

**Théorème 3.3.9.** *Soient  $\kappa$  un corps de caractéristique nulle et  $X$  un  $\kappa$ -schéma quasi-projectif régulier. Alors il existe un  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort*

$$\varrho_{\mathrm{dR}}^* : \mathcal{SH}^\infty(X)^\otimes \rightarrow \mathrm{Ind} \left( \mathcal{D}_h^{b,\infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa})^{\otimes*} \right)$$

qui préserve les  $\mathcal{A}$ -petites  $(\infty, 1)$ -colimites et qui commute à  $f^*$  pour  $f$  un morphisme de  $\kappa$ -schémas quasi-projectifs, réguliers, à  $f_{\sharp}$  lorsque  $f$  est lisse et à  $f_*$  lorsque  $f$  est projectif.

Ici,  $\mathcal{SH}^\infty(X)^\otimes$  et  $\mathcal{D}_h^{b,\infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa})^{\otimes*}$  sont des  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques dont les catégories homotopiques s'identifient à  $\mathcal{SH}(X)$ , munie de la structure monoïdale du smash-produit, et à  $\mathcal{D}_h^b(\mathcal{D}_{X/\kappa})$ , munie de la structure monoïdale duale de la structure habituelle.

Les résultats de ce dernier chapitre sont largement indépendants de ceux des deux premiers chapitres, mais ce foncteur de réalisation  $\varrho_{\mathrm{dR}}^*$  permet de vérifier que, si  $\mathcal{E}_{\mathrm{dR},\kappa}$  est un spectre de Tate symétrique sur  $\mathrm{Spec}(\kappa)$  qui représente une théorie de Weil mixte associée à la cohomologie de De Rham algébrique sur  $\kappa$ , avec  $\kappa$  un corps de caractéristique nulle, alors les catégories  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathrm{dR},X})$  fournissent les « bonnes » catégories des coefficients constructibles « géométriques ».

**Théorème 3.3.20.** *Soient  $\kappa$  un corps de caractéristique nulle et  $X$  un  $\kappa$ -schéma quasi-projectif lisse. Alors il existe un  $(\infty, 1)$ -foncteur pleinement fidèle  $\chi_{\mathrm{dR},X}^* : \mathcal{D}_{\mathbb{X}_0}^\infty(\mathcal{E}_{\mathrm{dR},X}) \rightarrow \mathcal{D}_h^{b,\infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa})$  compatible aux structures monoïdales symétriques et qui commute à  $f^*$  pour  $f$  un morphisme de  $\kappa$ -schémas quasi-projectifs, réguliers, à  $f_{\sharp}$  lorsque  $f$  est lisse et à  $f_*$  lorsque  $f$  est projectif.*

En particulier, les catégories  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathrm{dR},X})$  fournissent une nouvelle définition des catégories des  $\mathcal{D}_{X/\kappa}$ -modules « géométriques » vérifiant un formalisme des six opérations de Grothendieck, même pour  $X$  singulier.

**Correspondance de Riemann-Hilbert.** Comme corollaire, on en déduit une correspondance de Riemann-Hilbert pour les objets « géométriques » des catégories dérivée bornées constructibles des faisceaux analytiques sur un  $\mathbf{C}$ -schéma quasi-projectif, lisse et des  $\mathcal{D}$ -modules réguliers holonomes sur  $X$ . Signalons deux nouveautés de ce résultat par rapport à la correspondance de Riemann-Hilbert classique : (i) une fois que l'on dispose d'un isomorphisme fonctoriel de comparaison entre la cohomologie de Betti à coefficients complexes et la cohomologie de De Rham algébrique, la preuve de cette correspondance est purement algébrique et ne dépend pas de la théorie des singularités régulières de P. Deligne ([Del70]) ; et (ii) quitte à prendre  $\mathcal{D}_{\mathbb{X}_0}^\infty(\mathcal{E}_{\mathrm{dR},X})$  comme définition de la catégorie dérivée bornée des  $\mathcal{D}_{X/\mathbf{C}}$ -modules holonomes géométriques pour  $X$  singulier, elle s'étend aussitôt aux  $\mathbf{C}$ -schémas singuliers.

**Corollaire 3.4.1.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{C}$ -schéma quasi-projectif, régulier. Il existe une équivalence de catégories triangulées, monoïdales symétriques*

$$\chi_{\text{RH}}^* : (\mathcal{D}_{\text{gm}}(X(\mathbf{C})^{\text{an}}, \mathbf{C}), \otimes_{\mathbf{C}}) \simeq (\mathcal{D}_{\text{gm}}(\mathcal{D}_{X/\mathbf{C}}), \otimes_X^*),$$

où  $\mathcal{D}_{\text{gm}}(X(\mathbf{C})^{\text{an}}, \mathbf{C}) \subseteq \mathcal{D}(X(\mathbf{C})^{\text{an}}, \mathbf{C})$  et  $\mathcal{D}_{\text{gm}}(\mathcal{D}_{X/\mathbf{C}}) \subseteq \mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{X/\mathbf{C}})$  désignent les sous-catégories triangulées épaisses engendrées par les objets de la forme  $\mathbf{R}f_* \mathbf{C}_{Y(\mathbf{C})^{\text{an}}}$  et  $f_* \mathbf{1}_Y^*$ , respectivement, avec  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de  $\mathbf{C}$ -schémas quasi-projectifs, réguliers. De plus, si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de  $\mathbf{C}$ -schémas quasi-projectifs, lisses, alors  $\chi_{\text{RH}}^*$  commute à  $f^*$ , à  $f_{\#}$  pour  $f$  lisse et à  $f_*$  pour  $f$  projectif.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma gratitude la plus profonde envers mon directeur de thèse, Frédéric Déglise, pour le sujet de thèse qu'il m'a proposé, pour le soutien qu'il m'a apporté et pour la gentillesse qu'il m'a témoignée. Je remercie également Denis-Charles Cisinski, qui a beaucoup influencé cette thèse, pour les discussions que l'on a eues et pour les remarques pertinentes qu'il m'a faites après sa relecture de ce texte. Je remercie aussi Marco Robalo de m'avoir expliqué patiemment des nuances de la théorie des  $(\infty, 1)$ -catégories et Shane Kelly pour de nombreuses discussions édifiantes.

## NOTATIONS ET CONVENTIONS

On fixera au fur et à mesure des hypothèses sur nos catégories de coefficients et des schémas. En général, ces hypothèses sont précisées au début de chaque numéro. On signale ici quelques notations et conventions générales que l'on utilisera tout au long du texte.

- On fixe une suite d'univers de Grothendieck  $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathfrak{U}_1 \subseteq \dots$  telle que  $\mathfrak{U}_0$  contienne les nombres naturels  $\mathbf{N}$ . Sauf mention expresse du contraire, on entend «  $\mathfrak{U}$ -petit ensemble » par « ensemble » et « petit ensemble » et l'on entend « localement  $\mathfrak{U}$ -petite catégorie » par « catégorie ». On note  $\mathbf{Set}$  et  $\mathbf{Ab}$  les catégories des  $\mathfrak{U}$ -petits ensembles et des  $\mathfrak{U}$ -petits groupes abéliens, respectivement, et l'on note  $\mathbf{Cat}$  la 2-catégorie des localement  $\mathfrak{U}$ -petites catégories.
- Par « catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles », on entend une catégorie de modèles  $\mathfrak{U}$ -bicomplète au sens de [Hov99, 1.1.4].
- Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie, alors on note  $\mathbf{ob}(\mathcal{C})$  et  $\mathbf{mor}(\mathcal{C})$  les classes des objets et des morphismes de  $\mathcal{C}$ , respectivement.
- Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie additive, alors on note  $\mathbf{Cplx}(\mathcal{A})$  la catégorie des complexes dans  $\mathcal{A}$ . Par convention, la différentielle d'un complexe dans  $\mathcal{A}$  est de degré  $+1$ . Si  $\mathcal{A}$  est abélienne, alors on note  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  sa catégorie dérivée. Si  $A \in \mathbf{ob}(\mathcal{A})$  et  $r \in \mathbf{Z}$ , alors on note  $A[r] \in \mathbf{ob}(\mathbf{Cplx}(\mathcal{A}))$  le complexe concentré en degré  $-r$  donné par  $A$ .
- On entend par «  $(\infty, 1)$ -catégorie » une quasi-catégorie. On renverra le lecteur à [Lur09a, Lur12] pour les résultats techniques sur les  $(\infty, 1)$ -catégories dont on aura besoin.
- Si  $\mathcal{C}$  est une  $(\infty, 1)$ -catégorie ou une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles, alors on notera  $\mathbf{ho}(\mathcal{C})$  sa catégorie homotopique.
- On note  $\Delta$  la catégorie des simplexes et, pour toute catégorie  $\mathcal{C}$ , on note  $\mathcal{C}_\Delta$  et  $\mathcal{C}^\Delta$  les catégories des objets simpliciaux et cosimpliciaux de  $\mathcal{C}$ , respectivement.
- Si  $\lambda$  est un  $\mathfrak{U}$ -petit cardinal régulier et que  $\mathcal{C}$  est une catégorie dans laquelle les  $\mathfrak{U}$ -petites colimites  $\lambda$ -filtrantes sont représentables, on note  $\mathcal{C}_\lambda \subseteq \mathcal{C}$  la sous-catégorie pleine engendrée par les objets  $\lambda$ -présentables. Plus généralement, si  $\mathcal{C}$  est une  $(\infty, 1)$ -catégorie dans laquelle les  $\mathfrak{U}$ -petites  $(\infty, 1)$ -colimites  $\lambda$ -filtrantes sont représentables, on note  $\mathcal{C}_\lambda \subseteq \mathcal{C}$  la sous- $(\infty, 1)$ -catégorie pleine engendrée par les objets  $\lambda$ -présentables au sens des  $(\infty, 1)$ -catégories ([Lur09a, 5.3.4.5]).
- Lorsque  $\mathcal{C}$  est une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles stable ou une  $(\infty, 1)$ -catégorie stable dans laquelle les  $\mathfrak{U}$ -petites  $(\infty, 1)$ -colimites  $\lambda$ -filtrantes sont représentables, on notera abusivement  $\mathbf{ho}(\mathcal{C})_\lambda$  la sous-catégorie pleine engendrée par les objets homotopiquement  $\lambda$ -présentables.
- Si  $\mathcal{C}$  est une  $\mathfrak{U}$ -petite catégorie ou  $(\infty, 1)$ -catégorie, alors on note  $\mathbf{Ind}(\mathcal{C})$  la localement  $\mathfrak{U}$ -petite catégorie ou  $(\infty, 1)$ -catégorie, respectivement, des ind-objets de  $\mathcal{C}$  ([Lur09a, 5.3.5.1]).
- Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie triangulée munie d'une  $\mathfrak{t}$ -structure  $(\mathcal{C}^{\leq 0}, \mathcal{C}^{\geq 0})$ , alors on note  $\mathcal{C}^\heartsuit := \mathcal{C}^{\leq 0} \cap \mathcal{C}^{\geq 0}$  son cœur et, pour tout  $r \in \mathbf{Z}$ ,  $\mathfrak{t}^{\leq r} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\leq r}$  et  $\mathfrak{t}^{\geq r} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\geq r}$  les foncteurs de troncation et  $\mathfrak{h}^r := \mathfrak{t}^{\leq r} \circ \mathfrak{t}^{\geq r} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\heartsuit$  le foncteur cohomologique induit.
- Sauf mention expresse du contraire, si  $\mathcal{A}$  est une catégorie abélienne, alors on munit sa catégorie dérivée  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  de la  $\mathfrak{t}$ -structure *naturelle* donnée par les sous-catégories pleines

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0}(\mathcal{A}) &:= \{K \in \mathbf{ob}(\mathcal{D}(\mathcal{A})) \mid \forall r > 0 [\mathfrak{h}^r K = 0]\} \\ \text{et } \mathcal{D}^{\geq 0}(\mathcal{A}) &:= \{K \in \mathbf{ob}(\mathcal{D}(\mathcal{A})) \mid \forall r < 0 [\mathfrak{h}^r K = 0]\}, \end{aligned}$$

où  $\mathfrak{h}^r K \in \mathbf{ob}(\mathcal{A})$  désigne le  $r$ -ième objet de cohomologie du complexe  $K$ . On notera  $\mathfrak{t}^{\leq r}$  et  $\mathfrak{t}^{\geq r}$  les foncteurs de troncation associées.

# 1 HOMOTOPIE MOTIVIQUE STABLE ENRICHIE

*Résumé.* Dans ce chapitre, on rappelle quelques résultats sur la théorie des catégories de modèles enrichies ; on fournit des énoncés précis de certains résultats implicites dans [Ayo07a, Ayo07b] ; et l'on établit l'axiome du monoïde dans certaines catégories de spectres symétriques dans une généralité suffisante pour les applications envisagées dans la suite.

*Notation 1.0.0.* Dans ce chapitre,  $(\mathcal{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  désigne une localement  $\mathcal{U}$ -petite catégorie monoïdale symétrique fermée,  $\mathcal{U}$ -bicomplète.

## 1.0 CATÉGORIES TANNAKIENNES

*Résumé.* Bien que la plupart des résultats de ce chapitre soient des manifestations de phénomènes plus généraux, on présente dans ce numéro la classe des catégories sur lesquelles les données des chapitres suivants seront enrichies, à savoir les catégories des complexes de ind-objets dans certaines  $\mathcal{U}$ -petites catégories tannakiennes. On les introduit ici pour deux raisons : (i) afin de servir comme cas d'exemple dans la suite du chapitre et (ii) afin de pouvoir établir certains résultats techniques que l'auteur ne sait pas démontrer dans une généralité satisfaisante, notamment 1.3.18.

*Plan.* On commence par rappeler la définition d'une catégorie tannakienne (1.0.2). Dans 1.0.7, on construira une structure de  $\mathcal{U}$ -modèles sur la catégorie des complexes de ind-objets d'une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne et l'on montrera qu'elle est compatible à la structure monoïdale sur cette catégorie, de sorte que l'on puisse munir la catégorie dérivée d'une structure monoïdale symétrique.

Si l'on interprète la notion d'une catégorie tannakienne comme une généralisation de celle d'une catégorie de représentations de dimension finie d'un groupe algébrique, alors 1.0.6 et 1.0.8 généralisent les foncteurs qui associent à une représentation de dimension finie son espace vectoriel sous-jacent et à un espace vectoriel de dimension finie la représentation triviale, respectivement. On se servira de ces constructions à maintes reprises dans la suite, car elles nous permettront de déduire grand nombre de propriétés des catégories de préfaisceaux et de spectres symétriques à coefficients dans une catégorie tannakienne  $\mathcal{T}$  du cas où  $\mathcal{T}$  est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle.

On termine ce numéro en montrant que, si une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne vérifie une condition de finitude (1.0.3), alors la catégorie homotopique de la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles de 1.0.7 admet une famille génératrice d'objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables et homotopiquement fortement dualisables. En particulier, on verra dans 1.0.14 qu'il s'agit d'une catégorie de coefficients au sens de [Ayo07b, 4.4.23] et que l'on peut donc appliquer librement les résultats de [Ayo07b] dans la construction d'une catégorie homotopique stable à coefficients dans une telle catégorie tannakienne.

**Définition 1.0.1.** Soit  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie monoïdale symétrique. Un objet  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$  est dit **fortement dualisable** s'il existe un objet  $X^{\vee} \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et deux morphismes  $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow X^{\vee} \otimes_{\mathcal{C}} X$  et  $\varepsilon : X \otimes_{\mathcal{C}} X^{\vee} \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$  tels que  $(\varepsilon \otimes_{\mathcal{C}} \text{id}_X)(\text{id}_X \otimes_{\mathcal{C}} \eta) = \text{id}_X$  et  $(\text{id}_{X^{\vee}} \otimes_{\mathcal{C}} \varepsilon)(\eta \otimes_{\mathcal{C}} \text{id}_{X^{\vee}}) = \text{id}_{X^{\vee}}$ . Autrement dit,  $X$  est fortement dualisable s'il existe un objet  $X^{\vee}$  tel que l'endofoncteur  $X^{\vee} \otimes_{\mathcal{C}} (-)$  soit adjoint à droite de  $(-)\otimes_{\mathcal{C}} X$ . Si  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  est une catégorie monoïdale symétrique fermée, alors  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$  est fortement dualisable si et seulement si le morphisme canonique

$$\underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{C}} Y \rightarrow \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

est un isomorphisme pour tout  $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ .

**Définition 1.0.2.** Une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie monoïdale symétrique fermée  $(\mathcal{T}, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  est dite **tannakienne** si elle vérifie les conditions suivantes :

- (i) la catégorie  $\mathcal{T}$  est abélienne ;
- (ii) le produit tensoriel  $\otimes_{\mathcal{T}}$  est exact en chaque variable ;
- (iii)  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  est un corps de caractéristique nulle ;
- (iv) tout objet de  $\mathcal{T}$  est fortement dualisable ;
- (v) pour tout  $V \in \text{ob}(\mathcal{T})$ , le composé  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}} \rightarrow V \otimes_{\mathcal{T}} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}(V, \mathbf{1}_{\mathcal{T}}) \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{T}}$  des morphismes de coévaluation et d'évaluation est un entier positif sous l'identification de  $\mathbf{Z}$  à son image dans le corps de caractéristique nulle  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$ .

Cette définition est plus restrictive que la définition classique [SR72, III, 3.2.1], mais les deux sont équivalentes en caractéristique nulle d'après [Del90, 7.1].

**Définition 1.0.3.** On dira qu'une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne  $(\mathcal{T}, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  est de **Ext-dimension**  $\leq d_{\mathcal{T}}$  si elle vérifie la condition suivante.

(Ext) Il existe  $d_{\mathcal{T}} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  tel que  $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^n(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, V) = 0$  pour tous  $V \in \text{ob}(\mathcal{T})$ ,  $n > d_{\mathcal{T}}$ .

Grâce aux résultats de [Hub93, §2], on peut vérifier que (Ext) implique que  $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^n(V, W) = 0$  pour tous  $V, W \in \text{ob}(\mathcal{T})$ ,  $n > d_{\mathcal{T}}$ .

*Remarque 1.0.4.*

(i) Soit  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}_0}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}_0}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}_0})$  une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne. Alors la catégorie  $\mathcal{T} := \text{Ind}(\mathcal{T}_0)$  des ind-objets de  $\mathcal{T}_0$  est abélienne de  $\mathcal{U}$ -Grothendieck<sup>1</sup>. Le produit tensoriel  $\otimes_{\mathcal{T}}$  induit un bifoncteur  $\otimes_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  qui préserve les limites finies et les  $\mathcal{U}$ -petites colimites en chaque variable d'après [SGA72, Exposé I, 8.9.8]. De même, le bifoncteur  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}$  s'étend en un bifoncteur  $\mathcal{T}^{\text{op}} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  et l'on peut vérifier que l'on obtient ainsi une catégorie abélienne de  $\mathcal{U}$ -Grothendieck, monoïdale symétrique fermée  $(\mathcal{T}, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$ .

(ii) La structure monoïdale symétrique fermée de (i) sur  $\mathcal{T} = \text{Ind}(\mathcal{T}_0)$  induit une structure monoïdale symétrique fermée sur la catégorie  $\text{Cplx}(\mathcal{T})$  des complexes dans  $\mathcal{T}$ . D'ailleurs,  $\text{Cplx}(\mathcal{T})$  est une catégorie abélienne de  $\mathcal{U}$ -Grothendieck et, par conséquent, admet une structure de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{U}$ -tractable au sens de 1.2.5, dont les cofibrations et les équivalences faibles sont les monomorphismes et les quasi-isomorphismes, respectivement. C'est la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles de [Bek00, 3.13]. On l'appellera **structure de  $\mathcal{U}$ -modèles injective** et on la notera  $\text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$ . On remarque en particulier que la catégorie homotopique  $\text{ho}(\text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})$  n'est autre que la catégorie dérivée  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ . En particulier, on peut vérifier facilement que cette structure de  $\mathcal{U}$ -modèles est stable. Elle est d'ailleurs propre d'après [CD09, 2.1].

**Lemme 1.0.5.** Soit  $\kappa$  un  $\mathcal{U}$ -corps. Alors la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles injective sur  $\text{Cplx}(\text{Mod}(\kappa))$  est monoïdale symétrique au sens de [Hov99, 4.2.6].

*Démonstration.* D'après [Hov99, 4.2.13], la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles projective de [Hov99, 2.3.11], dont les équivalences faibles et les fibrations sont les quasi-isomorphismes et les épimorphismes, respectivement, est monoïdale symétrique. Montrons que cette structure de

1. Une localement  $\mathcal{U}$ -petite catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  est dite **de  $\mathcal{U}$ -Grothendieck** si elle est une catégorie  $\mathcal{U}$ -cocomplète admettant un générateur telle que les  $\mathcal{U}$ -petites colimites filtrantes dans  $\mathcal{A}$  préservent les limites finies. D'après [Bek00, 3.10], une telle catégorie est localement  $\mathcal{U}$ -présentable (1.2.4).

$\mathcal{U}$ -modèles s'identifie à la structure injective de 1.0.4(ii). À cette fin, on compare les deux structures à une structure intermédiaire.

Tout quasi-isomorphisme de  $\text{Cplx}(\text{Mod}(\kappa))$  est une équivalence d'homotopie de chaînes puisque  $\text{Mod}(\kappa)$  est abélienne semi-simple. La catégorie  $\text{Cplx}(\text{Mod}(\kappa))$  admet une structure de catégorie de Frobenius dont les monomorphismes admissibles et les épimorphismes admissibles sont les monomorphismes et les épimorphismes, respectivement, et dont la classe des objets projectifs ou, de manière équivalente, injectifs, est la classe des complexes contractiles. On remarque d'ailleurs que les monomorphismes et les épimorphismes dans  $\text{Cplx}(\text{Mod}(\kappa))$  se scindent. D'après [Cis10, 4.13, 5.3], cette catégorie de Frobenius admet une structure de  $\mathcal{U}$ -modèles dont les cofibrations sont les monomorphismes, dont les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopie de chaînes ou, de manière équivalente, les quasi-isomorphismes et dont les fibrations sont les épimorphismes. Il suffit donc de remarquer que cette structure de  $\mathcal{U}$ -modèles a les mêmes cofibrations et les mêmes équivalences faibles que la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles injective et les mêmes équivalences faibles et les mêmes fibrations que la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles projective. Par conséquent, les trois structures sont égales.  $\square$

**Lemme 1.0.6.** *Soit  $\mathbf{K}$  un corps de caractéristique nulle,  $f : \mathcal{T}_0 \rightarrow \mathcal{T}'_0$  un foncteur  $\mathbf{K}$ -linéaire, exact et monoïdal symétrique fort entre deux  $\mathcal{U}$ -petites catégories tannakiennes  $\mathbf{K}$ -linéaires. Alors  $f$  induit un foncteur monoïdal symétrique fort et fidèle  $\text{Cplx}(\text{Ind}(f)) : \text{Cplx}(\text{Ind}(\mathcal{T}_0)) \rightarrow \text{Cplx}(\text{Ind}(\mathcal{T}'_0))$  qui commute aux  $\mathcal{U}$ -petites colimites et aux limites finies. De plus, le foncteur induit  $f : \mathcal{D}(\text{Ind}(\mathcal{T}_0)) \rightarrow \mathcal{D}(\text{Ind}(\mathcal{T}'_0))$  est conservatif.*

*Démonstration.* D'après [DM89, 1.19],  $f$  est fidèle. D'après [SGA72, Exposé I, 8.6.1], la construction  $\text{Ind}(-)$  est fonctorielle. De plus, il est clair que cette construction respecte la  $\mathbf{K}$ -linéarité. D'après [SGA72, Exposé I, 8.6.4],  $\text{Ind}(f)$  est fidèle. D'après [SGA72, Exposé I, 8.9.8], ce foncteur préserve les  $\mathcal{U}$ -petites colimites et les limites finies. On vérifie aisément que  $\text{Ind}(f)$  est monoïdal symétrique fort. Il est évident que  $\text{Cplx}(\text{Ind}(f))$  hérite de chacune de ces propriétés de  $\text{Ind}(f)$ . En particulier,  $\text{Cplx}(\text{Ind}(f))$  préserve les quasi-isomorphismes et se dérive donc trivialement. Il reste à montrer que  $f : \mathcal{D}(\text{Ind}(\mathcal{T}_0)) \rightarrow \mathcal{D}(\text{Ind}(\mathcal{T}'_0))$  est conservatif. Pour cela, il suffit de montrer que  $fM = 0$  entraîne que  $M = 0$  pour tout  $M \in \text{ob}(\mathcal{D}(\text{Ind}(\mathcal{T}_0)))$ , parce que les catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\text{Cplx}(\text{Ind}(\mathcal{T}_0))_{\text{inj}}$  et  $\text{Cplx}(\text{Ind}(\mathcal{T}'_0))_{\text{inj}}$  sont stables et  $f$  est un foncteur triangulé. Un foncteur exact entre deux catégories abéliennes induit un foncteur  $\mathfrak{t}$ -exact par rapport aux  $\mathfrak{t}$ -structures naturelles entre les catégories dérivées associées. Sachant que la  $\mathfrak{t}$ -structure naturelle sur la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne est non dégénérée, on peut supposer que  $M \in \text{ob}(\mathcal{D}(\text{Ind}(\mathcal{T}_0))^{\heartsuit})$ . Dans ce cas, on peut supposer que  $M$  est un complexe concentré en un seul degré, donné par un objet de  $\text{Ind}(\mathcal{T}_0)$ . Comme  $\text{Ind}(f)$  est fidèle, on a

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_{\mathcal{D}(\text{Ind}(\mathcal{T}_0))}(M, M) & \xrightarrow{\sim} & \text{hom}_{\text{Ind}(\mathcal{T}_0)}(M, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{hom}_{\mathcal{D}(\text{Ind}(\mathcal{T}'_0))}(fM, fM) & \xrightarrow{\sim} & \text{hom}_{\text{Ind}(\mathcal{T}'_0)}(\text{Ind}(f)M, \text{Ind}(f)M) \end{array}$$

et donc  $M = 0$  dans  $\mathcal{D}(\text{Ind}(\mathcal{T}_0))$  si  $fM = 0$  dans  $\mathcal{D}(\text{Ind}(\mathcal{T}'_0))$ .  $\square$

**Proposition 1.0.7.** *Soient  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne et  $\mathcal{T} := \text{Ind}(\mathcal{T}_0)$ . Munie de la structure monoïdale symétrique fermée de 1.0.4(ii) et de la structure de*

$\mathcal{U}$ -modèles injective,  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})$  est une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathcal{U}$ -tractable, stable et propre à gauche qui vérifie l'axiome du monoïde <sup>2</sup>.

*Démonstration.* Grâce aux remarques de 1.0.4(ii), il ne reste qu'à justifier les assertions concernant la structure monoïdale. D'après [Del90, 7.1], il existe une extension éventuellement infinie de corps  $\mathbf{K} := \text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}}) \rightarrow \mathbf{K}'$  et un foncteur  $\mathbf{K}$ -linéaire, exact et monoïdal symétrique fort  $\omega : \mathcal{T}_0 \rightarrow \text{Mod}_{\mathfrak{X}_0}(\mathbf{K}')$  qui est forcément fidèle d'après [DM89, 1.19]. On rappelle que  $\text{Mod}_{\mathfrak{X}_0}(\mathbf{K}')$  désigne la sous-catégorie engendrée par les objets  $\mathfrak{X}_0$ -présentables. D'après 1.0.6,  $\omega$  induit un foncteur  $\mathbf{K}$ -linéaire, exact, monoïdal symétrique fort et fidèle  $\omega : \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))$ . Soient  $a : A \rightarrow A'$  et  $b : B \rightarrow B'$  deux cofibrations de  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$ , c'est-à-dire deux monomorphismes. On obtient un diagramme commutatif, que l'on appelle « diagramme du pushout-produit de  $a$  et  $b$  »,

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes_{\mathcal{T}} B & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & A \otimes_{\mathcal{T}} B' \\
 a \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow \\
 A' \otimes_{\mathcal{T}} B & \xrightarrow{\quad} & A' \otimes_{\mathcal{T}} B \amalg_{A \otimes_{\mathcal{T}} B} A \otimes_{\mathcal{T}} B' \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & A' \otimes_{\mathcal{T}} B'
 \end{array}$$

$\text{id} \otimes b$  (arrow from  $A' \otimes_{\mathcal{T}} B$  to  $A' \otimes_{\mathcal{T}} B'$ )  
 $a \otimes \text{id}$  (arrow from  $A \otimes_{\mathcal{T}} B'$  to  $A' \otimes_{\mathcal{T}} B'$ )

dans lequel le carré est cocartésien. En appliquant  $\omega$  à ce diagramme et en remarquant que  $\omega$  préserve les produits tensoriels et les colimites finies, on obtient le diagramme du pushout-produit de  $\omega(a)$  et  $\omega(b)$  dans  $\mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))$ . Comme  $\omega$  préserve les monomorphismes,  $\omega(a)$  et  $\omega(b)$  sont des cofibrations de  $\mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))_{\text{inj}}$ . Le morphisme  $\omega(a \amalg_{A \otimes_{\mathcal{T}} B} b)$  s'identifie à

$$\omega(a) \amalg_{\omega(A) \otimes_{\mathbf{K}'} \omega(B)} \omega(b) : (\omega(A') \otimes_{\mathbf{K}'} \omega(B)) \amalg_{\omega(A) \otimes_{\mathbf{K}'} \omega(B)} (\omega(A) \otimes_{\mathbf{K}'} \omega(B')) \rightarrow \omega(A') \otimes_{\mathbf{K}'} \omega(B')$$

qui est un monomorphisme d'après 1.0.5. Or un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est un monomorphisme si et seulement si le carré

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xlongequal{\quad} & X \\
 \parallel & & \downarrow f \\
 X & \xrightarrow{\quad} & Y
 \end{array}$$

est cartésien. Comme  $\omega$  est fidèle et exact, il est conservatif. Un foncteur conservatif détecte les limites représentables qu'il préserve et il s'ensuit que

$$a \amalg_{A \otimes_{\mathcal{T}} B} b : (A' \otimes_{\mathcal{T}} B) \amalg_{A \otimes_{\mathcal{T}} B} (A \otimes_{\mathcal{T}} B') \rightarrow A' \otimes_{\mathcal{T}} B'$$

est un monomorphisme, c'est-à-dire une cofibration de  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$ . Si l'on suppose de plus que  $a$  ou  $b$  est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire une cofibration triviale, alors  $a \amalg_{A \otimes_{\mathcal{T}} B} b$  est un quasi-isomorphisme parce que le foncteur fidèle et exact  $\omega$  détecte les quasi-isomorphismes et, encore une fois, parce que la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles projective sur  $\mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))$  est monoïdale symétrique. Enfin, l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}$ , comme tout objet de  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})$ , est injectivement cofibrant et l'on conclut que  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$  est une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique. L'axiome du monoïde est satisfait grâce à 1.2.10(ii).  $\square$

2. On renvoie à 1.2.9 pour une discussion de cet axiome.

**Lemme 1.0.8.** Soient  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne,  $\mathcal{T} := \text{Ind}(\mathcal{T}_0)$  et  $\mathbf{K}$  le corps de caractéristique nulle  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$ . Alors il existe un foncteur  $\mathbf{K}$ -linéaire, monoïdal symétrique fort canonique  $\text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K})) \rightarrow \text{Cplx}(\mathcal{T})$  et ce foncteur est de Quillen à gauche par rapport aux structures de  $\mathcal{U}$ -modèles injectives sur la source et le but.

*Démonstration.* D'après [Del90, 1.12],  $\mathcal{T}_0$  est équivalente à la catégorie  $\text{QCoh}(\mathcal{G})^{\vee}$  des faisceaux quasi-cohérents, localement libres de rang fini sur une gerbe affine  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{CAlg}(\mathbf{K})_{\text{fpqc}}^{\text{op}}$ . De même, on peut identifier  $\text{Mod}(\mathbf{K})$  à la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur  $\text{Spec}(\mathbf{K})$  ou, de manière équivalente, sur la gerbe affine triviale sur  $\mathcal{CAlg}(\mathbf{k})_{\text{fpqc}}^{\text{op}}$ . On dispose du foncteur monoïdal symétrique fort d'image inverse par le morphisme canonique  $\mathcal{G} \rightarrow 1$ , où 1 désigne la fpqc-gerbe triviale sur  $\mathcal{CAlg}(\mathbf{K})^{\text{op}}$ , qui correspond alors à un foncteur  $\text{Mod}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathcal{T}_0$ . On peut reformuler la situation de la façon suivante. La catégorie  $\text{Mod}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{K})$  des  $\mathbf{K}$ -modules de type fini est canoniquement équivalente à la catégorie des foncteurs cartésiens  $1 \rightarrow \text{Mod}(-)^{\vee}$ , où  $\text{Mod}(A)^{\vee}$  désigne la catégorie des  $A$ -modules fortement dualisables, où  $A$  est une  $\mathbf{K}$ -algèbre commutative de type fini. La catégorie  $\mathcal{T}_0$  est canoniquement équivalente à la catégorie de foncteurs cartésiens  $\mathcal{G} \rightarrow \text{Mod}(-)^{\vee}$ . Le foncteur  $\text{Mod}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathcal{T}_0$  est le foncteur de pré-composition avec  $\mathcal{G} \rightarrow 1$ . Ce foncteur est exact puisque toute suite exacte courte dans  $\text{Mod}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{K})$  se scinde et l'assertion en résulte après passage aux complexes dans les catégories des ind-objets.  $\square$

*Remarque 1.0.9.* Soient  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne neutralisable,  $\mathbf{K} = \text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  et  $\omega : \mathcal{T}_0 \rightarrow \text{Mod}(\mathbf{K})$  un foncteur exact et monoïdal symétrique fort. Alors  $\mathcal{T}_0$  est équivalente à la catégorie des représentations de dimension finie de  $\text{aut}(\omega)$  dans  $\text{Mod}(\mathbf{K})$  et le foncteur de Quillen à gauche de 1.0.8 associe à un complexe de  $\mathbf{K}$ -modules le même complexe de  $\mathbf{K}$ -modules muni de l'action triviale de  $\text{aut}(\omega)$  en chaque degré. L'adjoint à droite de ce foncteur est le foncteur des  $\text{aut}(\omega)$ -invariants.

**Lemme 1.0.10.** Soient  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne et  $\mathcal{T} := \text{Ind}(\mathcal{T}_0)$ . Si  $\mathcal{T}_0$  est de Ext-dimension  $\leq d_{\mathcal{T}} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , alors, pour tous  $V \in \text{ob}(\mathcal{T})$  et  $n > d_{\mathcal{T}}$ , on a  $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^n(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, V) = 0$ .

*Démonstration.* D'après [LV06, 6.34],  $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^n(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, -) : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  préserve les  $\mathcal{U}$ -petites colimites filtrantes pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ . Par définition de  $\mathcal{T} = \text{Ind}(\mathcal{T}_0)$ , on peut écrire  $V \cong \text{colim}_{\alpha \in A} V_{\alpha}$  avec  $A$  une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie filtrante et  $V_{\alpha} \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$  pour tout  $\alpha \in A$ . Par suite, pour tout  $n > d_{\mathcal{T}}$ , on a

$$\text{Ext}_{\mathcal{T}}^n(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, V) \cong \text{Ext}_{\mathcal{T}}^n(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \text{colim}_{\alpha \in A} V_{\alpha}) \cong \text{colim}_{\alpha \in A} \text{Ext}_{\mathcal{T}}^n(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, V_{\alpha}) = 0$$

puisque  $\mathcal{T}_0$  est supposé de Ext-dimension  $\leq d_{\mathcal{T}}$ .  $\square$

**Proposition 1.0.11.** Soit  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne de Ext-dimension  $\leq d_{\mathcal{T}} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  et  $\mathcal{T} := \text{Ind}(\mathcal{T}_0)$ . Alors l'objet  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}} \in \text{ob}(\text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})$  est homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentable.

*Démonstration.* Il faut montrer que le morphisme canonique

$$(1.0.11.1) \quad \text{Lcolim}_{\alpha \in A} \text{Rhom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, K_{\alpha}) \rightarrow \text{Rhom}_{\mathcal{T}}\left(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \text{Lcolim}_{\alpha \in A} K_{\alpha}\right)$$

est un quasi-isomorphisme pour tout  $\mathcal{U}$ -petit diagramme filtrant  $\alpha \mapsto K_{\alpha} : A \rightarrow \text{Cplx}(\mathcal{T})$ . D'après 1.0.10, le foncteur additif et exact à gauche  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, -) : \mathcal{T} \rightarrow \text{Ab}$  vérifie les

hypothèses de [SV00, 0.3]. Il en résulte que les suites spectrales

$$\begin{aligned} E_2^{r,s} &= \mathfrak{h}^s \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathfrak{h}^r \mathbf{L}colim_{\alpha \in A} K_{\alpha} \right) \implies \mathfrak{h}^{r+s} \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{L}colim_{\alpha \in A} K_{\alpha} \right) \\ (E_{\alpha})_2^{r,s} &= \mathfrak{h}^s \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathfrak{h}^r K_{\alpha} \right) \implies \mathfrak{h}^{r+s} \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, K_{\alpha} \right) \end{aligned}$$

sont fortement convergentes pour tout  $\alpha \in A$ . De plus, comme les  $\mathfrak{U}$ -petites colimites filtrantes dans  $\mathcal{T}$  sont exactes, on a  $\mathbf{colim}_{\alpha \in A} K_{\alpha} \cong \mathbf{L}colim_{\alpha \in A} K_{\alpha}$  dans  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ , d'où

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}^s \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathfrak{h}^r \mathbf{L}colim_{\alpha \in A} K_{\alpha} \right) &\cong \mathfrak{h}^s \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{colim}_{\alpha \in A} \mathfrak{h}^r K_{\alpha} \right) \\ &\cong \mathbf{Ext}_{\mathcal{T}}^s \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{colim}_{\alpha \in A} \mathfrak{h}^r K_{\alpha} \right) \\ &\cong \mathbf{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{Ext}_{\mathcal{T}}^s \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathfrak{h}^r K_{\alpha} \right) \\ &\cong \mathbf{colim}_{\alpha \in A} \mathfrak{h}^s \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathfrak{h}^r K_{\alpha} \right) \end{aligned}$$

grâce à 1.0.10. On a donc un isomorphisme entre la page  $E_2$  et la colimite  $\mathbf{colim}_{\alpha \in A} (E_{\alpha})_2$  des pages  $(E_{\alpha})_2$ . On en déduit un isomorphisme entre les aboutissements

$$\mathbf{colim}_{\alpha \in A} \mathfrak{h}^{r+s} \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, K_{\alpha} \right) \simeq \mathfrak{h}^{r+s} \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{L}colim_{\alpha \in A} K_{\alpha} \right).$$

Quitte à choisir une construction fonctorielle des colimites indexées par  $A$ , le foncteur exact  $\mathbf{colim}_{\alpha \in A} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  induit un foncteur  $\mathfrak{t}$ -exact  $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{T})$ , de sorte que

$$\mathbf{colim}_{\alpha \in A} \mathfrak{h}^{r+s} \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, K_{\alpha} \right) \cong \mathfrak{h}^{r+s} \mathbf{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, K_{\alpha} \right).$$

Par conséquent, le morphisme (1.0.11.1) est un quasi-isomorphisme.  $\square$

**Corollaire 1.0.12.** Soient  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\mathbf{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  une  $\mathfrak{U}$ -petite catégorie tannakienne de Ext-dimension  $\leq d_{\mathcal{T}} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  et  $\mathcal{T} := \mathbf{Jnd}(\mathcal{T}_0)$ .

- (i) La classe  $\mathcal{G} := \{V[n] \mid V \in \mathbf{ob}(\mathcal{T}_0), n \in \mathbf{Z}\} \subseteq \mathbf{ob}(\mathbf{Cplx}(\mathcal{T}))$  est une  $\mathfrak{U}$ -petite famille génératrice et homotopiquement génératrice d'objets cofibrants,  $\mathfrak{K}_0$ -présentables, homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentables, fortement dualisables et homotopiquement fortement dualisables.
- (ii) Un objet de  $\mathbf{Cplx}(\mathbf{Jnd}(\mathcal{T}_0))_{\mathbf{inj}}$  est homotopiquement fortement dualisable si et seulement s'il est homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentable.

*Démonstration.*

(i) Par définition de  $\mathbf{Jnd}(\mathcal{T}_0)$ ,  $\mathbf{ob}(\mathcal{T}_0) \subseteq \mathbf{ob}(\mathcal{T})$  est une  $\mathfrak{U}$ -petite famille génératrice formée d'objets  $\mathfrak{K}_0$ -présentables. On en déduit aisément que  $\mathcal{G}$  engendre  $\mathbf{Cplx}(\mathcal{T})$  et que ses éléments sont  $\mathfrak{K}_0$ -présentables. La  $\mathfrak{t}$ -structure naturelle sur  $\mathcal{D}(\mathbf{Jnd}(\mathcal{T}))$  est non dégénérée et il en résulte que  $\mathcal{G}$  est aussi homotopiquement génératrice. De plus, le foncteur  $\mathcal{T}_0 \rightarrow \mathcal{T}$  étant monoïdal symétrique fort et les objets de  $\mathcal{T}_0$  étant fortement dualisables, on voit que les éléments de  $\mathcal{G}$  sont fortement dualisables dans  $\mathbf{Cplx}(\mathcal{T})$ . Par définition de la structure de  $\mathfrak{U}$ -modèles injective, tout objet de  $\mathbf{Cplx}(\mathcal{T})$  est cofibrant. Cela entraîne que les éléments de  $\mathcal{G}$  sont homotopiquement fortement dualisables :  $V[n] \otimes_{\mathcal{T}} W[m] \cong V[n] \otimes_{\mathcal{T}}^L W[m]$  dans  $\mathcal{D}(\mathbf{Jnd}(\mathcal{T}))$ , de sorte que le dual fort dans  $\mathbf{Cplx}(\mathcal{T})$  d'un complexe dans  $\mathcal{T}$  est également un dual fort dans  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ , munie du produit tensoriel  $\otimes_{\mathcal{T}}^L$ . Autrement dit, le foncteur de localisation  $\mathbf{Cplx}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{T})$  est monoïdal symétrique fort et préserve donc les objets

fortement dualisables. D'après 1.0.11,  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}$  est homotopiquement  $\aleph_0$ -présentable et il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \mathrm{Rhom}_{\mathcal{T}} \left( V[n], \mathrm{Lcolim}_{\alpha \in A} K_{\alpha} \right) &= \mathrm{Rhom}_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, (V[n])^{\vee} \otimes_{\mathcal{T}}^{\mathrm{L}} \mathrm{Lcolim}_{\alpha \in A} K_{\alpha} \right) \\ &= \mathrm{Rhom}_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathrm{Lcolim}_{\alpha \in A} \left( (V[n])^{\vee} \otimes_{\mathcal{T}}^{\mathrm{L}} K_{\alpha} \right) \right) \\ &= \mathrm{Lcolim}_{\alpha \in A} \mathrm{Rhom}_{\mathcal{T}} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}}, (V[n])^{\vee} \otimes_{\mathcal{T}}^{\mathrm{L}} K_{\alpha} \right) \\ &= \mathrm{Lcolim}_{\alpha \in A} \mathrm{Rhom}_{\mathcal{T}} \left( V[n], K_{\alpha} \right) \end{aligned}$$

pour tout  $V[n] \in \mathcal{G}$  et pour tout  $\aleph$ -petit diagramme filtrant  $\alpha \mapsto K_{\alpha} : A \rightarrow \mathrm{Cplx}(\mathcal{T})$ .

(ii) En remplaçant  $V[n]$  dans la démonstration de (i) ci-dessus par un objet homotopiquement fortement dualisable quelconque, on voit que tout objet homotopiquement fortement dualisable est homotopiquement  $\aleph_0$ -présentable. Inversement, (i) montre que  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$  est engendrée par la famille  $\mathcal{G}$  d'objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables. D'après le théorème de Thomason [Nee01, 4.4.9], la sous-catégorie triangulée épaisse de  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$  engendrée par  $\mathcal{G}$  est donc la sous-catégorie pleine engendrée par les objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables. D'autre part, les objets homotopiquement fortement dualisables sont homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables. La sous-catégorie pleine de  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$  engendrée par les objets homotopiquement fortement dualisables est donc comprise entre ces deux sous-catégories égales et l'assertion en résulte.  $\square$

**Définition 1.0.13** ([Ayo07a, 4.4.23]). Rappelons que J. Ayoub appelle *catégorie de coefficients* une catégorie de  $\aleph$ -modèles  $\mathcal{M}$  vérifiant les conditions suivantes :

- (i) la catégorie de  $\aleph$ -modèles  $\mathcal{M}$  est propre à gauche, cofibrement engendrée et stable ;
- (ii) les équivalences faibles de  $\mathcal{M}$  sont stables par coproduits finis ;
- (iii) il existe une  $\aleph$ -petite famille  $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{ob}(\mathcal{M})$  homotopiquement génératrice formée d'objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables.

**Corollaire 1.0.14.** Soient  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  une  $\aleph$ -petite catégorie tannakienne de Ext-dimension  $\leq d_{\mathcal{T}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $\mathcal{T} := \mathrm{Ind}(\mathcal{T}_0)$ . La catégorie de  $\aleph$ -modèles  $\mathrm{Cplx}(\mathcal{T})_{\mathrm{inj}}$ , munie de la  $\aleph$ -petite classe  $\mathcal{G} := \{V[n] \mid V \in \mathrm{ob}(\mathcal{T}_0)\}$ , est une catégorie de coefficients.

*Démonstration.* La condition (i) (resp. (iii)) de 1.0.13 résulte de 1.0.7 (resp. 1.0.12(i)). Dans une catégorie abélienne, les coproduits finis préservent les limites finies et les colimites finies. Du coup, les coproduits finis préservent les quasi-isomorphismes et la condition (ii) de 1.0.13 est aussi satisfaite.  $\square$

*Remarque 1.0.15.* Soit  $(\mathcal{A}, \otimes_{\mathcal{A}}, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{A}}, \mathbf{1}_{\mathcal{A}})$  une catégorie abélienne, monoïdale symétrique  $\mathbf{K}$ -linéaire, où  $\mathbf{K}$  est un corps. On appelle *foncteur fibre* de  $\mathcal{A}$  tout foncteur monoïdal symétrique,  $\mathbf{K}$ -linéaire, exact et fidèle de la forme  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathrm{Mod}(A)$ , où  $A$  est un anneau commutatif unitaire, à valeurs dans la sous-catégorie pleine  $\mathrm{Mod}(A)^{\vee} \subseteq \mathrm{Mod}(A)$  engendrée par les modules projectifs de présentation finie. Comme on l'a déjà remarqué dans la démonstration de 1.0.7, si  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  est une  $\aleph$ -petite catégorie tannakienne, alors il existe un foncteur fibre de la forme  $\omega : \mathcal{T}_0 \rightarrow \mathrm{Mod}(\mathbf{K}')$  pour une certaine extension  $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}}) := \mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{K}'$ . D'après la démonstration de 1.0.6, ce foncteur induit un foncteur  $\omega : \mathrm{Ind}(\mathcal{T}_0) \rightarrow \mathrm{Mod}(\mathbf{K}')$  qui est également exact, fidèle et monoïdal symétrique fort et qui préserve les  $\aleph$ -petites colimites.

On remarque que ce foncteur  $\omega : \text{Ind}(\mathcal{T}_0) \rightarrow \text{Mod}(\mathbf{K}')$  ne préserve pas les  $\mathfrak{U}$ -petites limites en général. En effet, si  $\omega$  préserve les  $\mathfrak{U}$ -petites limites, alors il est adjoint à droite d'après le théorème du foncteur adjoint pour les catégories localement  $\mathfrak{U}$ -présentables. Dans ce cas, si  $\psi$  désigne l'adjoint à gauche de  $\omega$ , alors  $\psi$  préserve les objets  $\aleph_0$ -présentables car  $\omega$  préserve les colimites. On en déduit que l'image du  $\mathbf{K}'$ -espace vectoriel unité  $\mathbf{1}_{\mathbf{K}'}$  est un objet projectif et  $\aleph_0$ -présentable, puisqu'un foncteur dont l'adjoint à droite est exact préserve les objets projectifs. Or les objets  $\aleph_0$ -présentables de  $\text{Ind}(\mathcal{T}_0)$  sont les objets de l'image essentielle du plongement canonique  $\mathcal{T}_0 \hookrightarrow \mathcal{T}$  et  $\psi \mathbf{1}_{\mathbf{K}'}$  est donc un objet projectif de  $\mathcal{T}_0$ . En revanche, la catégorie des structures de Hodge mixtes est une catégorie tannakienne sans objet projectif non nul.

## 1.1 PRÉFAISCEAUX

*Résumé.* Dans ce numéro, on rappelle quelques définitions et résultats fondamentaux de la théorie des catégories enrichies glanés de [Kel05]. On ne prétend à aucune originalité.

*Plan.* On commence par rappeler la définition d'une catégorie enrichie sur une catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{V}$  (1.1.1) et de quelques constructions élémentaires, telles que le plongement de  $\mathcal{V}$ -Yoneda et la  $\mathcal{V}$ -catégorie libre associée à une catégorie (1.1.2). On rappelle également la notion de catégories tensorisées et cotensorisées sur  $\mathcal{V}$  (1.1.3).

Ensuite, on étudie le cas particulier essentiel de la catégorie des préfaisceaux à valeurs dans  $\mathcal{V}$  (1.1.4). On conclut le numéro par quelques remarques sur la functorialité de telles catégories de préfaisceaux (1.1.5).

**Définition 1.1.1.** On rappelle qu'une  $\mathcal{V}$ -catégorie  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  est une catégorie  $\mathcal{C}$  munie d'un bifoncteur  $\text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{V}$ , d'un élément  $\mathcal{V}$ -identité  $\text{id}_X^{\mathcal{V}} : \mathbf{1}_{\mathcal{V}} \rightarrow \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, X)$  pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et d'un morphisme de  $\mathcal{V}$ -composition

$$\circ_{X,Y,Z} : \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(Y, Z) \otimes_{\mathcal{V}} \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, Y) \rightarrow \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, Z)$$

pour tout triplet  $(X, Y, Z) \in \text{ob}(\mathcal{C})^3$ . Ces données sont soumises à des conditions qui assurent que la  $\mathcal{V}$ -composition est associative et que les éléments  $\mathcal{V}$ -identité sont des éléments identité par rapport à la loi de composition donnée. On renvoie à [Kel05, 1.2] pour les diagrammes commutatifs d'associativité et d'identité. On fera l'abus de désigner une  $\mathcal{V}$ -catégorie  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  par la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$ .

Un  $\mathcal{V}$ -foncteur  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre deux  $\mathcal{V}$ -catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  est la donnée d'une application  $f : \text{ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{D})$  et, pour tout  $(X, Y) \in \text{ob}(\mathcal{C})^2$ , d'un morphisme  $f_{X,Y} : \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, Y) \rightarrow \text{mor}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{V}}(f(X), f(Y))$  de  $\mathcal{V}$  compatible aux éléments  $\mathcal{V}$ -identité  $\text{id}_X^{\mathcal{V}}$  et aux morphismes de  $\mathcal{V}$ -composition  $\circ_{X,Y,Z}$ . On trouve les diagrammes commutatifs exprimant ces conditions, ainsi que la définition d'une **transformation  $\mathcal{V}$ -naturelle** entre deux  $\mathcal{V}$ -foncteurs de mêmes sources et buts dans [Kel05, 1.2]. Une catégorie ou un foncteur est donc une Set-catégorie ou un Set-foncteur, respectivement, où Set est la catégorie des  $\mathfrak{U}$ -petits ensembles munie de la structure monoïdale symétrique associée au produit cartésien. On dira que  $f$  est **pleinement fidèle** lorsque  $f_{X,Y}$  est un isomorphisme pour tout  $(X, Y) \in \text{ob}(\mathcal{C})^2$ . On définit une  $\mathcal{V}$ -adjonction par des morphismes unité et co-unité comme dans le cas où  $\mathcal{V} = \text{Set}$ .

*Remarque 1.1.2.*

(i) Si  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  est une  $\mathcal{V}$ -catégorie, alors on définit la Set-catégorie sous-jacente, notée  $\mathcal{C}_0$ , par  $\text{mor}_{\mathcal{C}_0}(X, Y) := \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{1}_{\mathcal{V}}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, Y))$ . On vérifie sans difficulté que la  $\mathcal{V}$ -associativité et les éléments  $\mathcal{V}$ -identité induisent l'associativité et les éléments identité de  $\mathcal{C}_0$ .

Si  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un  $\mathcal{V}$ -foncteur, alors on obtient un Set-foncteur sous-jacent  $f_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$ . Si  $f : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : g$  est une  $\mathcal{V}$ -adjonction, alors  $f_0 : \mathcal{C}_0 \rightleftarrows \mathcal{D}_0 : g_0$  est une Set-adjonction.

(ii) Si  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  est une  $\mathcal{V}$ -catégorie, alors la  $\mathcal{V}$ -catégorie **opposée**  $(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}^{\mathcal{V}})$  est définie par  $\text{ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{ob}(\mathcal{C})$ ,  $\text{mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}^{\mathcal{V}}(X, Y) := \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(Y, X)$  et les choix évidents pour les morphismes de  $\mathcal{V}$ -composition et les éléments  $\mathcal{V}$ -identité. On signale quand même que si  $\mathcal{V}$  n'est pas tressée, alors on peut toujours définir une notion de  $\mathcal{V}$ -catégorie, mais on ne pourra plus définir une notion de  $\mathcal{V}$ -catégorie opposée. Autrement dit, en passant de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ , on est obligé d'appliquer le tressage de  $\mathcal{V}$  afin de construire les morphismes de  $\mathcal{V}$ -composition. C'est une difficulté gênante. Par exemple, on aurait besoin de la  $\mathcal{V}$ -catégorie opposé pour démontrer le lemme de  $\mathcal{V}$ -Yoneda.

(iii) Soient  $f, g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  deux  $\mathcal{V}$ -foncteurs et supposons que  $\mathcal{C}$  soit  $\mathfrak{A}$ -petite. Alors la fin

$$\text{mor}_{\text{Fun}^{\mathcal{V}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})}^{\mathcal{V}}(f, g) := \int_{X \in \text{ob}(\mathcal{D})} \text{mor}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{V}}(f(X), g(X))$$

munit la classe  $\text{Fun}^{\mathcal{V}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  des  $\mathcal{V}$ -foncteurs  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  d'une structure de  $\mathcal{V}$ -catégorie ([Kel05, 2.2]).

(iv) Soient  $\mathcal{C}$  une  $\mathfrak{A}$ -petite  $\mathcal{V}$ -catégorie,  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{V}$  le  $\mathcal{V}$ -foncteur  $\text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(-, X)$  représenté par  $X$ . Alors la règle  $X \mapsto \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X)$  se prolonge en un  $\mathcal{V}$ -foncteur covariant  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}^{\mathcal{V}}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{V})$ . Le lemme de  $\mathcal{V}$ -Yoneda fort de [Kel05, 2.4] est l'assertion que, pour tout  $\mathcal{V}$ -foncteur  $f : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{V}$ , il existe un isomorphisme  $\mathcal{V}$ -naturel

$$\text{mor}_{\text{Fun}^{\mathcal{V}}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(-), f) \simeq f.$$

En particulier, le  $\mathcal{V}$ -foncteur  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}}$  est pleinement fidèle et on l'appelle **plongement de  $\mathcal{V}$ -Yoneda covariant**.

(v) La catégorie  $\mathcal{V}$  est  $\mathfrak{A}$ -cocomplète et l'on peut donc associer à toute Set-catégorie  $\mathcal{C}$  une  $\mathcal{V}$ -catégorie  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$  de manière fonctorielle. Ce foncteur «  $\mathcal{V}$ -catégorie libre » est adjoint à gauche du foncteur  $(-)_0 : \mathcal{V}\text{-Cat} \rightarrow \text{Cat}$  de (i), c'est-à-dire il existe une équivalence de Set-catégories

$$\text{Fun}^{\mathcal{V}}(\mathcal{C}_{\mathcal{V}}, \mathcal{D})_0 \simeq \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}_0)$$

pour toute  $\mathcal{V}$ -catégorie  $\mathcal{D}$ . De plus,  $(-)_0$  envoie  $\mathfrak{A}$ -petite Set-catégorie sur  $\mathfrak{A}$ -petite  $\mathcal{V}$ -catégorie. On renvoie à [Kel05, 2.5] pour les détails de la construction de  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ . Grâce à cette construction, on peut vérifier que, pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , le préfaisceau  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X) \in \text{ob}(\text{Fun}^{\mathcal{V}}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{V}))$  est donné par  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X)(Y) = \text{mor}_{\mathcal{C}_{\mathcal{V}}}^{\mathcal{V}}(Y, X) = \coprod_{\text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(Y, X)} \mathbf{1}_{\mathcal{V}}$ .

(vi) Si  $(\mathcal{W}, \otimes_{\mathcal{W}}, \mathbf{1}_{\mathcal{W}})$  est une catégorie monoïdale symétrique et  $f_* : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  un foncteur monoïdal faible, alors on obtient un 2-foncteur  $\mathcal{V}\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{W}\text{-Cat}$ . Plus précisément, à une  $\mathcal{V}$ -catégorie  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  on associe la  $\mathcal{W}$ -catégorie  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{W}})$  où  $\text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{W}}(X, Y) := f_* \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, Y)$  pour tous  $(X, Y) \in \text{ob}(\mathcal{C})^2$ . Si  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , alors l'élément  $\mathcal{W}$ -identité  $\text{id}_X^{\mathcal{W}}$  est le composé

$$\mathbf{1}_{\mathcal{W}} \xrightarrow{\eta(f_*)} f_* \mathbf{1}_{\mathcal{V}} \xrightarrow{f_* \text{id}_X^{\mathcal{V}}} f_* \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, X) = \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{W}}(X, X),$$

où  $\eta(f_*)$  est le morphisme provenant de la structure monoïdale faible sur  $f_*$ . On définit les morphismes de  $\mathcal{W}$ -composition  $\circ_{X, Y, Z}^{\mathcal{W}}$  par

$$f_* \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{W}}(Y, Z) \otimes_{\mathcal{W}} f_* \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, Y) \xrightarrow{\mu(f_*)} f_*(\text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(Y, Z) \otimes_{\mathcal{V}} \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, Y)) \xrightarrow{f_* \circ_{X, Y, Z}^{\mathcal{V}}} f_* \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, Z),$$

où  $\mu(f_*)$  provient de la structure monoïdale faible sur  $f_*$ . Les conditions d'associativité et d'unité imposées sur  $f_*$  induisent les conditions analogues pour  $\circ_{X,Y,Z}^{\mathcal{V}}$  et  $\text{id}_X^{\mathcal{V}}$ .

Si  $f_*$  admet un adjoint à gauche  $f^*$  qui est monoïdal fort, alors la Set-catégorie sous-jacente à  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  est canoniquement isomorphe à la celle sous-jacente à  $(\mathcal{C}, f_* \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$ . Un cas particulier important est celui du foncteur d'oubli  $f_* := \upsilon : \mathcal{A}b \rightarrow \text{Set}$ . Son adjoint à gauche, à savoir le foncteur « groupe abélien libre », est monoïdal symétrique fort par rapport au produit tensoriel dans  $\mathcal{A}b$  et le produit cartésien sur  $\text{Set}$ . Il s'ensuit que  $\upsilon$  est monoïdal faible. Si  $(\mathcal{V}, \text{mor}_{\mathcal{V}}^{\text{Ab}})$  est une  $\mathcal{A}b$ -catégorie, alors il existe un isomorphisme canonique d'ensembles  $\upsilon(\text{mor}_{\mathcal{V}}^{\text{Ab}}(V, W)) \simeq \text{mor}_{\mathcal{V}}(V, W)$  pour tout  $(V, W) \in \text{ob}(\mathcal{V})^2$ . Par suite, toute  $\mathcal{V}$ -catégorie  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  est naturellement une  $\mathcal{A}b$ -catégorie de telle manière que le 2-foncteur « Set-catégorie sous-jacente »  $\mathcal{V}\text{-Cat} \rightarrow \text{Cat}$  se factorise par les 2-foncteur « Set-catégorie sous-jacente »  $\mathcal{A}b\text{-Cat} \rightarrow \text{Cat}$ . Suivant la convention historique, on écrit  $\text{hom}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, Y)$  au lieu de  $\text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, Y)$  lorsque  $\mathcal{V}$  est naturellement une  $\mathcal{A}b$ -catégorie.

**Définition 1.1.3.** On dira qu'une  $\mathcal{V}$ -catégorie  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  est **tensorisée** lorsqu'elle est munie d'un bifoncteur  $\odot_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  et d'isomorphismes  $\mathcal{V}$ -naturels

$$\text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(V \odot_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}} X, Y) \simeq \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}(V, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, Y))$$

pour tout  $(V, X, Y) \in \text{ob}(\mathcal{V}) \times \text{ob}(\mathcal{C})^2$ . Dualelement, on dira que  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  est **cotensorisée** lorsqu'elle est munie d'un bifoncteur  $\pitchfork_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}} : \mathcal{V}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  et d'isomorphismes  $\mathcal{V}$ -naturels

$$\text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, \pitchfork_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(V, Y)) \simeq \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}(V, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, Y))$$

dans  $\mathcal{V}$  pour tout  $(V, X, Y) \in \text{ob}(\mathcal{V}) \times \text{ob}(\mathcal{C})^2$ . On dira que  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  est **bitensorisée** si elle est tensorisée et cotensorisée. Dans ce cas, le triplet  $(\text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \odot_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \pitchfork_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  est une adjonction à deux variables dans la terminologie de [Hov99, 4.1.12].

**Proposition 1.1.4.** Soit  $\mathcal{C}$  une  $\mathcal{A}$ -petite Set-catégorie avec un objet final  $*$ . Alors la catégorie  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$  des préfaisceaux sur  $\mathcal{C}$  à valeurs dans  $\mathcal{V}$  admet une structure naturelle de  $\mathcal{V}$ -catégorie monoïdale symétrique fermée, bitensorisée.

*Démonstration.* La structure de  $\mathcal{V}$ -catégorie résulte des remarques (iii) et (v) de 1.1.2. La structure monoïdale symétrique fermée est la suivante : on définit le produit tensoriel  $\otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}}$  objet par objet, c'est-à-dire  $(F \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} G)(X) := F(X) \otimes_{\mathcal{V}} G(X)$  pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ; l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{P}\text{Sh}}$  est le préfaisceau constant de valeur  $\mathbf{1}_{\mathcal{V}}$ ; et le bifoncteur d'exponentiation est donné par

$$\underline{\text{mor}}_{\mathcal{P}\text{Sh}}(F, G) := \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(-) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} F, G).$$

Signalons que l'on peut calculer les sections de ce préfaisceau à l'aide de la formule rappelée dans 1.1.2(iii). La propriété d'adjonction entre  $\otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}}$  et  $\underline{\text{mor}}_{\mathcal{P}\text{Sh}}$  résulte de l'observation que chacun des deux  $\mathcal{V}$ -foncteurs

$$\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}((-) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} F, G), \quad \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(-, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}(F, G)) : \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{V}$$

est extension de Kan à gauche du foncteur  $\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(-) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} F, G) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{V}$  le long de l'opposé du plongement de  $\mathcal{V}$ -Yoneda  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ .

On dispose d'une  $\mathcal{V}$ -adjonction  $\text{cst}_{\mathcal{C}} : \mathcal{V} \rightleftarrows \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V}) : \Gamma(*, -)$ , où  $\text{cst}_{\mathcal{C}}(V)$  est le préfaisceau constant de valeur  $V \in \text{ob}(\mathcal{V})$  et  $\Gamma(*, F) := F(*)$  est le foncteur « sections globales ». Comme  $*$  est un objet final de la Set-catégorie  $\mathcal{C}$ , c'est un objet  $\mathcal{V}$ -final de la

$\mathcal{V}$ -catégorie  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ , c'est-à-dire  $\text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(X, *) = \mathbf{1}_{\mathcal{V}}$  pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{C}_{\mathcal{V}})$ . De plus, le foncteur  $\text{cst}_{\mathcal{C}}$  est monoïdal symétrique fort. Par conséquent,  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(*) = \text{cst}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  et

$$\begin{aligned} \Gamma(*, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{PSh}}(F, G)) &= \text{mor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(*), \underline{\text{mor}}_{\mathcal{PSh}}(F, G)) \\ &= \text{mor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\text{cst}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathcal{V}}) \otimes_{\mathcal{PSh}} F, G) \\ &= \text{mor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(F, G). \end{aligned}$$

On définit des bifoncteurs  $\text{hom}_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}}(V, F) := \underline{\text{mor}}_{\mathcal{PSh}}(\text{cst}_{\mathcal{C}}(V), F)$  et  $V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} F := \text{cst}_{\mathcal{C}}(V) \otimes_{\mathcal{PSh}} F$ . Les propriétés de  $\mathcal{V}$ -adjonction résultent de la  $\mathcal{V}$ -adjonction entre  $\otimes_{\mathcal{PSh}}$  et  $\underline{\text{mor}}_{\mathcal{PSh}}$  et de ce que  $\text{cst}_{\mathcal{C}}$  est monoïdal symétrique fort.  $\square$

**Proposition 1.1.5.** *Soit  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur entre  $\mathcal{U}$ -petites Set-catégories admettant des objets finaux.*

- (i) *Le foncteur  $f$  induit une  $\mathcal{V}$ -adjonction  $f^* : \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V}) \rightleftarrows \mathcal{PSh}(\mathcal{C}', \mathcal{V}) : f_*$  entre les structures de  $\mathcal{V}$ -catégorie de 1.1.4. Le foncteur  $f_*$  est monoïdal symétrique fort. Si les produits finis sont représentables dans  $\mathcal{C}$  et que  $f$  les préserve, alors  $f^*$  est également monoïdal symétrique fort.*
- (ii) *Si  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  admet un adjoint à gauche  $g$ , alors  $f^*$  est  $\mathcal{V}$ -adjoint à droite du  $\mathcal{V}$ -foncteur  $f_{\#} := g^*$ .*

*Démonstration.*

- (i) Le Set-foncteur sous-jacent à  $f_*$  est donné par composition :  $f_*F(X) := F(f(X))$ . Le morphisme d'égalisateurs suivant fait de  $f_*$  un  $\mathcal{V}$ -foncteur :

$$\begin{array}{ccc}
\int_{X \in \text{ob}(\mathcal{C}')} \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}(F(X), G(X)) & \xrightarrow{f_*} & \int_{Y \in \text{ob}(\mathcal{C})} \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}(F(f(Y)), G(f(Y))) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\prod_{X \in \text{ob}(\mathcal{C}')} \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}(F(X), G(X)) & \xrightarrow{\pi_1} & \prod_{Y \in \text{ob}(\mathcal{C}')} \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}(F(f(Y)), G(f(Y))) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\prod_{(X \rightarrow X') \in \text{mor}(\mathcal{C}')} \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}} \left( \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{V}}(X, X'), \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}(F(X), G(X')) \right) & \xrightarrow{\pi_2} & \prod_{(Y \rightarrow Y') \in \text{mor}(\mathcal{C})} \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}} \left( \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(Y, Y'), \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}(F(f(Y)), G(f(Y')) \right)
\end{array}$$

Dans ce diagramme,  $F$  et  $G$  sont des objets de  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{V})$ , les colonnes sont les égalisateurs qui apparaissent dans la construction de la fin de [Kel05, (2.2)],  $\pi_1$  est la projection,  $\pi_2$  est

le morphisme induit par les projections sur les facteurs

$$\underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}} \left( \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}'_{\mathcal{V}}}^{\mathcal{V}} (f(Y), f(Y')), \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}} (F(f(Y)), G(f(Y'))) \right)$$

suivies des morphismes de pré- $\mathcal{V}$ -composition avec les morphismes

$$\text{mor}_{\mathcal{C}'_{\mathcal{V}}}^{\mathcal{V}} (Y, Y') \rightarrow \text{mor}_{\mathcal{C}'_{\mathcal{V}}}^{\mathcal{V}} (f(Y), f(Y'))$$

et  $f_*$  est le morphisme induit par la propriété universelle de l'égalisateur. En identifiant les fins  $\int_{X \in \text{ob}(\mathcal{C}')} \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}} (F(X), G(X))$  et  $\int_{Y \in \text{ob}(\mathcal{C})} \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}} (F(f(Y)), G(f(Y)))$  à  $\text{mor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}', \mathcal{V})}^{\mathcal{V}} (F, G)$  et  $\text{mor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}} (f_* F, f_* G)$ , respectivement, comme dans 1.1.2(iii), le lecteur peut vérifier que  $f_*$  préserve les éléments  $\mathcal{V}$ -identité et la  $\mathcal{V}$ -composition. On a donc un  $\mathcal{V}$ -foncteur  $f_*$ .

Le  $\mathcal{V}$ -foncteur  $f_*$  est adjoint à droite si et seulement si le  $\mathcal{V}$ -foncteur

$$\text{mor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}} (F, f_*(-)) : \mathcal{PSh}(\mathcal{C}', \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{V}$$

est co-représentable pour tout  $F \in \text{ob}(\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V}))$ . Il suffit de montrer que la cofin

$$f^* F := \int^{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} F(X) \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(f(X))$$

du bifoncteur

$$F(-) \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(-) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{PSh}(\mathcal{C}', \mathcal{V})$$

co-représente  $\text{mor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}} (F, f_*(-))$ . Or cela découle du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \text{mor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}', \mathcal{V})}^{\mathcal{V}} (f^* F, G) &:= \text{mor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}', \mathcal{V})}^{\mathcal{V}} \left( \int^{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} F(X) \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(f(X)), G \right) \\ &= \int_{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} \text{mor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}', \mathcal{V})}^{\mathcal{V}} (F(X) \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(f(X)), G) \\ &= \int_{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}} \left( F(X), \text{mor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}} (\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(f(X)), G) \right) \\ &= \int_{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}} (F(X), (f_* G)(X)) \\ &= \text{mor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}} (F, f_* G), \end{aligned}$$

où l'avant-dernière identification est le lemme de  $\mathcal{V}$ -Yoneda 1.1.2(iv).

Si  $F, G \in \text{ob}(\mathcal{PSh}(\mathcal{C}', \mathcal{V}))$  et que  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , alors

$$\begin{aligned} f_*(F \otimes_{\mathcal{PSh}} G)(X) &= (F \otimes_{\mathcal{PSh}} G)(f(X)) \\ &= F(f(X)) \otimes_{\mathcal{V}} G(f(X)) \\ &= (f_* F)(X) \otimes_{\mathcal{V}} (f_* G)(X) \\ &= ((f_* F) \otimes_{\mathcal{PSh}} (f_* G))(X). \end{aligned}$$

Le lecteur peut vérifier la commutativité des diagrammes d'unité, d'associativité et de symétrie et en déduire que  $f_*$  est un foncteur monoïdal symétrique fort.

Supposons que les produits finis soient représentables dans  $\mathcal{C}$  et que  $f$  les préserve. Si  $F, G \in \text{ob}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V}))$ , alors le calcul suivant nous fournit un isomorphisme  $f^*(F \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} G) \rightarrow (f^*F) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} (f^*G)$  qui permet de conclure :

$$\begin{aligned}
f^*(F \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} G) &= f^* \left( F \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} \int^{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} G(X) \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X) \right) \\
&= f^* \left( \int^{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} F \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} (G(X) \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X)) \right) \\
&= f^* \left( \int^{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} \int^{X' \in \text{ob}(\mathcal{C})} (F(X') \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X')) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} (G(X) \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X)) \right) \\
&= \int^{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} \int^{X' \in \text{ob}(\mathcal{C})} f^* \left( (F(X') \otimes_{\mathcal{V}} G(X)) \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X') \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X) \right) \\
&= \int^{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} \int^{X' \in \text{ob}(\mathcal{C})} (F(X') \otimes_{\mathcal{V}} G(X)) \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} f^* \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X' \times X) \\
&= \int^{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} \int^{X' \in \text{ob}(\mathcal{C})} (F(X') \otimes_{\mathcal{V}} G(X)) \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(f(X \times X')) \\
&= \int^{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} \int^{X' \in \text{ob}(\mathcal{C})} (F(X') \otimes_{\mathcal{V}} G(X)) \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(f(X') \times f(X)) \\
&= \int^{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} \int^{X' \in \text{ob}(\mathcal{C})} (F(X') \otimes_{\mathcal{V}} G(X)) \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(f(X')) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(f(X)) \\
&= \int^{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} \int^{X' \in \text{ob}(\mathcal{C})} (F(X') \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(f(X'))) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} (G(X) \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(f(X))) \\
&= \int^{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} (f^*F) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} (G(X) \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(f(X))) \\
&= (f^*F) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} (f^*G).
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, on a utilisé les faits que  $f^*$  préserve les cofins et que  $\otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}}$  préserve les cofins en chaque variable. D'après l'assertion duale de [Kel05, 3.73], pour vérifier ces compatibilités aux cofins, il suffit de vérifier que ces foncteurs commutent aux tenseurs  $\odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}}$  et aux colimites coniques, ce qui est vrai car un adjoint à gauche préserve les colimites coniques et  $f^*$  et  $\otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}}$  sont manifestement compatibles à  $\odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}}$ .

(ii) Supposons que  $f$  admette un adjoint à gauche  $g$ . D'après l'assertion duale de [Kel05, 3.73], le  $\mathcal{V}$ -foncteur  $\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), -)$  préserve les cofins. Du coup, pour tous  $F \in \text{ob}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V}))$ ,  $X \in \text{ob}(\mathcal{C}')$ , on a un isomorphisme  $(g_*F)(X) \simeq (f^*F)(X)$  donné par le

calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{mor}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), g_*F) &= \mathrm{mor}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(g(X)), F) \\
&= \mathrm{mor}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}\left(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(g(X)), \int^{Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})} F(Y) \odot_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(Y)\right) \\
&= \int^{Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(g(X)), F(Y) \odot_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(Y)) \\
&= \int^{Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})} F(Y) \otimes_{\mathcal{V}} \mathrm{mor}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(g(X)), \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(Y)) \\
&= \int^{Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})} F(Y) \otimes_{\mathcal{V}} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}_{\mathcal{V}}}^{\mathcal{V}}(g(X), Y) \\
&= \int^{Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})} F(Y) \otimes_{\mathcal{V}} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}'_{\mathcal{V}}}^{\mathcal{V}}(X, f(Y)) \\
&= \int^{Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), F(Y) \odot_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(f(Y))) \\
&= \mathrm{mor}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}\left(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), \int^{Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})} F(Y) \odot_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(f(Y))\right) \\
&= \mathrm{mor}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), f^*F),
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 1.1.6.** *Soit  $g : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C} : f$  une adjonction entre deux  $\mathcal{U}$ -petites Set-catégories. Supposons que les produits finis soient représentables dans  $\mathcal{C}$  et dans  $\mathcal{C}'$  et que  $f$  et  $g$  les préservent. Soit*

$$\alpha : g((-) \times f(-)) \simeq g(-) \times (-)$$

*un isomorphisme naturel de bifoncteurs  $\mathcal{C}' \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Alors il existe un isomorphisme  $\mathcal{V}$ -naturel de  $\mathcal{V}$ -bifoncteurs  $\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{V}) \times \mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$*

$$f_{\#}((-) \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{V})} f^*(-)) \simeq f_{\#}(-) \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})} (-).$$

*Démonstration.* Le lecteur pourra adapter facilement la démonstration de [Ayo07b, 4.5.17] à la présente situation.  $\square$

## 1.2 STRUCTURES DE MODÈLES GLOBALES

*Notation 1.2.0.* Dans ce numéro,  $(\mathcal{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, \underline{\mathrm{mor}}_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  désigne une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique au sens de [Hov99, 4.2.6] telle que l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{V}}$  soit cofibrante.

*Résumé.* On rappelle quelques notions de la théorie des catégories de modèles et l'on étudie les structures de modèles projective et injective « globales » sur les catégories de préfaisceaux à valeurs dans une catégorie de modèles monoïdale symétrique.

*Plan.* Après avoir rappelé les notions d'accessibilité et de présentabilité d'une catégorie et de combinatorialité et de tractabilité d'une catégorie de modèles, ainsi que la notion d'une catégorie de modèles enrichie sur une catégorie de modèles monoïdale symétrique, on

introduit les structures de modèles projective et injective sur la catégorie des préfaisceaux à valeurs dans  $\mathcal{V}$  (1.2.7). On étudie le comportement de ces structures de modèles vis-à-vis le produit tensoriel (1.2.8, 1.2.11) et les foncteurs d'image inverse et d'image directe (1.2.12). Enfin, on montre que la catégorie homotopique des structures de modèles projective et injective admet souvent une famille homotopiquement génératrice d'objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables lorsqu'il en est ainsi de  $\text{ho}(\mathcal{V})$  (1.2.14).

**Définition 1.2.1.** Suivant [Bar10, 1.27], on appelle  $\mathcal{V}$ -*catégorie de  $\aleph$ -modèles* toute  $\mathcal{V}$ -catégorie  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \odot_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \mathfrak{h}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  bitensorisée munie d'une structure de  $\aleph$ -modèles sur  $\mathcal{C}$  telle que le triplet  $(\odot_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \mathfrak{h}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  soit une adjonction de Quillen à deux variables au sens de [Bar10, 1.27.1].<sup>3</sup> Étant donné deux  $\mathcal{V}$ -catégories de  $\aleph$ -modèles  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \odot_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \mathfrak{h}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  et  $(\mathcal{D}, \text{mor}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{V}}, \odot_{\mathcal{D}}^{\mathcal{V}}, \mathfrak{h}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{V}})$ , un  $\mathcal{V}$ -*foncteur de Quillen à gauche* (resp. *à droite*)  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}'$  est un  $\mathcal{V}$ -adjoint à gauche (resp. à droite) dont le Set-foncteur sous-jacent est de Quillen à gauche (resp. à droite).

*Remarque 1.2.2.* Si  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \odot_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \mathfrak{h}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$  est une  $\mathcal{V}$ -catégorie de  $\aleph$ -modèles, alors la catégorie homotopique  $\text{ho}(\mathcal{C})$  est naturellement une  $(\text{ho}(\mathcal{V}), \otimes_{\mathcal{V}}^{\mathbf{L}}, \mathbf{R}\underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$ -catégorie bitensorisée via l'adjonction à deux variables  $(\mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \odot_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}, \mathbf{L}}, \mathbf{R}\mathfrak{h}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}})$ .

**Définition 1.2.3.** Soit  $\lambda$  un  $\aleph$ -petit cardinal régulier. Une localement  $\aleph$ -petite catégorie  $\mathcal{C}$  est dite  $\lambda$ -*accessible* si les  $\aleph$ -petites colimites  $\lambda$ -dirigées<sup>4</sup> sont représentables et qu'il existe un  $\aleph$ -petit ensemble d'objets  $\lambda$ -présentables<sup>5</sup> qui engendrent  $\mathcal{C}$  par colimites  $\lambda$ -filtrantes. Si  $\mathcal{C}$  est  $\lambda$ -accessible pour un certain  $\aleph$ -petit cardinal régulier  $\lambda$ , alors on dit que  $\mathcal{C}$  est  $\aleph$ -*accessible*.

**Définition 1.2.4.** Soit  $\lambda$  un  $\aleph$ -petit cardinal régulier. Une localement  $\aleph$ -petite catégorie  $\mathcal{C}$  est dite *localement  $\lambda$ -présentable* lorsque  $\mathcal{C}$  est  $\aleph$ -cocomplète et  $\lambda$ -accessible. On dit que  $\mathcal{C}$  est *localement  $\aleph$ -présentable* lorsque  $\mathcal{C}$  est localement  $\lambda$ -présentable pour un certain  $\aleph$ -petit cardinal régulier  $\lambda$ .

**Définition 1.2.5.** Soit  $\lambda$  un  $\aleph$ -petit cardinal régulier. On dit qu'une catégorie de  $\aleph$ -modèles  $\mathcal{C}$  est  $\lambda$ -*combinatoire* si  $\mathcal{C}$  est localement  $\lambda$ -présentable et qu'il existe des  $\aleph$ -petits ensembles I et J de cofibrations génératrices et de cofibrations triviales génératrices de  $\mathcal{C}$ , respectivement, de sources et de buts  $\lambda$ -présentables. Une catégorie de  $\aleph$ -modèles est dite  $\aleph$ -*combinatoire* si elle est  $\lambda$ -combinatoire pour un certain  $\aleph$ -petit cardinal régulier  $\lambda$ .

**Définition 1.2.6** ([Bar10, 1.21]). Soit  $\lambda$  un  $\aleph$ -petit cardinal régulier. On dit qu'une catégorie de  $\aleph$ -modèles  $\mathcal{C}$  est  $\lambda$ -*tractable* si  $\mathcal{C}$  est localement  $\lambda$ -présentable et qu'il existe des  $\aleph$ -petits ensembles I et J de cofibrations génératrices et de cofibrations triviales génératrices de  $\mathcal{C}$ , respectivement, de sources et de buts cofibrants et  $\lambda$ -présentables. On dit qu'une catégorie de  $\aleph$ -modèles  $\mathcal{C}$  est  $\aleph$ -*tractable* si elle est  $\lambda$ -tractable pour un certain  $\aleph$ -petit cardinal régulier

3. Dans [Bar10], il y a également une condition sur les résolutions cofibrantes de l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{V}}$ , mais on supposera toujours que l'unité est cofibrante, auquel cas la condition de Barwick est trivialement satisfaite.

4. Une *colimite  $\lambda$ -dirigée* est une colimite indexée par la catégorie associée à un ensemble  $\lambda$ -dirigé, c'est-à-dire un ensemble partiellement ordonné dont toute partie de cardinal  $< \lambda$  admet une borne supérieure. D'après [AR94, 1.5, 1.21], les colimites  $\lambda$ -dirigées sont représentables dans une catégorie  $\mathcal{C}$  si et seulement si les colimites  $\lambda$ -filtrantes sont représentables dans  $\mathcal{C}$ .

5. On dit qu'un objet X d'une catégorie  $\mathcal{C}$  dans laquelle les  $\aleph$ -petites colimites  $\lambda$ -filtrantes sont représentables est  $\lambda$ -*présentable* si  $\text{mor}_{\mathcal{C}}(X, -)$  préserve les  $\aleph$ -petites colimites  $\lambda$ -filtrantes. Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie de  $\aleph$ -modèles, alors on dit que X est *homotopiquement  $\lambda$ -présentable* si  $\mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{C}}(X, -) : \text{ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ho}(\text{Set}_{\Delta})$  préserve les  $\aleph$ -petites colimites homotopiques  $\lambda$ -filtrantes, où  $\text{Set}_{\Delta}$  désigne la catégorie des  $\aleph$ -petits ensembles simpliciaux.

$\lambda$ . En particulier, si  $\mathcal{C}$  est  $\lambda$ -tractable (resp.  $\mathfrak{U}$ -tractable), alors elle est  $\lambda$ -combinatoire (resp.  $\mathfrak{U}$ -combinatoire).

**Proposition 1.2.7.** *Soient  $\mathcal{C}$  une  $\mathfrak{U}$ -petite Set-catégorie admettant un objet final et  $\mathcal{V}$  une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique  $\mathfrak{U}$ -combinatoire (resp.  $\mathfrak{U}$ -tractable). La catégorie  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$  est une  $\mathcal{V}$ -catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles  $\mathfrak{U}$ -combinatoire (resp.  $\mathfrak{U}$ -tractable) et propre à gauche lorsqu'on la munit de la structure de  $\mathcal{V}$ -catégorie de 1.1.4 et de l'une des structures de  $\mathfrak{U}$ -modèles suivantes :*

- (i) *la structure de  $\mathfrak{U}$ -modèles **projective**  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}}$ , dont les équivalences faibles et les fibrations sont les équivalences faibles et les fibrations objet par objet, respectivement, c'est-à-dire les morphismes  $f : F \rightarrow G$  tels que  $f_X : F(X) \rightarrow G(X)$  soit une équivalence faible ou une fibration, respectivement, pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ;*
- (ii) *la structure de  $\mathfrak{U}$ -modèles **injective**  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}$ , dont les cofibrations et les équivalences faibles sont les cofibrations et les équivalences faibles objet par objet, respectivement.*

*Le foncteur  $\text{id}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})} : \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}} \rightarrow \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}$  est une équivalence de Quillen à gauche. Si  $\mathcal{V}$  est une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles stable (resp. propre à gauche, resp. propre à droite), alors il en est de même de  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}}$  et de  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}$ .*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{C}$  est  $\mathfrak{U}$ -combinatoire (resp.  $\mathfrak{U}$ -tractable), alors ces classes de morphismes définissent des structures de  $\mathfrak{U}$ -modèles  $\mathfrak{U}$ -combinatoires (resp.  $\mathfrak{U}$ -tractables) d'après [Bar10, 2.14, 2.16]. Ce sont des  $\mathcal{V}$ -catégories de  $\mathfrak{U}$ -modèles d'après [Bar10, 4.50]. Tout morphisme vérifiant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales objet par objet est forcément une cofibration objet par objet. Cette remarque et l'observation que  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}}$  et  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}$  ont la même classe d'équivalences faibles montrent que l'identité  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}} \rightarrow \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}$  est une équivalence de Quillen à gauche. Si  $\mathcal{V}$  est stable, alors il en est de même des structures injective et projective sur  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$  d'après [Ayo07b, 4.4.21]. Les assertions concernant la propriété des structures de  $\mathfrak{U}$ -modèles projective et injective résultent de [Bar10, 2.18].  $\square$

**Proposition 1.2.8.** *Soient  $\mathcal{C}$  une  $\mathfrak{U}$ -petite Set-catégorie admettant un objet final et  $\mathcal{V}$  une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles  $\mathfrak{U}$ -combinatoire (resp.  $\mathfrak{U}$ -tractable), monoïdale symétrique. Alors, munie de la structure monoïdale symétrique de 1.1.4,  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}$  est une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique. Si les produits finis sont représentables dans  $\mathcal{C}$ , alors  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}}$  est également une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique.*

*Démonstration.* On renvoie à [Bar10, 4.51, 4.53].  $\square$

**Définition 1.2.9** ([SS00, 3.3]). Une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  vérifie l'**axiome du monoïde** si la classe de morphismes faiblement saturée engendrée par<sup>6</sup> ceux de la forme  $\text{id}_A \otimes_{\mathcal{C}} f$ , où  $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et où  $f$  est une cofibration triviale de  $\mathcal{C}$ , est incluse dans la classe des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ .

*Remarque 1.2.10.*

- (i) L'axiome du monoïde facilite la construction de structures de  $\mathfrak{U}$ -modèles sur les catégories des algèbres et des modules sur une algèbre d'une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale.
- (ii) Dans une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale dont tout objet est cofibrant, l'axiome du monoïde est conséquence des axiomes des catégories de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdales.

6. On rappelle que, suivant [Lur09a, A.1.2.2], la **classe faiblement saturée** engendrée par une classe  $G$  de morphismes d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est la plus petite classe de morphismes contenant  $G$  et stable par  $\mathfrak{U}$ -petite compositions transfinies, rétractes et sommes amalgamées.

**Lemme 1.2.11.** Soient  $\mathcal{C}$  une  $\mathfrak{A}$ -petite Set-catégorie admettant un objet final et  $\mathcal{V}$  une catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles  $\mathfrak{A}$ -combinatoire (resp.  $\mathfrak{A}$ -tractable), monoïdale symétrique. Si  $\mathcal{V}$  vérifie l'axiome du monoïde, alors il en est de même de  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}$ . Si les produits finis sont représentables dans  $\mathcal{C}$ , alors  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}}$  vérifie l'axiome du monoïde.

*Démonstration.* D'après 1.2.6, l'identité  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}} \rightarrow \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}$  est de Quillen à gauche et les deux structures de  $\mathfrak{A}$ -modèles ont la même classe d'équivalences faibles. Il suffit alors de montrer que  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}$  vérifie l'axiome du monoïde. Comme les colimites, rétractes de morphismes, équivalences faibles injectives, cofibrations injectives et produits tensoriels dans  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$  se définissent objet par objet, on est ramené à vérifier l'axiome du monoïde dans  $\mathcal{V}$ .  $\square$

**Proposition 1.2.12.** Soient  $\mathcal{C}$  une  $\mathfrak{A}$ -petite Set-catégorie admettant un objet final,  $\mathcal{V}$  une catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles  $\mathfrak{A}$ -combinatoire (resp.  $\mathfrak{A}$ -tractable), monoïdale symétrique,  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur entre deux  $\mathfrak{A}$ -petites Set-catégories dans lesquelles les produits finis sont représentables et  $\mathcal{V}$  une catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{A}$ -combinatoire et propre à gauche.

- (i) La  $\mathcal{V}$ -adjonction  $f^* \dashv f_*$  de 1.1.5(i) est de Quillen par rapport aux structures de  $\mathfrak{A}$ -modèles projectives.
- (ii) Si  $f$  admet un adjoint à gauche, alors la  $\mathcal{V}$ -adjonction  $f_{\#} \dashv f^*$  de 1.1.5(ii) est de Quillen par rapport aux structures de  $\mathfrak{A}$ -modèles projectives.

*Démonstration.* C'est évident que  $f_*$  préserve les cofibrations, les équivalences faibles et les fibrations objet par objet. En particulier,  $f_*$  est de Quillen à gauche par rapport aux structures de  $\mathfrak{A}$ -modèles projectives. De plus, si  $f$  admet un adjoint à droite  $g$ , alors  $f^* = g_*$  d'après 1.1.5 et l'on vient de montrer que  $g_*$  est de Quillen à droite par rapport aux structures projectives.  $\square$

**Lemme 1.2.13.** Soient  $\mathcal{C}$  une  $\mathfrak{A}$ -petite Set-catégorie admettant un objet final et  $\mathcal{V}$  une catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles  $\mathfrak{A}$ -combinatoire (resp.  $\mathfrak{A}$ -tractable), monoïdale symétrique dont l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{V}}$  est cofibrante. Alors  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X)$  est cofibrant dans  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}$  et dans  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}}$  pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ .

*Démonstration.* D'après 1.2.7, tout objet injectivement cofibrant est projectivement cofibrant et il suffit de montrer que le morphisme  $\text{cst}_{\mathcal{C}}(\emptyset_{\mathcal{V}}) \rightarrow \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X)$  est une cofibration objet par objet, où  $\emptyset_{\mathcal{V}}$  désigne l'objet initial de  $\mathcal{V}$ . Or  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X)(Y) = \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(Y, X) = \coprod_{\text{mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)} \mathbf{1}_{\mathcal{V}}$  d'après 1.1.2(v). L'unité étant cofibrante et les cofibrations étant stables par  $\mathfrak{A}$ -petits coproduits, on gagne.  $\square$

**Proposition 1.2.14.** Soient  $\mathcal{C}$  une  $\mathfrak{A}$ -petite Set-catégorie admettant un objet final et  $\mathcal{V}$  une catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles  $\mathfrak{A}$ -combinatoire (resp.  $\mathfrak{A}$ -tractable), monoïdale symétrique et stable dont l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{V}}$  est cofibrante et dont les équivalences faibles sont stables par  $\mathfrak{A}$ -petites colimites filtrantes. Si  $\mathcal{G} \subseteq \text{ob}(\mathcal{V})$  est une  $\mathfrak{A}$ -petite famille homotopiquement génératrice d'objets cofibrants et homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables, alors

$$\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{C} := \{G \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X) \mid G \in \mathcal{G}, X \in \text{ob}(\mathcal{C})\}$$

est une  $\mathfrak{A}$ -petite famille homotopiquement génératrice d'objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables dans  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}}$  et dans  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}$ .

*Démonstration.* Soit  $F \in \text{ob}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V}))$  tel que  $\text{hom}_{\text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}})}(G \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X)[n], F) = 0$  pour tous  $G \in \mathcal{G}$ ,  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et  $n \in \mathbf{Z}$ . D'après [Hov99, 1.3.10],  $(-)\odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}, \mathbf{L}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X)$  est adjoint à droite du foncteur  $\mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), -)$  pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et l'on en déduit que

$$\text{hom}_{\text{ho}(\mathcal{V})}(G[n], \mathbf{R}\text{hom}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), F)) = 0$$

pour tous  $G \in \mathcal{G}$ ,  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et  $n \in \mathbf{Z}$ . Comme  $\mathcal{G}$  est génératrice dans  $\text{ho}(\mathcal{V})$ , on a  $0 = \mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), F)$  pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ . Si  $F \rightarrow F_{\text{fib}}$  est une résolution fibrante dans la structure de modèles injective ou projective, alors on a

$$0 = \mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), F) \cong \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), F_{\text{fib}}) = F_{\text{fib}}(X),$$

car  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X)$  est injectivement et projectivement cofibrant d'après 1.2.13. Il s'ensuit que  $F_{\text{fib}}$  est faiblement équivalent au préfaisceau nul objet par objet, c'est-à-dire isomorphe à 0 dans  $\text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}})$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{C}$  engendre la catégorie triangulée  $\text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}})$ .

Il reste à montrer que les éléments de  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{C}$  sont homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables dans  $\text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}})$ . On fixe  $F : A \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$  un  $\aleph$ -petit diagramme filtrant,  $G \in \mathcal{G}$  et  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ . Alors

$$\begin{aligned} & \text{hom}_{\text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{inj}})}(G \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), \mathbf{L}\text{colim}_{\alpha \in A} F(\alpha)) \\ & \cong \text{hom}_{\text{ho}(\mathcal{V})}(G, \mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), \mathbf{L}\text{colim}_{\alpha \in A} F(\alpha))) \end{aligned}$$

par adjonction. Les éléments de  $\mathcal{G}$  étant homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables dans  $\text{ho}(\mathcal{V})$  par hypothèse, il suffit de montrer que  $\mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), -)$  préserve les  $\aleph$ -petites colimites homotopiques filtrantes. Quitte à remplacer  $F$  par un objet  $F'$  simultanément cofibrant et fibrant dans  $\mathcal{P}\text{Sh}(A^{\text{op}}, \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}})_{\text{proj}}$  et faiblement équivalent à  $F$ , on peut supposer que  $\text{colim}_{\alpha \in A} F(\alpha) = \mathbf{L}\text{colim}_{\alpha \in A} F(\alpha)$  et que  $F(\alpha)$  est projectivement fibrant pour tout  $\alpha \in A$ . On remarque que

$$\mathbf{L}\text{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), F(\alpha)) \cong \text{colim}_{\alpha \in A} \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), F(\alpha))$$

dans  $\text{ho}(\mathcal{V})$ , parce que les équivalences faibles dans  $\mathcal{V}$  sont supposées stables par  $\aleph$ -petites colimites filtrantes. Soit  $\text{colim}_{\alpha \in A} F(\alpha) \rightarrow F'$  une résolution projectivement fibrante. En particulier, on a une équivalence faible fonctorielle  $(\text{colim}_{\alpha \in A} F(\alpha))(X) \rightarrow F'(X)$  dans  $\mathcal{V}$  pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ . Du coup, on a un diagramme homotopiquement commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), F(\alpha)) & \xrightarrow{\sim} & \text{colim}_{\alpha \in A} \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), F(\alpha)) \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ & & \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), \text{colim}_{\alpha \in A} F(\alpha)) \\ & & \downarrow \sim \\ \mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})_{\text{proj}}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), \text{colim}_{\alpha \in A} F(\alpha)) & \xrightarrow{\sim} & \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), F'), \end{array}$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

### 1.3 STRUCTURES DE MODÈLES NISNEVICH-LOCALES

*Notation 1.3.0.* Dans ce numéro,  $(\mathcal{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  désigne une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathcal{U}$ -tractable et propre à gauche. Afin de faciliter l'exposition, on supposera que tout objet de  $\mathcal{V}$  est cofibrant.

Par convention, on entend «  $\mathcal{U}$ -schéma » par « schéma ». On fixe un  $\mathcal{U}$ -schéma  $\mathbf{B}$  noethérien de dimension de Krull finie et l'on note  $\text{Sch}^{\text{ft}} \downarrow \mathbf{B}$  la catégorie des  $\mathbf{B}$ -schémas de type fini. On fixe une  $\mathcal{U}$ -petite sous-catégorie  $\mathcal{S} \subseteq \text{Sch}^{\text{ft}} \downarrow \mathbf{B}$  stable par produits finis et tirés-en-arrière le long des morphismes de  $\text{Sch}^{\text{ft}} \downarrow \mathbf{B}$  et l'on suppose que  $\mathcal{S}$  contient les  $\mathbf{B}$ -schémas quasi-projectifs.

*Résumé.* La construction de la catégorie homotopique stable de F. Morel et V. Voevodsky ([MV99]) consiste en trois étapes : la localisation de la catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur  $\mathcal{S} \text{m} \downarrow \mathcal{S}$  par rapport aux hyper-recouvrements Nisnevich, ce qui force l'existence de suites exactes longues à la Mayer-Vietoris ; la localisation de cette nouvelle catégorie par rapport à la droite affine, ce qui force la propriété d'invariance par  $\mathbf{A}^1$ -homotopie ; et l'inversion de la cofibre de la section à l'infini  $\sigma_{\infty} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^1$  par rapport à la structure monoïdale. Dans ce numéro, on effectue la première étape en remplaçant les préfaisceaux simpliciaux par les préfaisceaux à valeurs dans la catégorie des complexes de ind-objets d'une catégorie tannakienne munie de la structure de modèles injective (1.0.4(ii)).

Signalons que J. Ayoub réalise dans [Ayo07b, §4.4] une construction nettement plus générale pour les préfaisceaux à valeurs dans une catégorie de coefficients  $\mathcal{M}$  (1.0.13). Ici, on ne localise pas par rapport à la même classe de morphismes que celle de [Ayo07b], mais plutôt par rapport à une classe qui nous permet de montrer que la localisation respecte les objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables (1.3.9). On s'en servira ultérieurement pour en déduire que la catégorie homotopique stable enrichie  $\mathcal{SH}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$  à coefficients dans une catégorie tannakienne de Ext-dimension finie admet une famille homotopiquement génératrice d'objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables (1.5.23). Ce résultat n'est démontré dans [Ayo07b, 4.5.67] que dans le cas où  $\mathcal{M}$  est la catégorie de modèles des  $S^1$ -spectres symétriques ou celle des complexes de  $R$ -modules avec  $R$  un anneau commutatif. On montre que notre localisation est égale à celle d'Ayoub lorsque l'on considère les préfaisceaux à valeurs dans la catégorie des complexes de ind-objets d'une catégorie tannakienne (1.3.18).

On signale d'ailleurs l'existence d'une tierce approche de cette localisation de Bousfield de nature topologique, à savoir celle de [CD09], qui consiste à considérer les complexes de faisceaux au lieu des complexes de préfaisceaux. Cette approche a le bon goût de faciliter l'étude de la fonctorialité par rapport aux foncteurs d'image inverses et d'image directe et aussi par rapport à l'adjoint à gauche  $f_{\sharp}$  du foncteur d'image inverse  $f^*$  pour  $f$  un morphisme lisse. Malheureusement, l'existence de la structure de modèles de [CD09] paraît nécessiter une variante du théorème de l'hyper-recouvrement de Verdier ([Bro73, Theorem 2]) que l'auteur du présent ne sait pas démontrer pour les préfaisceaux à coefficients ind-tannakiens.

*Plan.* On commence par rappeler la définition des carrés Nisnevich-distingués (1.3.2). En utilisant un résultat de [Bar10] sur l'existence de localisations de Bousfield à gauche enrichies, on introduit les structures de modèles projective et injective Nisnevich-locales sur la catégorie des préfaisceaux à valeurs dans une catégorie de modèles monoïdale symétrique  $\mathcal{V}$  (1.3.3). On étudie le comportement de ces localisations par rapport aux structures monoïdales (1.3.5, 1.3.6) et par rapport aux foncteurs d'image inverse et d'image directe (1.3.7, 1.3.8). On vérifie que ces catégories de modèles admettent souvent des familles homotopiquement génératrices d'objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables lorsqu'il en est ainsi de  $\mathcal{V}$ .

Le but principal du reste de ce numéro est de démontrer 1.3.18, qui permet d'identifier

les structures de modèles de 1.3.3 à celles de [Ayo07b, 4.4.34]. Dans 1.3.11, on rappelle deux variantes de la notion d'équivalence faible Nisnevich-locale. Dans 1.3.12, on compare ces deux dans le cas des préfaisceaux à valeurs dans les complexes de groupes abéliens en passant par le résultat principal de [DHI04]. Ensuite, on étudie le comportement des foncteurs fibres vis-à-vis les foncteurs « faisceau Nisnevich associé » (1.3.15). On s'en sert dans 1.3.17 pour donner une caractérisation « fibre par fibre » des équivalences faibles Nisnevich-locales au sens de [Ayo07b, 4.4.28] pour les préfaisceaux à valeurs dans les complexes de ind-objets d'une catégorie tannakienne. On en déduit des équivalences de localisations de Bousfield à gauche (1.3.18).

**Définition 1.3.1** ([CD12b, 1.0]). Soient  $\mathcal{S} \subseteq \text{Sch}^{\text{ft}} \downarrow \mathbf{B}$  une  $\mathfrak{A}$ -petite sous-catégorie et  $\mathcal{P} \subseteq \text{mor}(\mathcal{S})$  une classe de morphismes de  $\mathcal{S}$ . On dit que  $\mathcal{P}$  est **admissible** si elle vérifie les conditions suivantes.

- (i) Tout isomorphisme de  $\mathcal{S}$  appartient à  $\mathcal{P}$ .
  - (ii) La classe  $\mathcal{P}$  est stable par composition.
  - (iii) La classe  $\mathcal{P}$  est stable par tirés-en-arrière : si  $(p : T \rightarrow S) \in \mathcal{P}$  et que  $(f : X \rightarrow S) \in \text{mor}(\mathcal{S})$ , alors le produit fibré  $T \times_S X$  est représentable dans  $\mathcal{S}$  et  $(p_{(X)} : T \times_S X \rightarrow X) \in \mathcal{P}$ .
- Si  $\mathcal{P} \subseteq \text{mor}(\mathcal{S})$  est une classe admissible et que  $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$ , alors on note  $\mathcal{P} \downarrow S$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{S} \downarrow S$  engendrée par les objets  $(p : X \rightarrow S) \in \mathcal{P}$ . On note  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}, S} : \mathcal{P} \downarrow S \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P} \downarrow S, \mathcal{V})$  le plongement de  $\mathcal{V}$ -Yoneda covariant.

Le lecteur pourra inoffensivement supposer que  $\mathcal{S} = \text{Sch}^{\text{sft}} \downarrow \mathbf{B}$  est la catégorie des  $\mathbf{B}$ -schémas séparés de type fini et que  $\mathcal{P} = \text{Sm} \subseteq \text{mor}(\text{Sch}^{\text{sft}} \downarrow \mathbf{B})$  est la classe des morphismes lisses. Le cas où  $\mathcal{P}$  désigne la classe des morphismes de type fini n'est pas sans intérêt (voir par exemple [CD12b, §6]), mais on n'exploitera pas cette possibilité dans ce texte.

**Définition 1.3.2.** Soit  $S \in \text{ob}(\mathcal{S})$  et  $\mathcal{P} \subseteq \text{mor}(\mathcal{S})$  une classe admissible. Un **carré Nisnevich-distingué** dans  $\mathcal{P} \downarrow S$  est un carré cartésien  $Q$  de  $\mathcal{P} \downarrow S$  de la forme

$$(1.3.2.1) \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j'} & Y \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X, \end{array}$$

où  $p$  est étale,  $j$  est une immersion ouverte de complémentaire réduit  $Z \subseteq X$  et le morphisme induit  $p_{(Z)} : Y \times_X Z \rightarrow Z$  est un isomorphisme. On dit que  $X$  est la **base** du carré  $Q$ . On note  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(Q)$  la somme amalgamée homotopique du diagramme  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(U) \leftarrow \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(V) \rightarrow \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(Y)$  dans  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{S} \downarrow S, \mathcal{V})_{\text{proj}}$  ou dans  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{S} \downarrow S, \mathcal{V})_{\text{inj}}$ , de sorte que l'on a un carré homotopiquement cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(V) & \xrightarrow{\mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(j')} & \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(Y) \\ \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(p') \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(U) & \longrightarrow & \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(Q) \end{array}$$

et un morphisme  $\mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(Q) \rightarrow \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(X)$ . Si  $\mathcal{G} \subseteq \text{ob}(\mathcal{V})$  est une  $\mathfrak{A}$ -petite famille d'objets, alors on appelle **équivalence faible Nisnevich-locale génératrice** un élément de la classe de morphismes

$$\begin{aligned} & \mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P} \downarrow S) \\ & := \{V \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(Q) \rightarrow V \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(X) \mid V \in \mathcal{G}, Q \text{ un carré Nisnevich-distingué dans } \mathcal{P} \downarrow S\} \end{aligned}$$

dans  $\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}$ .

**Proposition 1.3.3** ([Bla01, 4.3], [CD12b, §5.1.c], [DHI04, A10]). Soient  $(\mathcal{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{U}$ -tractable et propre à gauche dont tout objet est cofibrant,  $\mathcal{G} \subseteq \text{ob}(\mathcal{V})$  une  $\mathfrak{U}$ -petite famille d'objets,  $\mathcal{S} \in \text{ob}(\mathcal{S})$  et  $\mathcal{P} \subseteq \text{mor}(\mathcal{S})$  une classe admissible contenant les morphismes étales. Alors la catégorie  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})$  est une  $\mathcal{V}$ -catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles  $\mathfrak{U}$ -tractable et propre à gauche lorsqu'on la munit de la structure de  $\mathcal{V}$ -catégorie de 1.1.4 et de l'une des structures de  $\mathfrak{U}$ -modèles suivantes :

- (i) la structure de  $\mathfrak{U}$ -modèles **projective Nisnevich-locale**  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}$  c'est-à-dire la localisation de Bousfield à gauche  $\mathcal{V}$ -enrichie<sup>7</sup> de  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{proj}}$  par rapport à la classe de morphismes  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ ;
- (ii) la structure de  $\mathfrak{U}$ -modèles **injective Nisnevich-locale**  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}}$  c'est-à-dire la localisation de Bousfield à gauche  $\mathcal{V}$ -enrichie de  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{inj}}$  par rapport à la classe de morphismes  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ .

L'identité  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}} \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}}$  est une équivalence de Quillen à gauche. Si  $\mathcal{V}$  est stable, alors il en est de même de  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}$  et de  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}}$ .

*Démonstration.* L'existence, la propriété à gauche et la  $\mathfrak{U}$ -tractabilité des localisations de Bousfield  $\mathcal{V}$ -enrichies par rapport à la  $\mathfrak{U}$ -petite classe  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$  résultent aussitôt de [Bar10, 4.46]. En effet, les  $\mathcal{V}$ -catégories de  $\mathfrak{U}$ -modèles projectives et injectives sont  $\mathfrak{U}$ -tractables et propres à gauche d'après 1.2.7. L'identité est de Quillen à gauche parce que les deux structures de  $\mathfrak{U}$ -modèles ont la même classe d'équivalences faibles et les cofibrations d'une localisation de Bousfield à gauche  $\mathcal{V}$ -enrichie  $L_{(\mathcal{H}/\mathcal{V})} \mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{H}$  sont les cofibrations de  $\mathcal{C}$  d'après [Bar10, (4.46.3)].

Montrons que les structures de  $\mathfrak{U}$ -modèles projective et injective Nisnevich-locales sont stables. D'après 1.2.7,  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{proj}}$  est stable. Notons  $\Sigma^1 : \text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{proj}}) \rightarrow \text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{proj}})$  le foncteur de suspension. Alors  $\Sigma^1 F$  est  $\mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ -local si  $F$  l'est. En effet,  $F$  est  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ -local si et seulement si, pour tout  $(V \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, \mathcal{S}}(Q) \rightarrow V \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, \mathcal{S}}(X)) \in \mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ , le morphisme induit

$$\mathbf{Rmor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{proj}}}^{\mathcal{V}}(V \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, \mathcal{S}}(X), F) \rightarrow \mathbf{Rmor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{proj}}}^{\mathcal{V}}(V \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, \mathcal{S}}(Q), F)$$

est un isomorphisme dans  $\text{ho}(\mathcal{V})$ . Or le foncteur  $\mathbf{Rmor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{proj}}}^{\mathcal{V}}(G, -)$  est triangulé pour tout  $G$ , puisque  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{proj}}$  est stable. En particulier, ce foncteur commute à  $\Sigma^1$ . L'assertion en résulte aussitôt. Par adjonction, on en déduit que  $\Sigma^1$  et son inverse  $\Omega^1$  préservent la classe  $\mathcal{W}_{\text{Nis}}$  des équivalences faibles  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ -locales. Autrement dit, ils induisent des foncteurs

$$\text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{proj}})[\mathcal{W}_{\text{Nis}}^{-1}] \rightarrow \text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{proj}})[\mathcal{W}_{\text{Nis}}^{-1}].$$

Grâce à [Bar10, (4.46.5)], cette localisation s'identifie à la catégorie homotopique de  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}$ . Il s'ensuit que les structures projective et injective Nisnevich-locales sont stables.  $\square$

*Remarque 1.3.4.*

7. Suivant [Bar10, 4.42], si  $\mathcal{C}$  est une  $\mathcal{V}$ -catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles et que  $\mathcal{H}$  est un  $\mathfrak{U}$ -petit ensemble de classes d'homotopie de morphismes de  $\mathcal{C}$ , alors on appelle **localisation de Bousfield  $\mathcal{V}$ -enrichie à gauche** de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{H}$  une  $\mathcal{V}$ -catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles  $L_{(\mathcal{H}/\mathcal{V})} \mathcal{C}$ , munie d'un  $\mathcal{V}$ -foncteur de Quillen à gauche  $\mathcal{C} \rightarrow L_{(\mathcal{H}/\mathcal{V})} \mathcal{C}$  initial parmi les  $\mathcal{V}$ -foncteurs de Quillen à gauche  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  tels que  $F$  transforme les éléments de  $\mathcal{H}$  en équivalences faibles dans  $\mathcal{C}'$ .

(i) Il y a plusieurs variantes de cette localisation. Par exemple, on aurait pu localiser non par rapport à la classe des carrés Nisnevich-distingués mais plutôt par rapport à la classe des hyper-recouvrements par rapport à la topologie Nisnevich ou par rapport à la classe des équivalences faibles au sens de [Ayo07b, 4.4.28]. Pour une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique quelconque, l'auteur ne sait pas montrer que les trois localisations coïncident. On montera néanmoins que c'est le cas lorsque  $\mathcal{V}$  est la catégorie de complexes de ind-objets dans une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne (1.3.18).

(ii) Comme tout objet de  $\mathcal{V}$  est supposé cofibrant, il revient au même de localiser par rapport à  $\mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$  ou par rapport à  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ . Effectivement, si  $V \in \text{ob}(\mathcal{V})$ , alors  $V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}}(-)$  est de Quillen à gauche par rapport à la structure de modèles localisée par rapport à  $\mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$  et tout morphisme de la forme  $\mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(Q) \rightarrow \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X)$  est une équivalence faible entre objets cofibrants dans cette structure de modèles, de sorte que  $V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(Q) \rightarrow V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X)$  est une équivalence faible. Ceci explique pourquoi la classe  $\mathcal{G}$  n'est pas indiquée par la notation  $\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}$ . On verra dans 1.3.5 qu'en choisissant une classe  $\mathcal{G}$  adapté à une situation donnée, on peut faciliter certaines preuves, tout comme un bon choix d'une base d'un espace vectoriel peut faciliter des calculs matriciels, mais deux classes  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}'$  induisent la même localisation de Bousfield.

**Proposition 1.3.5.** *Soient  $(\mathcal{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathcal{U}$ -tractable et propre à gauche dont tout objet est cofibrant,  $\mathcal{G} \subseteq \text{ob}(\mathcal{V})$  une  $\mathcal{U}$ -petite famille d'objets,  $S \in \text{ob}(\mathcal{S})$  et  $\mathcal{P} \subseteq \text{mor}(\mathcal{S})$  une classe admissible contenant les morphismes étales. Si  $\mathcal{G}$  est stable par  $\otimes_{\mathcal{V}}$ , alors  $\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}$  et  $\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}}$  sont des  $\mathcal{V}$ -catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdales symétriques.*

*Démonstration.* Grâce à 1.2.7, les catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles globales  $\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{proj}}$  et  $\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{inj}}$  sont monoïdales symétriques. D'après [Bar10, 4.47] et 1.2.14, il suffit de vérifier que  $\underline{\text{mor}}_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}}(V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(Y), F)$  est  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ -local pour tous  $V \in \mathcal{G}$ ,  $Y \in \text{ob}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$  et  $F \in \text{ob}(\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V}))$  avec  $F$  injectivement fibrant et  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ -local. Soit  $(W \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(Q) \rightarrow W \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X)) \in \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ . Par  $\mathcal{V}$ -adjonction, le morphisme

$$\begin{array}{c} \text{Rmor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{inj}}}^{\mathcal{V}} \left( W \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X), \underline{\text{mor}}_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \left( V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(Y), F \right) \right) \\ \downarrow \\ \text{Rmor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{inj}}}^{\mathcal{V}} \left( W \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(Q), \underline{\text{mor}}_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \left( V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(Y), F \right) \right) \end{array}$$

s'identifie au morphisme

$$\begin{array}{c} \text{Rmor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{inj}}}^{\mathcal{V}} \left( (V \otimes_{\mathcal{V}} W) \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X \times_S Y), F \right) \\ \downarrow \\ \text{Rmor}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{inj}}}^{\mathcal{V}} \left( (V \otimes_{\mathcal{V}} W) \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(Q \times_S Y), F \right). \end{array}$$

Alors  $((V \otimes_{\mathcal{V}} W) \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(Q \times_S Y) \rightarrow (V \otimes_{\mathcal{V}} W) \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X \times_S Y)) \in \mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$  et l'assertion en résulte.  $\square$

**Lemme 1.3.6.** *Soient  $(\mathcal{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathcal{U}$ -tractable et propre à gauche dont tout objet est cofibrant,  $\mathcal{G} \subseteq \text{ob}(\mathcal{V})$  une  $\mathcal{U}$ -petite famille d'objets,  $S \in \text{ob}(\mathcal{S})$  et  $\mathcal{P} \subseteq \text{mor}(\mathcal{S})$  une classe admissible contenant les morphismes étales. Si  $\mathcal{G}$  est stable par  $\otimes_{\mathcal{V}}$ , alors  $\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}$  et  $\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}}$  vérifient l'axiome du monoïde.*

*Démonstration.* Comme dans 1.2.11, il suffit de traiter du cas injectif. Tout objet de la catégorie  $\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})$  est cofibrant objet par objet pour la structure de  $\mathfrak{A}$ -modèles injective, puisque tout objet de  $\mathcal{V}$  est cofibrant. Les cofibrations injectives sont les cofibrations injectives Nisnevich-locales. D'après 1.2.10(ii), on gagne.  $\square$

**Lemme 1.3.7.** Soient  $f^* : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}' : f_*$  une  $\mathcal{V}$ -adjonction de Quillen entre  $\mathcal{V}$ -catégories de  $\mathfrak{A}$ -modèles et  $S \subseteq \text{mor}(\mathcal{C})$  un  $\mathfrak{A}$ -petit ensemble tel que la localisation de Bousfield à gauche  $\mathcal{V}$ -enrichie  $L_{(S/\mathcal{V})} \mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $S$  existe. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) le foncteur  $f^* : L_{(S/\mathcal{V})} \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  est de Quillen à gauche ;
- (ii) le foncteur  $f_* : \mathcal{C}' \rightarrow L_{(S/\mathcal{V})} \mathcal{C}$  préserve les objets fibrants ;
- (iii) le foncteur  $f^* : L_{(S/\mathcal{V})} \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  transforme les équivalences faibles entre objets cofibrants en équivalences faibles ;
- (iv) le foncteur  $Lf^* : \text{ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ho}(\mathcal{C}')$  transforme les éléments de  $S$  en isomorphismes.

*Démonstration.* En appliquant les descriptions de [Bar10, 4.46] des cofibrations, des équivalences faibles et des objets fibrants dans  $L_{(S/\mathcal{V})} \mathcal{C}$ , on se ramène à la situation des localisations de Bousfield Set-enrichies de [Hir03, 3.1.6, 3.3.17].  $\square$

**Proposition 1.3.8.** Soient  $(\mathcal{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  une catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{A}$ -tractable et propre à gauche dont tout objet est cofibrant,  $\mathcal{G} \subseteq \text{ob}(\mathcal{V})$  une  $\mathfrak{A}$ -petite famille d'objets stable par  $\otimes_{\mathcal{V}}$ ,  $S \in \text{ob}(S)$ ,  $\mathcal{P} \subseteq \text{mor}(S)$  une classe admissible contenant les morphismes étales et  $(f : T \rightarrow S) \in \text{mor}(S)$ .

- (i) La  $\mathcal{V}$ -adjonction  $f^* : \mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}} \rightleftarrows \mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow T, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}} : f_*$  induite par le foncteur

$$(p : X \rightarrow S) \mapsto (p_{(T)} : X \times_S T \rightarrow T) : \mathcal{P}\downarrow S \rightarrow \mathcal{P}\downarrow T$$

est de Quillen.

- (ii) Si  $f \in \mathcal{P}$ , alors la  $\mathcal{V}$ -adjonction  $f_{\sharp} : \mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow T, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}} \rightarrow \mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}} : f^*$  induite par le foncteur

$$(p : X \rightarrow T) \mapsto (fp : X \rightarrow S) : \mathcal{P}\downarrow T \rightarrow \mathcal{P}\downarrow S$$

est de Quillen.

*Démonstration.*

(i) D'après 1.2.12,  $f^* \dashv f_*$  est de Quillen par rapport aux structures projectives. D'après 1.3.7, il suffit de montrer que  $f^*$  transforme les éléments de  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow S)$  en éléments de  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow T)$ , ce qui résulte de ce que le morphisme  $f^*(V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(\mathcal{Q}) \rightarrow V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(\mathcal{X}))$  s'identifie à  $(V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, T}(\mathcal{Q} \times_S T) \rightarrow V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, T}(\mathcal{X} \times_S T)) \in \mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow T)$ .

(ii) On raisonne de la même façon. Dans ce cas, il suffit de remarquer que  $f_{\sharp}(V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, T}(\mathcal{Q}) \rightarrow V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, T}(\mathcal{X}))$  s'identifie à  $V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(\mathcal{Q}) \rightarrow V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(\mathcal{X})$ .  $\square$

**Proposition 1.3.9.** Soient  $(\mathcal{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  une catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{A}$ -tractable et propre à gauche dont tout objet est cofibrant,  $\mathcal{G} \subseteq \text{ob}(\mathcal{V})$  une  $\mathfrak{A}$ -petite famille d'objets stable par  $\otimes_{\mathcal{V}}$ ,  $S \in \text{ob}(S)$  et  $\mathcal{P} \subseteq \text{mor}(S)$  une classe admissible contenant les morphismes étales. On suppose de plus que  $\mathcal{V}$  est stable, que les équivalences faibles de  $\mathcal{V}$  sont stables par  $\mathfrak{A}$ -petites colimites filtrantes et que  $\mathcal{G}$  est une famille homotopiquement génératrice d'objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables. Alors  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}}(\mathcal{P}\downarrow S)$  est une famille homotopiquement génératrice d'objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables dans  $\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}$  et dans  $\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}}$ .

*Démonstration.* Le fait que  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} (\mathcal{P}\downarrow S)$  engendre  $\text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}})$  se démontre de la même façon que l’assertion analogue de 1.2.14 *mutatis mutandis*. Montrons que  $V \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X)$  est homotopiquement  $\aleph_0$ -présentable dans  $\text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}})$  pour tous  $V \in \mathcal{G}$ ,  $X \in \text{ob}(\mathcal{P}\downarrow S)$ . Encore une fois, on imite la preuve de 1.2.14. On fixe  $F : A \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})$  un  $\aleph$ -petit diagramme filtrant,  $V \in \mathcal{G}$  et  $X \in \text{ob}(\mathcal{P}\downarrow S)$ . Par  $\text{ho}(\mathcal{V})$ -adjonction entre  $(-)\odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V},L} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X)$  et  $\mathbf{Rmor}_{\text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X), -)$  et la  $\aleph_0$ -présentabilité homotopique de  $V$  dans  $\text{ho}(\mathcal{V})$ , on est amené à montrer que

$$\mathbf{Lcolim}_{\alpha \in A} \mathbf{Rmor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X), F(\alpha)) \rightarrow \mathbf{Rmor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X), \mathbf{Lcolim}_{\alpha \in A} F(\alpha))$$

est un isomorphisme dans  $\text{ho}(\mathcal{V})$ . Quitte à remplacer  $F$  par un diagramme simultanément cofibrant et fibrant dans  $\mathcal{P}\text{Sh}(A^{\text{op}}, \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}})_{\text{proj}}$ , on peut supposer que  $\text{colim}_{\alpha \in A} = \mathbf{Lcolim}_{\alpha \in A} F(\alpha)$  et que  $F(\alpha)$  est fibrant pour la structure projective Nisnevich-locale pour tout  $\alpha \in A$ . De plus,

$$\begin{array}{c} \mathbf{Lcolim}_{\alpha \in A} \mathbf{Rmor}_{\text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X), F(\alpha)) \\ \downarrow \sim \\ \text{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{Rmor}_{\text{ho}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}})}^{\mathcal{V}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X), F(\alpha)), \end{array}$$

puisque les équivalences faibles de  $\mathcal{V}$  sont stables par  $\aleph$ -petites colimites filtrantes. Cette stabilité par  $\aleph$ -petites colimites filtrantes entraîne aussi que la  $\aleph$ -petite colimite filtrante  $\text{colim}_{\alpha \in A} F(\alpha)$  d’objets  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow S)$ -locaux et projectivement fibrants est  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow S)$ -locale. Effectivement, si  $(W \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(Q) \rightarrow W \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(Y)) \in \mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow S)$ , alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{Rmor}_{\mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{h}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})}^{\mathcal{Y}} \left( W \odot_{\mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{h}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})}^{\mathcal{Y}} \mathbf{y}_{\mathcal{Y}, \mathcal{S}}(Y), F(\alpha) \right) & \longrightarrow & \mathrm{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{Rmor}_{\mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{h}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})}^{\mathcal{Y}} \left( W \odot_{\mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{h}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})}^{\mathcal{Y}} \mathbf{y}_{\mathcal{Y}, \mathcal{S}}(Q), F(\alpha) \right) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{Rmor}_{\mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{h}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})}^{\mathcal{Y}} \left( W \odot_{\mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{h}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})}^{\mathcal{Y}} \mathbf{y}_{\mathcal{Y}, \mathcal{S}}(Y), \mathrm{colim}_{\alpha \in A} F(\alpha) \right) & \longrightarrow & \mathbf{Rmor}_{\mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{h}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})}^{\mathcal{Y}} \left( W \odot_{\mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{h}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})}^{\mathcal{Y}} \mathbf{y}_{\mathcal{Y}, \mathcal{S}}(Q), \mathrm{colim}_{\alpha \in A} F(\alpha) \right)
\end{array}$$

dans  $\mathrm{ho}(\mathcal{V})$  dont les flèches verticales sont des isomorphismes d'après 1.2.14 et dont la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme en tant que  $\mathcal{U}$ -petite colimite filtrante d'équivalences faibles. On fixe une résolution fibrante  $\rho : \mathrm{colim}_{\alpha \in A} F(\alpha) \rightarrow F'$  dans la structure projective Nisnevich-locale. En tant qu'équivalence  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{Y}} \mathcal{L}_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ -locale entre objets  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{Y}} \mathcal{L}_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ -locaux,  $\rho$  est une équivalence faible objet par objet. Du coup, on a un diagramme homotopiquement commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\text{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{Rmor}_{\mathcal{P}\mathcal{S}h(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{Y})_{\text{Nis-proj}}}^{\mathcal{Y}} \left( \mathbf{y}_{\mathcal{Y}, S}(\mathbf{X}), \mathbf{F}(\alpha) \right) & \xrightarrow{\sim} & \text{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{mor}_{\mathcal{P}\mathcal{S}h(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{Y})_{\text{Nis-proj}}}^{\mathcal{Y}} \left( \mathbf{y}_{\mathcal{Y}, S}(\mathbf{X}), \mathbf{F}(\alpha) \right) \\
\downarrow & & \downarrow \sim \\
\mathbf{Rmor}_{\mathcal{P}\mathcal{S}h(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{Y})_{\text{Nis-proj}}}^{\mathcal{Y}} \left( \mathbf{y}_{\mathcal{Y}, S}(\mathbf{X}), \text{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{F}(\alpha) \right) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{mor}_{\mathcal{P}\mathcal{S}h(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{Y})_{\text{Nis-proj}}}^{\mathcal{Y}} \left( \mathbf{y}_{\mathcal{Y}, S}(\mathbf{X}), \text{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{F}(\alpha) \right) \\
& & \downarrow \sim \\
& & \mathbf{mor}_{\mathcal{P}\mathcal{S}h(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{Y})_{\text{Nis-proj}}}^{\mathcal{Y}} \left( \mathbf{y}_{\mathcal{Y}, S}(\mathbf{X}), \mathbf{F}' \right) ,
\end{array}$$

ce qui achève la démonstration. □

**Lemme 1.3.10.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie de  $\mathcal{A}$ -modèles  $\mathcal{A}$ -combinatoire et propre à gauche et  $S \subseteq \text{mor}(\mathcal{C})$  un  $\mathcal{A}$ -petit ensemble de morphismes tel que la localisation de Bousfield à gauche  $\lambda = \text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow L_S \mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $S$  existe.

- (i) Si  $A$  est une  $\mathcal{A}$ -petite catégorie et  $F : A \rightarrow \mathcal{C}$  un diagramme dans  $\mathcal{C}$ , alors l'image de la colimite homotopique  $\mathbf{Lcolim} F$  de  $F$  dans  $\mathcal{C}$  par le foncteur  $\text{ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ho}(L_S \mathcal{C})$  est isomorphe à la colimite homotopique  $\mathbf{Lcolim} \lambda \circ F$ .
- (ii) Si les équivalences faibles de  $\mathcal{C}$  sont stables par  $\mathcal{A}$ -petites colimites filtrantes, alors les équivalences faibles  $S$ -locales sont aussi stables par  $\mathcal{A}$ -petites colimites filtrantes.

*Démonstration.*

- (i) Le foncteur de localisation  $\lambda : \mathcal{C} \rightarrow L_S \mathcal{C}$  est de Quillen à gauche et préserve les équivalences faibles. Par conséquent, le foncteur dérivé  $\mathbf{L}\lambda = \lambda$  préserve les colimites homotopiques.

(ii) Soient  $F, G : A \rightarrow \mathcal{C}$  deux  $\mathcal{U}$ -petites diagrammes filtrants dans  $\mathcal{C}$  et  $f : F \rightarrow G$  un morphisme de diagrammes tel que  $f_\alpha : F(\alpha) \rightarrow G(\alpha)$  soit une équivalence faible  $S$ -locale pour tout  $\alpha \in A$ . On choisit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{f'} & G' \\ \rho_F \downarrow & & \downarrow \rho_G \\ F & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

dans  $\mathcal{F}\text{un}(A, \mathcal{C})_{\text{proj}}$  tel que  $\rho_F$  et  $\rho_G$  soient des résolutions cofibrantes. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{colim } F & \xleftarrow{\text{colim } \rho_F} & \text{colim } F' & \xlongequal{\quad} & \text{colim } \lambda \circ F' \\ \text{colim } f \downarrow & & \text{colim } f' \downarrow & & \downarrow \text{colim } \lambda \circ f' \\ \text{colim } G & \xleftarrow{\text{colim } \rho_G} & \text{colim } G' & \xlongequal{\quad} & \text{colim } \lambda \circ G' \end{array}$$

dont le carré de droite s'identifie au carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}\text{colim } F & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{L}\text{colim } \lambda \circ F \\ \mathbf{L}\text{colim } f \downarrow & & \downarrow \mathbf{L}\text{colim } \lambda \circ f \\ \mathbf{L}\text{colim } G & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{L}\text{colim } \lambda \circ G \end{array}$$

dans  $\text{ho}(L_S \mathcal{C})$  dont les flèches horizontales sont des isomorphismes d'après (i). De plus, comme les équivalences faibles de  $\mathcal{C}$  sont stables par  $\mathcal{U}$ -petites colimites filtrantes,  $\mathbf{L}\text{colim } f \cong \text{colim } f$  dans  $\text{ho}(\mathcal{C})$  et donc  $\text{colim } \rho_F$  et  $\text{colim } \rho_G$  sont des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$  :  $\rho_F$  et  $\rho_G$  sont des équivalences faibles objet par objet. Il ne reste qu'à remarquer que  $\mathbf{L}\text{colim } \lambda \circ f$  est un isomorphisme de  $\text{ho}(L_S \mathcal{C})$  par définition de la colimite homotopique, de sorte que  $\mathbf{L}\text{colim } f$  et  $\text{colim } f$  sont des isomorphismes de  $\text{ho}(L_S \mathcal{C})$ .  $\square$

*Notation 1.3.11.* Soient  $\mathcal{C}$  une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie et  $\tau$  une topologie de Grothendieck sur  $\mathcal{C}$ . On munit la catégorie  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{A}b)$  des complexes de  $\mathcal{U}$ -groupes abéliens de la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{U}$ -combinatoire et propre de [Bek00, 3.13] dont les cofibrations et les équivalences sont les monomorphismes et les quasi-isomorphismes, respectivement. La catégorie  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{A}b))$  admet deux structures de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{U}$ -combinatoires et propres à gauche, dites « globales » : la structure projective  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{A}b))_{\text{proj}}$ , dont les équivalences faibles et les fibrations sont les équivalences faibles et les fibrations objet par objet ; et la structure injective  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{A}b))_{\text{inj}}$ , dont les cofibrations et les équivalences faibles sont les cofibrations et les équivalences faibles objet par objet, respectivement.

Soit  $p : \mathcal{X} \rightarrow X$  un  $\tau$ -hyper-recouvrement. En particulier,  $\mathcal{X}$  est un préfaisceau simplicial donné par un  $\mathcal{U}$ -petit coproduit de représentables en chaque degré simplicial. Si  $U := \coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \text{Set})$  est un  $\mathcal{U}$ -petit coproduit d'objets représentables, alors on pose  $\mathbf{y}_Z(U) := \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbf{y}_Z(U_\alpha)$ , où  $\mathbf{y}_Z : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}b)$  désigne le plongement de  $\mathcal{A}b$ -Yoneda. On note  $\mathbf{y}_Z(\mathcal{X})$  la colimite homotopique  $\mathbf{L}\text{colim}_{n \in \Delta^{\text{op}}} (\mathbf{y}_Z(\mathcal{X}_n)[0])$ , où  $(-)[0] : \mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{A}b)$  est le foncteur qui associe à un groupe abélien  $A$  le complexe donné par  $A$  concentré en degré 0. Cette colimite homotopique est représentée par le complexe dont l'objet placé en degré  $n$  est  $\mathbf{y}_Z(\mathcal{X}_n)$  et dont les différentielles sont les sommes alternées des morphismes faces. On remarque que  $p$  induit morphisme  $\mathbf{y}_Z(p) : \mathbf{y}_Z(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{y}_Z(X)$ .

On dit qu'une classe  $S$  de  $\tau$ -hyper-recouvrements dans  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \text{Set}_\Delta)$  est **dense** si tout  $\tau$ -hyper-recouvrement  $p : \mathcal{X} \rightarrow X$  admet un raffinement par un élément  $p' : \mathcal{X}' \rightarrow X$  de  $S$ . D'après [DHI04, Proposition 6.4], il existe un  $\mathcal{U}$ -petit ensemble  $S_\tau$  de  $\tau$ -hyper-recouvrements dans  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \text{Set}_\Delta)$  qui est dense.

On dispose de deux structures de  $\mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b)$ -catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{U}$ -combinatoire et propres à gauche, dites «  $\tau$ -locales » : la structure projective  $\tau$ -locale  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{S_\tau\text{-proj}}$ , localisation de Bousfield à gauche de  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\text{proj}}$  par rapport à la  $\mathcal{U}$ -petite classe  $\mathbf{y}_Z(S_\tau) := \{\mathbf{y}_Z(p)[n] : \mathbf{y}_Z(\mathcal{X})[n] \rightarrow \mathbf{y}_Z(X)[n] \mid (p : \mathcal{X} \rightarrow X) \in S_\tau, n \in \mathbf{Z}\}$ ; et la structure injective  $\tau$ -locale  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{S_\tau\text{-inj}}$ , localisation de Bousfield à gauche de  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\text{inj}}$  par rapport à la classe  $\mathbf{y}_Z(S_\tau)$ .

On dispose aussi de deux structures de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\tau$ -locales au sens de Jardine, c'est-à-dire les structures de  $\mathcal{U}$ -modèles définies dans [Ayo07b, 4.4.34], que l'on notera

$$\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\tau\text{-proj}} \quad \text{et} \quad \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\tau\text{-inj}}.$$

Enfin, on dispose de deux structures de  $\mathcal{U}$ -modèles

$$\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\text{proj}} \quad \text{et} \quad \text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\text{inj}}$$

sur la catégorie  $\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))$  des  $\tau$ -faisceaux de complexes de groupes abéliens sur  $\mathcal{C}$  et, d'après [Ayo07b, 4.4.43], de deux équivalences de Quillen à gauche

$$\begin{aligned} a_\tau^* : \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\tau\text{-proj}} &\rightarrow \text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\text{proj}} \\ \text{et } a_\tau^* : \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\tau\text{-inj}} &\rightarrow \text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\text{inj}}, \end{aligned}$$

où  $a_\tau^*$  désigne le foncteur «  $\tau$ -faisceau associé ». Il existe un isomorphisme de catégories

$$\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b)) \simeq \mathcal{Cplx}(\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{A}b))$$

et l'on remarque que, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  et tout  $K \in \text{ob}(\mathcal{Cplx}(\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{A}b)))$ , le  $n$ -ième faisceau de cohomologie  $\mathfrak{h}^n K$  est le faisceau associé au préfaisceau

$$X \mapsto \text{hom}_{\mathcal{D}(\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{A}b))}(\mathbf{y}_Z(X)[-n], K),$$

où  $\mathcal{D}(\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{A}b))$  est la catégorie dérivée de la catégorie abélienne de  $\mathcal{U}$ -Grothendieck  $\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{A}b)$ . Par conséquent, les catégories

$$\text{ho}\left(\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\text{proj}}\right) \quad \text{et} \quad \text{ho}\left(\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\text{inj}}\right)$$

sont équivalentes à  $\mathcal{D}(\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{A}b))$ , car les équivalences faibles de ces deux catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles sont les quasi-isomorphismes de complexes de faisceaux.

**Proposition 1.3.12.** *Les notations et les hypothèses sont celles de 1.3.11. Les structures de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{S_\tau\text{-proj}}$  et  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\tau\text{-proj}}$  sont égales. De même, les structures de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{S_\tau\text{-inj}}$  et  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{A}b))_{\tau\text{-inj}}$  sont égales.*

*Démonstration.* On traite du cas projectif, le cas injectif étant formellement identique. Les deux structures de  $\mathcal{U}$ -modèles sont des localisations de Bousfield à gauche de la structure projective globale  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(Ab))_{\text{proj}}$ . En particulier, elles ont la même classe de cofibrations. D'après la conjecture d'Illusie [Jar86, 2.5] et la correspondance de Dold-Kan, les morphismes de  $\mathbf{y}_Z(S_\tau)$  sont des équivalences faibles de  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(Ab))_{\tau\text{-proj}}$ . Grâce à 1.3.7, le foncteur

$$\text{id} : \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(Ab))_{S_\tau\text{-proj}} \rightarrow \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(Ab))_{\tau\text{-proj}}$$

est de Quillen à gauche. Du coup, ce foncteur est une localisation de Bousfield à gauche et il préserve les équivalences faibles. On en déduit un foncteur pleinement fidèle

$$\text{ho}(\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(Ab))_{\tau\text{-proj}}) \hookrightarrow \text{ho}(\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(Ab))_{S_\tau\text{-proj}})$$

et il suffit de montrer qu'il est essentiellement surjectif.

Soit  $F$  un objet fibrant et, en particulier,  $\mathbf{y}_Z(S_\tau)$ -local de  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(Ab))_{S_\tau\text{-proj}}$ . On fixe une résolution fibrante  $\rho_F : F \rightarrow F'$  dans la structure projective  $\tau$ -locale et l'on prétend que c'est une équivalence faible  $\mathbf{y}_Z(S_\tau)$ -locale, voire une équivalence faible objet par objet, ce qui revient au même parce que la source et le but sont  $\mathbf{y}_Z(S_\tau)$ -locaux. Le morphisme  $\rho_F$  est une équivalence faible  $\tau$ -locale par définition. Pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on note  $\mathbf{t}^{\leq n} : \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(Ab)) \rightarrow \mathcal{Cplx}^{\leq n}(\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, Ab))$  le foncteur qui associe à un complexe de préfaisceaux  $K$  le complexe

$$\dots \rightarrow K^{n-2} \xrightarrow{d^{n-2}} K^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} \ker(d^n) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

concentré en degrés  $\leq n$  et l'on note  $\Gamma^{\leq n} : \mathcal{Cplx}^{\leq n}(\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, Ab)) \rightarrow \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, Ab)_\Delta$  l'équivalence de Dold-Kan. On constate que  $\Gamma^{\leq n} \mathbf{t}^{\leq n}$  transforme les objets  $\mathbf{y}_Z(S_\tau)$ -locaux en préfaisceaux d'ensembles simpliciaux  $S_\tau$ -locaux. De plus,  $\Gamma^{\leq n} \mathbf{t}^{\leq n}$  transforme les équivalences faibles  $\tau$ -locales en équivalences faibles  $\tau$ -locales, c'est-à-dire en morphismes de préfaisceaux d'ensembles simpliciaux qui induisent des isomorphismes sur les  $\tau$ -faisceaux d'homotopie. Il en résulte que  $\Gamma^{\leq n} \mathbf{t}^{\leq n} \rho_F : \mathbf{t}^{\leq n} F \rightarrow \mathbf{t}^{\leq n} F'$  est une équivalence faible  $\tau$ -locale entre objets  $S_\tau$ -locaux. D'après [DHI04, Theorem 6.2],  $\Gamma^{\leq n} \mathbf{t}^{\leq n} \rho_F$  est une équivalence faible  $S_\tau$ -locale et donc une équivalence faible objet par objet pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . Il en résulte que  $\mathbf{t}^{\leq n} \rho_F$  est une équivalence faible objet par objet pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . On  $\alpha = \text{colim}_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \mathbf{t}^{\leq n} \alpha$  et il suffit de remarquer qu'une  $\mathcal{U}$ -petite colimite filtrante d'équivalences faibles de  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(Ab))_{\text{proj}}$  est encore une équivalence faible.  $\square$

**Corollaire 1.3.13.** *Les notations et les hypothèses sont celles de 1.3.11. Le foncteur «  $\tau$ -faisceau associé » induit des équivalences de Quillen à gauche*

$$a_\tau^* : \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(Ab))_{\tau\text{-proj}} \rightarrow \text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(Ab))_{\text{proj}}$$

et  $a_\tau^* : \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(Ab))_{\tau\text{-inj}} \rightarrow \text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{Cplx}(Ab))_{\text{inj}}$ .

*Démonstration.* Cela résulte aussitôt de 1.3.12 et de [Ayo07b, 4.4.43].  $\square$

**Lemme 1.3.14.** *Soient  $\mathcal{C}$  une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie,  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne de  $\mathcal{U}$ -Grothendieck,  $\mathcal{G} \subseteq \text{ob}(\mathcal{A})$  une  $\mathcal{U}$ -petite famille de générateurs denses et  $\mathfrak{N}_0$ -présentables et  $\tau$  une prétopologie de Grothendieck sur  $\mathcal{C}$  telle que, pour tous  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ,  $\mathcal{U} \in \text{Cov}_\tau(X)$ ,  $(f : U \rightarrow X) \in \mathcal{U}$  et  $(g : Y \rightarrow X) \in \text{mor}(\mathcal{C})$ , le produit fibré  $Y \times_X U$  soit représentable dans  $\mathcal{C}$ . Alors l'inclusion  $a_{\tau*} : \text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  admet un adjoint à gauche exact  $a_\tau^*$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , on note  $\text{cov}_\tau(X)$  l'ensemble de  $\tau$ -recouvrements de  $X$ . Un morphisme de  $\tau$ -recouvrements  $h : \{f_\gamma : U_\gamma \rightarrow X\}_{\gamma \in \Gamma} \rightarrow \{g_{\gamma'} : V_{\gamma'} \rightarrow X\}_{\gamma' \in \Gamma'}$  est la donnée d'un morphisme d'ensembles  $\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  et, pour  $\gamma \in \Gamma$ , d'un morphisme  $h_\gamma : U_\gamma \rightarrow V_{\sigma(\gamma)}$  tel que  $f_\gamma = g_{\sigma(\gamma)} h_\gamma$ . Ces morphismes de  $\tau$ -recouvrements font de  $\text{cov}_\tau(X)$  une  $\mathfrak{A}$ -petite catégorie. Comme remarqué dans [Art62, §2.1, Remark 1],  $\text{cov}_\tau(X)$  n'est pas filtrante et l'on est amené à considérer la catégorie  $C_\tau(X)$  définie par le pré-ordre  $\geq$  suivant :  $\mathcal{U} \geq \mathcal{V}$  si et seulement s'il existe un morphisme  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  dans  $\text{cov}_\tau(X)$ . La catégorie  $C_\tau(X)$  est filtrante : si  $\mathcal{U} = \{f_\gamma : U_\gamma \rightarrow X\}_{\gamma \in \Gamma}$  et  $\mathcal{V} = \{g_{\gamma'} : V_{\gamma'} \rightarrow X\}_{\gamma' \in \Gamma'}$  sont deux  $\tau$ -recouvrements de  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , alors  $\{U_\gamma \times_X V_{\gamma'} \rightarrow X\}_{(\gamma, \gamma') \in \Gamma \times \Gamma'}$  est une borne supérieure de  $\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\}$  et il en résulte que  $C_\tau(X)$  est un ensemble ordonné filtrant.

Soit  $F \in \text{ob}(\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$  et considérons  $\check{H}^0(-, F) : \text{cov}_\tau(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$  défini par

$$\check{H}^0(\{f_\gamma : U_\gamma \rightarrow X\}_{\gamma \in \Gamma}, F) := \ker \left( \prod_{\gamma \in \Gamma} F(U_\gamma) \rightrightarrows \prod_{(\gamma, \gamma') \in \Gamma^2} F(U_\gamma \times_X U_{\gamma'}) \right),$$

où les deux flèches parallèles sont celles induites par les projections canoniques  $U_\gamma \times_X U_{\gamma'} \rightarrow U_\gamma$  et  $U_\gamma \times_X U_{\gamma'} \rightarrow U_{\gamma'}$ . D'après [Ser55, §21, Proposition 3], deux flèches parallèles  $\mathcal{U} \rightrightarrows \mathcal{V}$  dans  $\text{cov}_\tau(X)$  induisent le même morphisme  $\check{H}^0(\mathcal{V}, F) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, F)$ . Autrement dit,  $\check{H}^0(-, F)$  se factorise de manière unique par le foncteur canonique  $\text{cov}_\tau(X)^{\text{op}} \rightarrow C_\tau(X)^{\text{op}}$ . On pose  $F^+(X) := \text{colim}_{\mathcal{U} \in C_\tau(X)} \check{H}^0(\mathcal{U}, F)$ . Pour tout  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{C}$  et pour tout  $\mathcal{U} \in \text{ob}(C_\tau(Y))$ , on a un morphisme  $\check{H}^0(\mathcal{U}, F) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U} \times_Y X, F)$  qui induit un morphisme bien défini  $F^+(Y) \rightarrow F^+(X)$  qui fait de  $F^+$  un objet de  $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ . Cette construction dépend fonctoriellement de  $F$  et l'on en déduit un endofoncteur  $(-)^+ : \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ . Vu que les  $\mathfrak{A}$ -petites colimites filtrantes, les produits et les noyaux préservent les limites finies, le foncteur  $(-)^+$  est exact à gauche.

Pour tous  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ,  $\mathcal{U} = \{U_\gamma \rightarrow X\}_{\gamma \in \Gamma} \in \text{ob}(C_\tau(X))$  et  $F \in \text{ob}(\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$ , le morphisme  $F(X) \rightarrow F(U_\gamma)$  induit un morphisme canonique  $F(X) \rightarrow \prod_{\gamma \in \Gamma} F(U_\gamma)$  qui se factorise canoniquement à travers  $\check{H}^0(\mathcal{U}, F)$  par functorialité. Cela nous fournit un morphisme  $\eta : \text{id}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A})} \rightarrow (-)^+$ . On rappelle qu'un préfaisceau  $F$  est dit  $\tau$ -séparé lorsque  $\eta_F : F \rightarrow F^+$  est un monomorphisme.

On prétend que  $F^+$  est  $\tau$ -séparé pour tout  $F \in \text{ob}(\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$ , c'est-à-dire que  $F^+(X) \rightarrow (F^+)^+(X)$  est un monomorphisme pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ . Il suffit de vérifier que, pour tout  $G \in \mathcal{G}$ , on a  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(G, \ker(\eta_{F^+(X)})) = 0$ . Par définition, la famille  $\{\text{hom}_{\mathcal{A}}(G, -)\}_{G \in \mathcal{G}}$  est conservative et tout élément de cette famille préserve les  $\mathfrak{A}$ -petites limites. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \text{hom}_{\mathcal{A}} \left( G, \ker \left( \prod_{\gamma \in \Gamma} F(U_\gamma) \rightrightarrows \prod_{(\gamma, \gamma') \in \Gamma^2} F(U_\gamma \times_X U_{\gamma'}) \right) \right) \\ &= \ker \left( \prod_{\gamma \in \Gamma} \text{hom}_{\mathcal{A}}(G, F(U_\gamma)) \rightrightarrows \prod_{(\gamma, \gamma') \in \Gamma^2} \text{hom}_{\mathcal{A}}(G, F(U_\gamma \times_X U_{\gamma'})) \right) \end{aligned}$$

pour tout  $G \in \mathcal{G}$ . De plus,  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(G, -)$  préserve les  $\mathfrak{A}$ -petites colimites filtrantes pour tout  $G \in \mathcal{G}$  car  $\mathcal{G}$  est supposé formé d'objets  $\aleph_0$ -présentables. Par suite,  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(G, -)$  commute à  $(-)^+$ . Les foncteurs  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(G, -)$ ,  $G \in \mathcal{G}$ , étant exacts à gauche, on a

$$\text{hom}_{\mathcal{A}}(G, \ker(\eta_{F^+(X)})) = \ker(\text{hom}_{\mathcal{A}}(G, \eta_{F^+(X)})) = \ker(\eta_{\text{hom}_{\mathcal{A}}(G, F^+(X))}) = 0,$$

où la dernière égalité résulte de [Art62, Lemma 2.1.2(i)], qui dit que l'image de  $(-)^+ : \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}b) \rightarrow \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}b)$  est formée de préfaisceaux  $\tau$ -séparés. La conservativité de la famille  $\{\text{hom}_{\mathcal{A}}(G, -)\}_{G \in \mathcal{G}}$  entraîne que  $\ker(\eta_{F^+, X}) = 0$  et donc que  $F^+$  est  $\tau$ -séparé.

On prétend que  $F^+$  est un  $\tau$ -faisceau lorsque  $F \in \text{ob}(\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$  est  $\tau$ -séparé. Pour le démontrer, il faut établir que le diagramme

$$0 \rightarrow F^+(X) \rightarrow \prod_{\gamma \in \Gamma} F^+(U_\gamma) \rightrightarrows \prod_{(\gamma, \gamma') \in \Gamma^2} F^+(U_\gamma \times_X U_{\gamma'})$$

est exact pour tous  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ,  $\{f_\gamma : U_\gamma \rightarrow X\}_{\gamma \in \Gamma} \in \text{cov}_\tau(X)$ . La propriété universelle du noyau induit un morphisme canonique

$$F^+(X) \rightarrow \ker \left( \prod_{\gamma \in \Gamma} F^+(U_\gamma) \rightrightarrows \prod_{(\gamma, \gamma') \in \Gamma^2} (U_\gamma \times_X U_{\gamma'}) \right)$$

et il faut montrer que c'est un isomorphisme. Les foncteurs  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(G, -)$ ,  $G \in \mathcal{G}$ , commutent à  $(-)^+$  et forment une famille conservative, de sorte qu'il suffit de montrer que

$$\text{hom}_{\mathcal{A}}(G, F)^+(X) \rightarrow \ker \left( \prod_{\gamma \in \Gamma} \text{hom}_{\mathcal{A}}(G, F)^+(U_\gamma) \rightrightarrows \prod_{(\gamma, \gamma') \in \Gamma^2} \text{hom}_{\mathcal{A}}(G, F)^+(U_\gamma \times_X U_{\gamma'}) \right)$$

est un isomorphisme pour tout  $G \in \mathcal{G}$ . Or cela résulte de [Art62, Lemma 2.1.2(ii)]. Effectivement,  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(G, F) \in \text{ob}(\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$  est  $\tau$ -séparé et  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(G, F)^+$  est donc un  $\tau$ -faisceau.

En résumé, il existe un foncteur exact à gauche  $a_\tau^* : \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  donné par  $((-)^+)^+$  et un morphisme  $\varepsilon : \text{id}_{\mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A})} \rightarrow a_{\tau^*} a_\tau^*$ . Par construction, si  $F \in \text{ob}(\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$ , alors  $\eta_{a_\tau^* F} : a_\tau^* F \rightarrow (a_\tau^* F)^+$  est un isomorphisme :  $F(X) = \check{H}^0(\mathcal{U}, F)$  pour tout  $\mathcal{U} \in \text{ob}(\mathcal{C}_\tau(X))$  puisque  $F$  est un  $\tau$ -faisceau. Les morphismes  $\eta_{a_\tau^* F}^{-1}$  fournissent un morphisme  $\varepsilon : a_\tau^* a_{\tau^*} \rightarrow \text{id}_{\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{A})}$  et on laisse au lecteur le soin de vérifier que  $\eta$  et  $\varepsilon$  sont l'unité et la co-unité, respectivement, d'une adjonction  $a_\tau^* \dashv a_{\tau^*}$ .  $\square$

**Lemme 1.3.15.** *Les notations et les hypothèses sont celles de 1.3.14. On suppose que, pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , l'ensemble  $\text{cov}_\tau(X)$  est formé d'ensembles finis. Soient  $A$  un anneau commutatif unitaire et  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \text{Mod}(A)$  un foncteur exact et fidèle qui préserve les  $\mathfrak{A}$ -petites colimites filtrantes. Alors le foncteur  $\omega : \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{PSh}(\mathcal{C}, \text{Mod}(A))$  donné par post-composition par  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \text{Mod}(A)$  préserve les  $\tau$ -faisceaux et commute aux foncteurs  $a_\tau^*$ .*

*Démonstration.* Soient  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ,  $\mathcal{U} = \{f_\gamma : U_\gamma \rightarrow X\}_{\gamma \in \Gamma} \in \text{cov}_\tau(X)$  et  $F \in \text{ob}(\text{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$ . Alors la suite

$$(1.3.15.1) \quad 0 \rightarrow F(X) \rightarrow \prod_{\gamma \in \Gamma} F(U_\gamma) \rightrightarrows \prod_{(\gamma, \gamma') \in \Gamma^2} F(U_\gamma \times_X U_{\gamma'})$$

est exact dans  $\mathcal{A}$ . Par hypothèse, les produits dans ce diagramme sont finis. Comme  $\omega$  préserve les limites finies, le diagramme

$$0 \rightarrow \omega F(X) \rightarrow \prod_{\gamma \in \Gamma} \omega F(U_\gamma) \rightrightarrows \prod_{(\gamma, \gamma') \in \Gamma^2} \omega F(U_\gamma \times_X U_{\gamma'})$$

s'identifie au diagramme

$$0 \rightarrow \omega F(X) \rightarrow \omega \left( \prod_{\gamma \in \Gamma} F(U_\gamma) \right) \rightrightarrows \omega \left( \prod_{(\gamma, \gamma') \in \Gamma^2} F(U_\gamma \times_X U_{\gamma'}) \right)$$

et ce dernier est exact en tant qu'image de (1.3.15.1) par le foncteur exact  $\omega$ . Par conséquent,  $\omega$  préserve les  $\tau$ -faisceaux.

On prétend que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) & \xrightarrow{a_\tau^*} & \mathrm{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega \\ \mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathrm{Mod}(A)) & \xrightarrow{a_\tau^*} & \mathrm{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathrm{Mod}(A)) \end{array}$$

est commutatif à isomorphisme près. Pour le vérifier, il suffit de vérifier que  $\omega$  commute au foncteur  $(-)^+$  de la preuve de 1.3.14, parce que  $a_\tau^* = ((-)^+)^+$ . Or cela résulte de ce que  $\omega$  préserve les  $\mathcal{U}$ -petites colimites filtrantes et les limites finies.  $\square$

**Définition 1.3.16.** Soient  $S \in \mathrm{ob}(\mathcal{S})$  et  $\mathcal{C}$  une catégorie localement  $\mathcal{U}$ -petite. On note  $\mathcal{E}t \subseteq \mathrm{mor}(\mathcal{S})$  la classe des morphismes étales.

(i) Pour tout  $x \in S$ , on note  $\mathrm{nb}_{\mathrm{Nis}}(x)$  la  $\mathcal{U}$ -petite catégorie filtrante des voisinages Nisnevich de  $x \in S$  et  $(-)_x : \mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{E}t \downarrow S, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  le foncteur, bien défini à isomorphisme naturel près, donné par  $F_x = \mathrm{colim}_{U \in \mathrm{ob}(\mathrm{nb}_{\mathrm{Nis}}(x))} F(U)$ . On appelle  $F_x$  la **fib**re de  $F$  en  $x$ .

(ii) On appelle **pré-morphisme de sites**  $f : (\mathcal{C}', \tau') \rightarrow (\mathcal{C}, \tau)$  un foncteur  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  entre deux sites tel que le foncteur  $(-) \circ f : \mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}', \mathrm{Set}) \rightarrow \mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathrm{Set})$  transforme les  $\tau'$ -faisceaux en  $\tau$ -faisceaux.

(iii) Suivant [Ayo07b, 4.4.50], on appelle **pseudo-morphisme de sites** un pré-morphisme de sites  $f : (\mathcal{C}', \tau') \rightarrow (\mathcal{C}, \tau)$  tel que le foncteur induit  $f^* : \mathrm{Sh}_\tau(\mathcal{C}, \mathrm{Set}) \rightarrow \mathrm{Sh}_{\tau'}(\mathcal{C}', \mathrm{Set})$  préserve les produits fibrés et les égalisateurs.

(iv) On appelle **morphisme de sites** un pseudo-morphisme de sites  $f : (\mathcal{C}', \tau') \rightarrow (\mathcal{C}, \tau)$  tel que  $f^*$  préserve les limites finies.

(v) Soit  $\mathcal{S}m \subseteq \mathrm{mor}(\mathcal{S})$  la classe des morphismes lisses. Pour tout  $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{S}m \downarrow S)$ , on note abusivement  $\rho_X : (\mathcal{S}m \downarrow S)_{\mathrm{Nis}} \rightarrow (\mathcal{E}t \downarrow X)_{\mathrm{Nis}}$  le pseudo-morphisme de sites induit par le composé  $(\mathcal{E}t \downarrow X) \hookrightarrow (\mathcal{P} \downarrow X) \rightarrow (\mathcal{P} \downarrow S)$ .

**Lemme 1.3.17.** Soient  $S \in \mathrm{ob}(\mathcal{S})$ ,  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne,  $\mathcal{T} := \mathrm{Ind}(\mathcal{T}_0)$  et  $\mathcal{G} := \{V[n] \mid V \in \mathrm{ob}(\mathcal{T}_0), n \in \mathbf{Z}\} \subseteq \mathrm{ob}(\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T}))$ . Alors un morphisme  $f : F \rightarrow F'$  dans  $\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})_{\mathrm{inj}})$  est une équivalence faible Nisnevich-locale au sens de [Ayo07b, 4.4.28]<sup>8</sup> si et seulement s'il induit un quasi-isomorphisme  $f_x : \rho_{X^*}(F)_x \rightarrow \rho_{X^*}(F')_x$  dans  $\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})$  pour tous  $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{S}m \downarrow S)$ ,  $x \in X$ .

*Démonstration.* Soit  $f : F \rightarrow F'$  un morphisme dans  $\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})_{\mathrm{inj}})$ . On rappelle que  $f$  est une équivalence faible Nisnevich-locale au sens de [Ayo07b, 4.4.28] si et seulement si, pour tous  $V \in \mathrm{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , le morphisme de faisceaux Nisnevich à valeurs dans  $\mathrm{Set}$  associé au morphisme de préfaisceaux donné sur  $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{S}m \downarrow S)$  par  $\mathrm{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{T})}(V[n], f_U)$  est inversible. On rappelle également que les  $\mathcal{U}$ -petites colimites filtrantes préservent les quasi-isomorphismes dans la catégorie abélienne de  $\mathcal{U}$ -Grothendieck  $\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})$ , de sorte qu'une telle colimite est une colimite homotopique dans  $\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})_{\mathrm{inj}}$ . D'autre part, l'objet

8. On rappelle que la catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})_{\mathrm{inj}}$  est une catégorie de coefficients (1.0.14) et l'on peut donc appliquer les résultats de [Ayo07b, §4.4].

$V[n]$  est homotopiquement  $\aleph_0$ -présentable d'après 1.0.12 pour tous  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . Par suite, pour tous  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}m \downarrow \mathcal{S})$ ,  $x \in X$  et  $G \in \text{ob}(\mathcal{P}Sh(\mathcal{S}m \downarrow \mathcal{S}, \mathcal{C}plx(\mathcal{T})))$ , on a

$$\begin{aligned}
\text{colim}_{U \in \text{ob}(\text{nb}d_{\text{Nis}}(x))} \text{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{T})}(V[n], F(U)) &= \text{colim}_{U \in \text{ob}(\text{nb}d_{\text{Nis}}(x))} \mathfrak{h}^0 \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}}(V[n], F(U)) \\
&\cong \mathfrak{h}^0 \mathbf{L}colim_{U \in \text{ob}(\text{nb}d_{\text{Nis}}(x))} \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}}(V[n], F(U)) \\
&= \mathfrak{h}^0 \mathbf{R}hom_{\mathcal{T}} \left( V[n], \mathbf{L}colim_{U \in \text{ob}(\text{nb}d_{\text{Nis}}(x))} F(U) \right) \\
&\cong \text{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{T})} \left( V[n], \text{colim}_{U \in \text{ob}(\text{nb}d_{\text{Nis}}(x))} F(U) \right).
\end{aligned}$$

Comme l'unité  $\eta : G \rightarrow a_{\text{Nis}*} a_{\text{Nis}}^* G$  induit un isomorphisme  $\eta_x : G_x \rightarrow (a_{\text{Nis}*} a_{\text{Nis}}^* G)_x$  pour tous  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}m \downarrow \mathcal{S})$ ,  $x \in X$ ,  $G \in \text{ob}(\mathcal{P}Sh(\mathcal{E}t \downarrow X, \text{Set}))$ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{T})} \left( V[n], \mathrm{colim}_{U \in \mathrm{ob}(\mathrm{nb}\mathrm{d}_{\mathrm{Nis}}(x))} F(U) \right) & \longrightarrow & \mathrm{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{T})} \left( V[n], \mathrm{colim}_{U \in \mathrm{ob}(\mathrm{nb}\mathrm{d}_{\mathrm{Nis}}(x))} F'(U) \right) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\mathrm{colim}_{U \in \mathrm{ob}(\mathrm{nb}\mathrm{d}_{\mathrm{Nis}}(x))} \mathrm{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{T})} (V[n], F(U)) & \longrightarrow & \mathrm{colim}_{U \in \mathrm{ob}(\mathrm{nb}\mathrm{d}_{\mathrm{Nis}}(x))} \mathrm{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{T})} (V[n], F'(U)) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\mathrm{colim}_{U \in \mathrm{ob}(\mathrm{nb}\mathrm{d}_{\mathrm{Nis}}(x))} \alpha_{\mathrm{Nis}*} \alpha_{\mathrm{Nis}}^* \left( \mathrm{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{T})} (V[n], F(-)) \right) (U) & \longrightarrow & \mathrm{colim}_{U \in \mathrm{ob}(\mathrm{nb}\mathrm{d}_{\mathrm{Nis}}(x))} \alpha_{\mathrm{Nis}*} \alpha_{\mathrm{Nis}}^* \left( \mathrm{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{T})} (V[n], F'(-)) \right) (U)
\end{array}$$

dont les flèches horizontales sont celles induites par  $f : F \rightarrow F'$ . La flèche horizontale supérieure est inversible si et seulement si la flèche horizontale inférieure l'est. Comme  $\mathcal{G}$  est une famille homotopiquement génératrice et comme un morphisme de faisceaux Nisnevich est un isomorphisme si et seulement s'il induit un isomorphisme en chaque fibre, on en déduit que

$$f_x : F_x = \mathrm{colim}_{U \in \mathrm{ob}(\mathrm{nb}\mathrm{d}_{\mathrm{Nis}}(x))} F(U) \rightarrow F'_x = \mathrm{colim}_{U \in \mathrm{ob}(\mathrm{nb}\mathrm{d}_{\mathrm{Nis}}(x))} F'(U)$$

est un isomorphisme dans  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$  pour tous  $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{S}\mathrm{m}\downarrow\mathcal{S})$  et  $x \in X$  si et seulement si  $f$  est une équivalence faible Nisnevich-locale au sens d'Ayoub.  $\square$

**Proposition 1.3.18.** *Soient  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  une  $\mathcal{A}$ -petite catégorie tannakienne,  $\mathcal{T} := \mathrm{Ind}(\mathcal{T}_0)$ ,  $\mathcal{G} := \{V[n] \mid V \in \mathrm{ob}(\mathcal{T}_0), n \in \mathbf{Z}\} \subseteq \mathrm{ob}(\mathrm{Cplx}(\mathcal{T}))$  et  $S \in \mathrm{ob}(\mathcal{S})$ . Alors les*

localisations de Bousfield à gauche  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$ -enrichie de  $\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{proj}}$  (resp.  $\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{inj}}$ ) par rapport aux trois  $\mathcal{U}$ -petites classes de morphismes suivantes sont égales :

- (i) la classe  $H_1 := \mathcal{G} \odot^{\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S})$ ;
- (ii) la classe  $H_2 := \mathcal{G} \odot^{\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})} \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}_{\text{Nis}})$ , où  $\mathcal{S}_{\text{Nis}}$  désigne un  $\mathcal{U}$ -petit ensemble dense d'hyper-recouvrements par rapport à la topologie Nisnevich sur  $\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}$ ;
- (iii) la classe  $H_3 := \mathcal{G} \odot^{\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})} \mathcal{L}_{\text{Jardine, Nis}}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S})$  des équivalences faibles Nisnevich-locales au sens de [Ayo07b, 4.4.28].<sup>9</sup>

*Démonstration.* On traite du cas projectif et l'on remarque que le cas injectif se démontre de la même façon. On déduit de [CD12b, 3.2.10] et de la variante [CD12b, 3.3.2] du théorème [MV99, 3.1.16] que les localisations de Bousfield par rapport aux classes  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S})$  et  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})} \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}_{\text{Nis}})$  sont égales.

On fixe un foncteur fibre  $\omega : \mathcal{T}_0 \rightarrow \text{Mod}(\mathbf{K}')$  avec  $\mathbf{K}'$  une extension du corps de caractéristique nulle  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$ . D'après 1.3.14, il existe un foncteur « faisceau Nisnevich associé »  $a_{\text{Nis}}^* : \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})) \rightarrow \text{Sh}_{\text{Nis}}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T}))$  qui est exact et qui commute à  $\omega$  d'après 1.3.15. Pour tout  $(p : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}) \in \mathcal{S}_{\text{Nis}}$ , le morphisme  $a_{\text{Nis}}^* \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(p) : a_{\text{Nis}}^* \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) \rightarrow a_{\text{Nis}}^* \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$  est un quasi-isomorphisme. En effet, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \omega a_{\text{Nis}}^* \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\omega a_{\text{Nis}}^* \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(p)} & \omega a_{\text{Nis}}^* \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ a_{\text{Nis}}^* \omega \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{a_{\text{Nis}}^* \omega \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(p)} & a_{\text{Nis}}^* \omega \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) \end{array}$$

dont la flèche horizontale inférieure s'identifie au morphisme  $a_{\text{Nis}}^* \mathbf{y}_{\mathbf{K}'}(p)$  puisque  $\omega \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(-) \cong \mathbf{y}_{\mathbf{K}'}(-)$ . Or  $a_{\text{Nis}}^* \mathbf{y}_{\mathbf{K}'}(p)$  est un quasi-isomorphisme d'après la conjecture d'Illusie [Jar86, 2.5]. Par suite,  $\omega a_{\text{Nis}}^* \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(p)$  est un quasi-isomorphisme et il reste à rappeler que  $\omega$  détecte les quasi-isomorphismes d'après 1.0.6. Par conséquent,  $L_{(\mathcal{H}_3/\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})} \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{proj}}$  est une localisation de Bousfield à gauche de  $L_{(\mathcal{H}_1/\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})} \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{proj}}$  et il suffit de montrer que le foncteur pleinement fidèle

$$\begin{array}{c} \text{ho} \left( L_{(\mathcal{H}_3/\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})} \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{proj}} \right) \\ \downarrow \\ \text{ho} \left( L_{(\mathcal{H}_1/\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})} \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{proj}} \right) \end{array}$$

est essentiellement surjectif.

Soit  $F \in \text{ob} \left( L_{(\mathcal{H}_1/\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})} \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{proj}} \right)$  un objet fibrant. On note  $\eta : F \rightarrow a_{\text{Nis}*} a_{\text{Nis}}^* F$  le morphisme unité et l'on fixe une résolution fibrante  $\gamma : a_{\text{Nis}}^* F \rightarrow F'$  dans la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles projective Nisnevich-locale de [Ayo07b, 4.4.43] sur la catégorie  $\text{Sh}_{\text{Nis}}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})$ . Alors  $a_{\text{Nis}*} \gamma$  est une équivalence faible  $\mathcal{H}_3$ -locale et, comme  $a_{\text{Nis}*}$  est de Quillen à droite,  $a_{\text{Nis}*} F'$  est un objet fibrant de la catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles  $L_{(\mathcal{H}_3/\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})} \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{proj}}$ . De plus,  $\eta$  est une équivalence faible  $\mathcal{H}_3$ -locale

9. D'après 1.0.14,  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$  est une catégorie de coefficients au sens d'Ayoub et donc les hypothèses de [Ayo07b, 4.4.32] sont satisfaites, de sorte que cette localisation de Bousfield existe.

d'après [Ayo07b, 4.4.40]. Du coup,  $(a_{\text{Nis}*}\gamma)\eta : F \rightarrow a_{\text{Nis}*}F'$  est une équivalence faible  $H_3$ -locale. Il suffit de montrer que c'est aussi une équivalence faible  $H_1$ -locale. Comme  $F$  et  $a_{\text{Nis}*}F'$  sont  $H_1$ -locaux, il revient au même de montrer que c'est une équivalence faible objet par objet, c'est-à-dire un quasi-isomorphisme de préfaisceaux. Pour cela, il suffit de montrer qu'il en est de même de  $\omega((a_{\text{Nis}*}\gamma)\eta)$ . D'après 1.3.17,  $\rho_{X*}((a_{\text{Nis}*}\gamma)\eta)_x$  est un quasi-isomorphisme dans  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})$  pour tous  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S})$ ,  $x \in X$ . Comme  $\omega$  commute aux foncteurs  $\rho_{X*}$ ,  $(-)_x$ ,  $a_{\text{Nis}*}$  et  $a_{\text{Nis}}^*$  et comme il préserve les  $\mathcal{U}$ -petites colimites filtrantes, 1.3.17 entraîne que  $\omega((a_{\text{Nis}*}\gamma))$  est une équivalence faible Nisnevich-locale au sens d'Ayoub. La source  $\omega(F)$  et le but  $a_{\text{Nis}*}\omega(F')$  sont  $\omega(\mathcal{G}) \odot^{\mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\mathbb{K}'))} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S})$ -locales. Grâce à 1.3.12, on peut vérifier que  $\omega((a_{\text{Nis}*}\gamma))$  est une équivalence faible  $\omega(\mathcal{G}) \odot^{\mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\mathbb{K}'))} \mathcal{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S})$ -locale. Par suite, ce morphisme est une équivalence faible objet par objet. Cela achève la démonstration.  $\square$

**Définition 1.3.19** ([CD12a, 1.1.1]). Soit  $\mathcal{S} \in \text{ob}(\mathcal{S})$ . On dira qu'une sous-catégorie pleine  $(\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S}) \subseteq (\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S})$  est *Nisnevich-cofinale* dans  $\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S}$  si elle vérifie les conditions suivantes.

- (i) Pour tout  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , on a  $\mathbf{A}_{\mathcal{S}}^n \in \text{ob}(\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S})$ .
- (ii) Pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S})$  et tout morphisme étale  $X' \rightarrow X$  dans  $\mathcal{S}\text{ch}^{\text{ft}}\downarrow\mathcal{S}$ , il existe un recouvrement Zariski  $Y \rightarrow X'$  tel que  $Y \in \text{ob}(\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S})$ .
- (iii) Pour tout morphisme lisse  $(p : X \rightarrow Y) \in \text{mor}(\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S})$  et tout  $(f : Y' \rightarrow Y) \in \text{mor}(\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S})$ , le produit fibré  $X \times_Y Y'$  est représentable dans  $\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S}$ .
- (iv) Les coproduits finis sont représentables dans la catégorie  $\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S}$ .
- (v) Pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S})$ , il existe un recouvrement Nisnevich  $q : U \rightarrow X$  dans  $\text{mor}(\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S})$  tel que  $U \in \text{ob}(\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S})$ .

Le lecteur est invité à supposer que  $\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S}$  désigne la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{S}\text{ch}^{\text{ft}}\downarrow\mathcal{S}$  engendrée par les  $\mathcal{S}$ -schémas affines lisses.

**Proposition 1.3.20.** Soient  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne,  $\mathcal{T} := \text{Ind}(\mathcal{T}_0)$ ,  $\mathcal{S} \in \text{ob}(\mathcal{S})$  et  $\iota : (\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S}) \hookrightarrow (\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S})$  une sous-catégorie pleine Nisnevich-cofinale.

- (i) Le foncteur  $\iota_* : \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})) \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T}))$  défini dans 1.1.5 induit une équivalence de catégories

$$\iota_* : \mathcal{S}\text{h}_{\text{Nis}}(\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})) \rightarrow \mathcal{S}\text{h}_{\text{Nis}}(\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})).$$

- (ii) Si  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T}))_{\text{inj}}_{\text{Nis-proj}}$  désigne la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles projective Nisnevich-locale au sens de [Ayo07a, 4.4.34], alors le foncteur

$$\iota_* : \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T}))_{\text{inj}}_{\text{Nis-proj}} \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T}))_{\text{inj}}_{\text{Nis-proj}}$$

est une équivalence de Quillen à gauche monoïdale symétrique forte.

*Démonstration.*

- (i) Les conditions de 1.3.19 impliquent que la topologie Nisnevich sur  $\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S}$  induit une topologie de Grothendieck sur  $\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S}$ . L'assertion est conséquence facile de 1.3.19(v).

- (ii) D'après [Ayo07b, 4.4.43], les catégories des faisceaux Nisnevich  $\mathcal{S}\text{h}_{\text{Nis}}(\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T}))$  et  $\mathcal{S}\text{h}_{\text{Nis}}(\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{T})$  admettent des structures de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{S}\text{h}_{\text{Nis}}(\mathcal{S}\text{m}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T}))_{\text{proj}}$  et  $\mathcal{S}\text{h}_{\text{Nis}}(\mathcal{S}\text{m}^\circ\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T}))_{\text{proj}}$ , respectivement, par rapport auxquelles les foncteurs « faisceau

Nisnevich associé »  $a_{\text{Nis}}^*$  sont des équivalences de Quillen à gauche. On dispose du carré essentiellement commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}h_{\text{Nis}}(\mathcal{S}m\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}plx(\mathcal{T}))_{\text{proj}} & \xrightarrow{v_*} & \mathcal{S}h_{\text{Nis}}(\mathcal{S}m^\circ\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}plx(\mathcal{T}))_{\text{proj}} \\ \downarrow a_{\text{Nis}*} & & \downarrow a_{\text{Nis}*} \\ \mathcal{P}Sh(\mathcal{S}m\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}plx(\mathcal{T}))_{\text{inj}}_{\text{Nis-proj}} & \xrightarrow{v_*} & \mathcal{P}Sh(\mathcal{S}m^\circ\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{C}plx(\mathcal{T}))_{\text{inj}}_{\text{Nis-proj}} \end{array}$$

et il suffit donc de montrer que la flèche horizontale supérieure induit une équivalence sur les catégories homotopiques associées, puisque la flèche horizontale inférieure est de Quillen à gauche d'après 1.2.12. D'après (i), il s'agit d'une équivalence de catégories et il reste à montrer qu'il préserve et détecte les équivalences faibles Nisnevich-locales. Cela résulte des raisonnements de 1.3.17.  $\square$

**Proposition 1.3.21.** *Soient  $(\mathcal{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathcal{U}$ -tractable et propre à gauche dont tout objet est cofibrant,  $\mathcal{G} \subseteq \text{ob}(\mathcal{V})$  une  $\mathcal{U}$ -petite famille d'objets stable par  $\otimes_{\mathcal{V}}$  et  $\mathcal{S} \in \text{ob}(\mathcal{S})$ . Alors  $\mathcal{P}Sh(\mathcal{S}m\downarrow(-), \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}$  est une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{U}$ -combinatoire,  $\mathcal{S}m$ -prémotivique [CD12b, 1.4.2]) sur  $\mathcal{S}$  qui vérifie la propriété de descente par rapport à la topologie Nisnevich.*

*Démonstration.* D'après 1.3.8, tout  $(f : X \rightarrow \mathcal{S}) \in \text{mor}(\mathcal{S})$  induit une  $\mathcal{V}$ -adjonction de Quillen  $f^* \dashv f_*$  et tout morphisme  $(p : T \rightarrow \mathcal{S}) \in \mathcal{S}m\downarrow\mathcal{S}$  induit  $\mathcal{V}$ -adjonction de Quillen  $f_{\#} \dashv f^*$ . Le foncteur  $(-)\times_{\mathcal{S}} T : \mathcal{S}m\downarrow\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}m\downarrow T$  admet un adjoint à gauche

$$(g : Y \rightarrow T) \mapsto (pg : Y \rightarrow \mathcal{S}) : \mathcal{S}m\downarrow T \rightarrow \mathcal{S}m\downarrow\mathcal{S}$$

et l'on vérifie aisément que la condition de 1.1.6 est satisfaite. On en déduit que la catégorie  $\mathcal{S}m$ -fibrée  $\mathcal{P}Sh(\mathcal{S}m\downarrow(-), \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}$  vérifie la formule de projection. Raisonnant comme dans [Ayo07b, 4.5.48], on vérifie également que le morphisme de changement de base lisse  $p'_* f'^* \rightarrow f^* p_{\#}$  est inversible et qu'il en est de même de sa variante dérivée  $\mathbf{L}p'_* \mathbf{L}f'^* \rightarrow \mathbf{L}f^* \mathbf{L}p_{\#}$ , où  $p' : X \times_{\mathcal{S}} T \rightarrow X$  et  $f' : X \times_{\mathcal{S}} T \rightarrow T$  désignent les projections canoniques. La propriété de descente par rapport à la topologie Nisnevich est satisfaite par construction.  $\square$

## 1.4 STRUCTURES DE MODÈLES $\mathbf{A}^1$ -LOCALES

*Notation 1.4.0.* Dans ce numéro,  $(\mathcal{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  désigne une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathcal{U}$ -tractable et propre à gauche dont tout objet est cofibrant. De plus, on fixe :

- (i) une  $\mathcal{U}$ -petite famille  $\mathcal{G} \subseteq \text{ob}(\mathcal{V})$  stable par  $\otimes_{\mathcal{V}}$  ;
- (ii) un  $\mathcal{U}$ -schéma  $\mathbf{B}$  noethérien de dimension de Krull finie ;
- (iii) une  $\mathcal{U}$ -petite sous-catégorie  $\mathcal{S} \subseteq \text{Sch}^{\text{ft}}\downarrow\mathbf{B}$  contenant les  $\mathbf{B}$ -schémas quasi-projectifs et stable par produits finis et tirés-en-arrières le long des morphismes de  $\text{Sch}^{\text{ft}}\downarrow\mathbf{B}$  ;
- (iv)  $\mathcal{S} \in \text{ob}(\mathcal{S})$  ; et
- (v) une classe admissible  $\mathcal{P} \subseteq \text{mor}(\mathcal{S})$  contenant les morphismes étales.

Essentiellement tous les énoncés de ce numéro sont des modifications légères de ceux du numéro précédent et l'on ne reproduira pas les démonstrations. Il s'agit à chaque fois d'un énoncé bien connu de la théorie des localisations de Bousfield à gauche.

*Résumé.* On procède à la deuxième étape de la construction de la catégorie homotopique stable à coefficients ind-tannakiens, à savoir la localisation par rapport à la droite affine. Contrairement au numéro précédent, où l'on a dû aborder certains détails techniques, rien n'est ni surprenant ni original dans ce numéro.

*Plan.* On rappelle la définition des équivalences faible  $\mathbf{A}^1$ -locales génératrices (1.4.1). On applique encore une fois un résultat de [Bar10] sur l'existence de localisations de Bousfield à gauche enrichies et l'on en déduit des structures de modèles projective et injective  $\mathbf{A}^1$ -Nisnevich-locales sur la catégorie des préfaisceaux sur  $\mathcal{S}m\downarrow\mathcal{S}$  à coefficients dans une catégorie de modèles  $\mathcal{U}$ -tractable et propre à gauche  $\mathcal{V}$  (1.4.2). On remarque que cette localisation se comporte bien par rapport aux structures monoïdales (1.4.4), par rapport aux foncteurs d'image inverse et d'image directe (1.4.5), et par rapport aux générateurs homotopiques homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables (1.4.6).

**Définition 1.4.1.** On appelle *équivalence faible  $\mathbf{A}^1$ -locale génératrice* tout élément de la classe des morphismes de la forme

$$V \odot_{\mathcal{P}Sh}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(\pi_X) : V \odot_{\mathcal{P}Sh}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(\mathbf{A}_X^1) \rightarrow V \odot_{\mathcal{P}Sh}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V},S}(X),$$

où  $V \in \text{ob}(\mathcal{G})$ ,  $X \in \text{ob}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$  et  $\pi_X : \mathbf{A}_X^1 \rightarrow X$  désigne la projection canonique. On note  $\mathcal{L}_{\mathbf{A}^1}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}) \subseteq \text{mor}(\mathcal{P}Sh(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V}))$  la classe de telles morphismes.

**Proposition 1.4.2.** *La catégorie  $\mathcal{P}Sh(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})$  est une  $\mathcal{V}$ -catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{U}$ -tractable et propre à gauche lorsqu'on la munit de la structure de  $\mathcal{V}$ -catégorie de 1.1.4 et de l'une des structures de  $\mathcal{U}$ -modèles suivantes :*

- (i) *la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles **projective  $\mathbf{A}^1$ -Nisnevich-locale**  $\mathcal{P}Sh(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}}$ , c'est-à-dire la localisation de Bousfield à gauche  $\mathcal{V}$ -enrichie de  $\mathcal{P}Sh(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}$  par rapport à la classe de morphismes  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\mathbf{A}^1}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ ;*
- (ii) *la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles **injective  $\mathbf{A}^1$ -Nisnevich-locale**  $\mathcal{P}Sh(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-inj}}$ , c'est-à-dire la localisation de Bousfield à gauche  $\mathcal{V}$ -enrichie de  $\mathcal{P}Sh(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\text{Nis-inj}}$  par rapport à la classe de morphismes  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{\mathbf{A}^1}(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S})$ .*

*L'identité  $\mathcal{P}Sh(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}} \rightarrow \mathcal{P}Sh(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-inj}}$  est une équivalence de Quillen à gauche. Si  $\mathcal{V}$  est stable, alors il en est de même des structures projective et injective  $\mathbf{A}^1$ -Nisnevich-locales.*

*Démonstration.* Comme dans 1.3.3, l'existence, la  $\mathcal{U}$ -tractabilité et la propriété à gauche des localisations de Bousfield à gauche  $\mathcal{V}$ -enrichies résultent de [Bar10, 4.46]. Les structures de  $\mathcal{U}$ -modèles projective et injective  $\mathbf{A}^1$ -Nisnevich-locales ont la même classe d'équivalences faibles d'après [Bar10, (4.46.5)], de sorte que l'identité est une équivalence de Quillen à gauche. Les raisonnements de 1.3.3 montrent que les deux structures sont stables lorsque  $\mathcal{V}$  l'est.  $\square$

*Remarque 1.4.3.* Comme on l'a déjà remarqué dans 1.3.4, cette localisation ne dépend pas du choix de  $\mathcal{G}$ .

**Proposition 1.4.4.** *Les  $\mathcal{V}$ -catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles*

$$\mathcal{P}Sh(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}Sh(\mathcal{P}\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-inj}}$$

*sont monoïdales symétriques qui vérifient l'axiome du monoïde.*

*Démonstration.* Une modification évidente des arguments de 1.3.5 et de 1.3.6 montre que les hypothèses de [Bar10, 4.47] sont satisfaites et que les catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdales symétriques ainsi obtenues vérifient l'axiome du monoïde.  $\square$

**Proposition 1.4.5.** Soit  $(f : T \rightarrow S) \in \text{mor}(\mathcal{S})$ .

(i) La  $\mathcal{V}$ -adjonction  $f^* : \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}} \rightleftarrows \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow T, \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}} : f_*$  induit par le foncteur

$$(p : X \rightarrow S) \mapsto (p_{(T)} : X \times_S T \rightarrow T) : \mathcal{P}\downarrow S \rightarrow \mathcal{P}\downarrow T$$

est de Quillen.

(ii) Si  $f \in \mathcal{P}$ , alors la  $\mathcal{V}$ -adjonction  $f_{\#} : \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow T, \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}} \rightleftarrows \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}} : f^*$  induit par le foncteur

$$(p : X \rightarrow T) \mapsto (f p : X \rightarrow S) : \mathcal{P}\downarrow T \rightarrow \mathcal{P}\downarrow S$$

est de Quillen.

*Démonstration.* La preuve de 1.3.8 s'adapte facilement.  $\square$

**Proposition 1.4.6.** Supposons que  $\mathcal{V}$  soit stable, que les équivalences faibles de  $\mathcal{V}$  soient stables par  $\mathcal{U}$ -petites colimites filtrantes et que  $\mathcal{G}$  soit une famille homotopiquement génératrice d'objets homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentables de  $\mathcal{V}$ . Alors  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{V}}(\mathcal{P}\downarrow S)$  est une famille homotopiquement génératrice d'objets homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentables dans  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}}$  et dans  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-inj}}$ .

*Démonstration.* On renvoie à 1.3.9 pour l'idée de la démonstration. Les deux démonstrations sont formellement semblables parce qu'il s'agit dans les deux cas d'une localisation de Bousfield par rapport à un  $\mathcal{U}$ -petit ensemble de morphismes de sources et de buts cofibrants,  $\mathfrak{K}_0$ -présentables et homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentables.  $\square$

**Proposition 1.4.7.** La catégorie  $\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow(-), \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}}$  fibrée sur  $\mathcal{S}$  est une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\text{Sm}$ -prémotivique qui vérifie la descente par rapport à la topologie Nisnevich et la propriété d'invariance par  $\mathbf{A}^1$ -homotopie.

*Démonstration.* En appliquant 1.4.5 et les raisonnements de 1.3.21, on trouve que l'on a bien une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\text{Sm}$ -prémotivique sur  $\mathcal{S}$  et il reste à établir les propriétés de descente par rapport à la topologie Nisnevich et d'invariance par  $\mathbf{A}^1$ -homotopie. La propriété d'invariance par  $\mathbf{A}^1$ -homotopie est satisfaite par construction ([CD12b, 2.1.2]) et celle de descente par rapport à la topologie Nisnevich est héritée de  $\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow(-), \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}$ . Effectivement, les carrés homotopiquement co-cartésiens de  $\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow(-), \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}$  induisent des carrés homotopiquement co-cartésiens de  $\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow(-), \mathcal{V})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}}$ , parce qu'un foncteur de localisation de Bousfield à gauche est de Quillen à gauche, et il suffit d'appliquer [CD12b, 3.2.17, 3.3.2].  $\square$

*Remarque 1.4.8.* Par définition, les objets  $\mathcal{L}_{\mathbf{A}^1}(\mathcal{P}\downarrow S)$ -locaux de  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})$  sont les objets  $F$  tels que le morphisme canonique

$$\mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}}^{\mathcal{V}} \left( \mathbf{V} \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(\mathbf{X}), F \right) \rightarrow \mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}}}^{\mathcal{V}} \left( \mathbf{V} \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(\mathbf{A}_{\mathbf{X}}^1), F \right)$$

est un isomorphisme dans  $\text{ho} \left( \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{Nis-proj}} \right)$  pour tous  $\mathbf{V} \in \text{ob}(\mathcal{G})$ ,  $\mathbf{X} \in \text{ob}(\mathcal{P}\downarrow S)$ . L'argument de [Ayo07b, 4.5.11] montre que c'est le cas si et seulement si  $F$  est  $\mathcal{L}_{\mathbf{A}^1}(\mathcal{P}\downarrow S)$ -local en tant qu'objet de  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{proj}}$ , c'est-à-dire si et seulement si

$$\mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{proj}}}^{\mathcal{V}} \left( \mathbf{V} \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(\mathbf{X}), F \right) \rightarrow \mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{proj}}}^{\mathcal{V}} \left( \mathbf{V} \odot_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\mathcal{V}} \mathbf{y}_{\mathcal{V}, S}(\mathbf{A}_{\mathbf{X}}^1), F \right)$$

est un isomorphisme dans  $\text{ho} \left( \mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{V})_{\text{proj}} \right)$  pour tous  $\mathbf{V} \in \text{ob}(\mathcal{G})$ ,  $\mathbf{X} \in \text{ob}(\mathcal{P}\downarrow S)$ .

## 1.5 SPECTRES SYMÉTRIQUES ET L'AXIOME DU MONOÏDE

*Notation 1.5.0.* Dans ce numéro, on fixe une localement  $\mathfrak{A}$ -petite Set-catégorie  $\mathfrak{A}$ -bicomplète  $\mathcal{C}$ . Lorsque  $\mathcal{C}$  est munie d'une structure de  $\mathfrak{A}$ -modèles, on note  $\mathcal{W}(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$  les classes des équivalences faibles et de monomorphismes de  $\mathcal{C}$ , respectivement. On aura à considérer les conditions suivantes sur la catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles monoïdale symétrique  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$ .

(i) Les réunions des sous-objets dans  $\mathcal{C}$  sont effectives, c'est-à-dire si

$$\begin{array}{ccccc}
 U \cap V & \xrightarrow{\quad} & U & \xlongequal{\quad} & U \\
 \downarrow & & \downarrow u & & \downarrow i \\
 V & \xrightarrow{\quad v \quad} & U \cup V & & \\
 \parallel & & \searrow w & & \\
 V & \xrightarrow{\quad j \quad} & & & X
 \end{array}$$

est un diagramme commutatif dans lequel  $i$  et  $j$  sont des monomorphismes, le carré extérieur est cartésien et le carré intérieur est cocartésien, alors  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont des monomorphismes. Autrement dit,  $U \cup V$  est la borne supérieure de  $U$  et  $V$  dans le réseau des sous-objets de  $X$ .

- (ii) La classe  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$  est stable par  $\mathfrak{A}$ -petites compositions transfinies.
- (iii) La catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles  $\mathcal{C}$  est  $\mathfrak{A}$ -tractable,  $\mathfrak{A}$ -cellulaire et propre à gauche.
- (iv) Les classes  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{W}(\mathcal{C})$  sont stables par  $\mathfrak{A}$ -petites colimites filtrantes et les classes  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{W}(\mathcal{C})$  sont stables par sommes amalgamées.
- (iv') L'intersection  $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{W}(\mathcal{C})$  est stable par  $\mathfrak{A}$ -petites compositions transfinies et par sommes amalgamées.
- (v) Les classes  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{W}(\mathcal{C})$  sont stables par coproduits finis.
- (vi) Le quadruplet  $(\mathcal{C}_{\text{inj}}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  est une catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles monoïdale symétrique, où  $\mathcal{C}_{\text{inj}}$  est la structure de  $\mathfrak{A}$ -modèles sur  $\mathcal{C}$  dont les classes des cofibrations et des équivalences faibles sont  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ , respectivement.
- (vi') Pour tout  $C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , le foncteur  $C \otimes_{\mathcal{C}} (-) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{inj}}$  est de Quillen à gauche.
- (vii) La catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles  $\mathcal{C}$  est stable.
- (vii') La catégorie  $\mathcal{C}$  est pointée.

Évidemment, on a les implications suivantes :  $(iv) \Rightarrow (iv')$ ;  $(iii) + (vi) \Rightarrow (vi')$ ;  $(vii) \Rightarrow (vii')$ .

*Résumé.* La troisième étape de la construction de la catégorie homotopique stable consiste à stabiliser par rapport à  $\mathbf{P}^1$ . Au lieu de procéder directement à cette construction dans le cas auquel on s'intéresse, on introduit ici quelques généralités qui nous seront utiles, voire essentielles. Plus précisément, dans ce numéro, suivant [Hov01], on rappelle la construction des catégories des suites symétriques et des S-spectres symétriques avec S un objet d'une catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{C}$ . On sera amené dans §2.2 à considérer la catégorie des modules sur un monoïde commutatif d'une catégorie de spectres symétriques. En particulier, il faudra munir cette catégorie de modules d'une structure de modèles. L'une des seules manières de construire de telles structures de modèles et celle de [SS00]. Cette construction repose sur l'axiome du monoïde et l'on est donc obligé d'établir cet axiome dans les cas qui nous intéressent. À cette fin, on généralise et l'on axiomatise la méthode de [CD09, 7.9].

On se tâche de l'établir dans une généralité optimale, mais le lecteur est invité à supposer que  $\mathcal{C}$  est la catégorie des complexes de ind-objets d'une catégorie tannakienne munie de la structure de modèles injective (1.6.2).

*Plan.* Après avoir introduit les suites symétriques (1.5.2) et les spectres symétriques (1.5.3), on rappelle la définition de la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles projective niveau par niveau (1.5.4) et l'on étudie sa functorialité élémentaire (1.5.5).

On applique un théorème de J. Smith ([Bek00, 1.7]) à la construction d'une structure de modèles injective niveau par niveau (1.5.7) dont on se servira afin d'établir l'axiome du monoïde. De 1.5.9 à 1.5.12, on étudie le comportement de ces structures par rapport à la structure monoïdale. On rappelle la définition de la structure de modèles projective stable (1.5.13), ainsi que sa variante injective (1.5.16). Suivant la méthode de [CD09, 7.9], on déduit des résultats précédents l'axiome du monoïde dans la catégorie de modèles projective stable (1.5.18) sous les hypothèses de 1.5.0.

Après quelques remarques sur les  $\Omega^\infty$ -spectres (1.5.21), on vérifie l'existence de générateurs homotopiques homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables dans la structure de modèles projective stable dans les cas qui nous intéressent (1.5.23).

**Définition 1.5.1.** Soit  $G$  un groupe fini. On appelle  $G$ -*objet* de  $\mathcal{C}$  un foncteur  $G \rightarrow \mathcal{C}$ , où  $G$  est regardé comme un groupoïde réduit à un seul objet. On note  $\mathcal{C}^G$  la catégorie des  $G$ -objets de  $\mathcal{C}$ . Si  $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , on note  $G \times A := \coprod_{g \in G} A$  le  $G$ -objet dont l'action de  $G$  donnée par permutation des composantes. Étant donné un sous-groupe  $H \leq G$  et un  $H$ -objet  $\rho : H \rightarrow \text{aut}_{\mathcal{C}}(A)$ , on notera parfois  $G \times_H A$  la représentation induite  $\text{ind}_H^G(\rho)$ . En particulier,  $G \times A = \text{ind}_{\{1\}}^G(A)$ . On remarque que le foncteur  $\text{ind}_H^G : \mathcal{C}^H \rightarrow \mathcal{C}^G$  est adjoint à gauche du foncteur de restriction pour tout morphisme de groupes  $H \rightarrow G$ . Dualelement, tout morphisme de groupes  $H \rightarrow G$  induit un foncteur de co-induction  $\text{coind}_H^G : \mathcal{C}^G \rightarrow \mathcal{C}^H$  adjoint à droite du foncteur de restriction.

**Définition 1.5.2** ([Hov01, 6.1]). On note  $\mathfrak{S}$  le groupoïde dont les objets sont les ensembles  $\underline{n} := \{r \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \mid 1 \leq r \leq n\}$  pour  $n \geq 0$  et dont les morphismes sont les bijections  $\underline{n} \rightarrow \underline{n}$ . La catégorie des *suites symétriques dans*  $\mathcal{C}$  est la catégorie  $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$  des foncteurs  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{C}$ . En particulier, une suite symétrique dans  $\mathcal{C}$  est une famille d'objets  $(A_n)_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$  telle que, pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ ,  $A_n$  soit muni d'une action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ . Un morphisme de suites symétriques  $(A_n)_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \rightarrow (B_n)_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$  est une famille de morphismes  $\mathfrak{S}_n$ -équivariants  $f_n : A_n \rightarrow B_n$  dans  $\mathcal{C}$ . Alternativement, on peut considérer le groupoïde  $\mathfrak{S}'$  dont les objets sont les ensembles finis et dont les morphismes sont les bijections. L'inclusion évidente  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$  est une équivalence et induit donc une équivalence  $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}'} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$ .

En tant que catégorie de préfaisceaux à valeurs dans une catégorie  $\mathcal{U}$ -bicomplète,  $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$  est  $\mathcal{U}$ -bicomplète et les  $\mathcal{U}$ -petites limites et colimites dans  $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$  se calculent objet par objet. De même, si  $\mathcal{C}$  est localement  $\mathcal{U}$ -présentable, alors il en est ainsi de  $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$ .

Pour tout  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , on dispose d'un foncteur  $A \mapsto A.\{-r\} : \mathcal{C}^{\mathfrak{S}} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$  donné par

$$A.\{-r\}_n := \begin{cases} \mathfrak{S}_n \times_{\mathfrak{S}_{n-r}} A_{n-r} & \text{si } n \geq r \\ \emptyset_{\mathcal{C}} & \text{si } n < r, \end{cases}$$

où  $\emptyset_{\mathcal{C}}$  désigne l'objet initial de  $\mathcal{C}$ . Évidemment,  $(A.\{-r\}).\{-s\} \cong A.\{-r-s\}$  pour tous  $r, s \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ . Si  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , alors le foncteur  $(-).\{-r\}$  est adjoint à droite du foncteur  $A \mapsto A.\{r\}$ , où  $A.\{r\}_n := A_{n+r}$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  muni de l'action de  $\mathfrak{S}_n$  induite par l'inclusion  $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathfrak{S}_{n+r}$ . On en déduit, pour tout  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , un foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$  qui associe à  $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$  la suite

symétrique

$$A\{-r\}_n := \begin{cases} \mathfrak{S}_r \times A & \text{si } n = r \\ \emptyset_{\mathcal{C}} & \text{si } n \neq r, \end{cases}$$

adjoit à gauche du foncteur d'évaluation  $ev_r : \mathcal{C}^{\mathfrak{S}} \rightarrow \mathcal{C}$  donné par  $A \mapsto A_r$ .

Supposons que  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  soit une catégorie monoïdale symétrique fermée. On définit une structure monoïdale symétrique sur  $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}'}$  et, par transport de structures, sur  $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$  par

$$(A \otimes_{\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}} B)(N) := \coprod_{\text{PIQ}=\text{N}} A(P) \otimes_{\mathcal{C}} B(Q).$$

L'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{C}^{\mathfrak{S}'}}$  est le foncteur  $\mathfrak{S}' \rightarrow \mathcal{C}$  qui correspond à  $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}\{0\} \in \text{ob}(\mathcal{C}^{\mathfrak{S}})$ . La catégorie monoïdale symétrique  $(\mathcal{C}^{\mathfrak{S}'}, \otimes_{\mathcal{C}^{\mathfrak{S}'}} , \mathbf{1}_{\mathcal{C}^{\mathfrak{S}'}})$  est fermée si on la munit du bifoncteur  $(\mathcal{C}^{\mathfrak{S}'})^{\text{op}} \times \mathcal{C}^{\mathfrak{S}'} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathfrak{S}'}$  associé au bifoncteur  $(\mathcal{C}^{\mathfrak{S}})^{\text{op}} \times \mathcal{C}^{\mathfrak{S}} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$  suivant :

$$\underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}} (A, B)_n := \prod_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}, \mathfrak{S}_r} (A_r, B_{n+r}),$$

où  $\underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}, \mathfrak{S}_r} (C, D)$  est l'égalisateur des deux flèches évidentes

$$\underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}} (C, D) \rightrightarrows \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}} (\mathfrak{S}_r \times C, D)$$

pour tous  $C, D \in \text{ob}(\mathcal{C}^{\mathfrak{S}_r})$ . On constate que le foncteur  $(-)\{0\} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$ , adjoit à gauche de  $ev_0$ , est monoïdal symétrique fort.

**Définition 1.5.3** ([Hov01, 6.2]). Supposons que  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  soit une catégorie monoïdale symétrique fermée et que  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$ . La catégorie  $\text{Sp}_S^{\mathfrak{S}}(\mathcal{C})$  des *S-spectres symétriques* dans  $\mathcal{C}$  est la catégorie  $\text{Mod}(\text{Sym}(S))$  des modules dans  $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$ , munie de la structure monoïdale symétrique précédente, sur le monoïde commutatif libre  $\text{Sym}(S)$  engendré par la suite symétrique  $S\{-1\}$ . Explicitement,  $\text{Sym}(S)_n = S^{\otimes n}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $\mathfrak{S}_n$  agit par permutation. On trouve que la donnée d'un S-spectre symétrique consiste en une famille  $(A_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  de  $\mathfrak{S}_n$ -objets  $A_n$  et de morphismes  $\sigma_n : S \otimes_{\mathcal{C}} A_n \rightarrow A_{n+1}$  de  $\mathcal{C}$  tels que, pour tous  $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , le composé

$$S^{\otimes m} \otimes_{\mathcal{C}} A_n \xrightarrow{\text{id} \otimes \sigma_n} S^{\otimes(m-1)} \otimes_{\mathcal{C}} A_{n+1} \xrightarrow{\text{id} \otimes \sigma_{n+1}} \dots \xrightarrow{\text{id} \otimes \sigma_{m+n-2}} S \otimes_{\mathcal{C}} A_{m+n-1} \xrightarrow{\sigma_{m+n-1}} A_{m+n}$$

soit  $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ -équivariant. Un morphisme  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} : (A_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \rightarrow (B_n, \tau_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  de S-spectres symétriques est une famille de morphismes  $f_n : A_n \rightarrow B_n$   $\mathfrak{S}_n$ -équivariants telle que le carré

$$\begin{array}{ccc} S \otimes_{\mathcal{C}} A_n & \xrightarrow{\sigma_n} & A_{n+1} \\ \text{id} \otimes f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ S \otimes_{\mathcal{C}} B_n & \xrightarrow{\tau_n} & B_{n+1} \end{array}$$

soit commutatif pour tout  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . En tant que catégorie de modules sur un monoïde commutatif dans une catégorie monoïdale symétrique fermée,  $\mathfrak{U}$ -bicomplète,  $\text{Sp}_S^{\mathfrak{S}}(\mathcal{C})$  est une catégorie monoïdale symétrique fermée,  $\mathfrak{U}$ -bicomplète. On note  $\otimes_{\text{Sp}_S^{\mathfrak{S}}}$ ,  $\underline{\text{mor}}_{\text{Sp}_S^{\mathfrak{S}}}$  et  $\mathbf{1}_{\text{Sp}_S^{\mathfrak{S}}}$  le produit tensoriel, le bifoncteur d'exponentiation et l'unité de  $\text{Sp}_S^{\mathfrak{S}}(\mathcal{C})$ , respectivement.

On suppose que  $\mathcal{C}$  est localement  $\mathfrak{U}$ -présentable. Il en est de même de  $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$  et la catégorie  $\text{Mod}(\text{Sym}(S))$  est la catégorie des algèbres sur la monade  $(\text{Sym}(S) \otimes_{\text{Sp}_S^{\mathfrak{S}}} (-), \eta_{\text{Sym}(S)}, \mu_{\text{Sym}(S)})$ ,

où  $\eta_{\text{Sym}(S)}$  et  $\mu_{\text{Sym}(S)}$  désignent le morphismes d'unité et de multiplication du monoïde  $\text{Sym}(S)$ , regardés comme transformations naturelles

$$\text{id}_{\mathcal{C}^\ominus} \rightarrow \text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\ominus} (-) \quad \text{et} \quad \text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\ominus} (\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\ominus} (-)) \rightarrow \text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\ominus} (-),$$

respectivement. En outre, le foncteur  $\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\ominus} (-)$  préserve les  $\mathcal{U}$ -petites colimites. Par conséquent, [Bor94, 5.5.9] montre que  $\text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C}) = \text{Mod}(\text{Sym}(S))$  est localement  $\mathcal{U}$ -présentable.

On dispose d'un foncteur canonique  $\mathcal{C}^\ominus \rightarrow \text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C})$  qui associe à une suite symétrique  $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  la suite symétrique  $\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\ominus} (A_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  munie de l'action de  $\text{Sym}(S)$  induite par  $\mu_{\text{Sym}(S)}$ . Ce foncteur est adjoint à gauche du foncteur d'oubli de l'action de  $\text{Sym}(S)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , il existe un foncteur d'évaluation  $\text{ev}_r : \text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  défini par  $\text{ev}_r(A_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} := A_n$ . Ce foncteur, étant le composé du foncteur d'oubli  $\nu : \text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\ominus$  et du foncteur d'évaluation  $\text{ev}_r : \mathcal{C}^\ominus \rightarrow \mathcal{C}$ , est adjoint à droite du foncteur  $A \mapsto \text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\ominus} (A\{-r\})$ . On remarque que le foncteur  $\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\ominus} (-) : \mathcal{C}^\ominus \rightarrow \text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C})$  est monoïdal symétrique fort. On note  $\Sigma_S^\infty$  le composé

$$\mathcal{C} \xrightarrow{(-)\{0\}} \mathcal{C}^\ominus \xrightarrow{\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\ominus} (-)} \text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C})$$

et l'on note  $\Omega_S^\infty$  son adjoint à droite. Le foncteur  $\Sigma_S^\infty$  est monoïdal symétrique fort.

Grâce aux adjonctions  $(-)\{0\} \dashv \text{ev}_0$  et  $\Sigma_S^\infty \dashv \Omega_S^\infty$ , les catégories  $\mathcal{C}^\ominus$  et  $\text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C})$  sont naturellement des  $\mathcal{C}$ -catégories bitensorisées et le foncteur  $\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\ominus} (-) : \mathcal{C}^\ominus \rightarrow \text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C})$  est un  $\mathcal{C}$ -adjoint à gauche. Effectivement, les foncteurs

$$\begin{aligned} C \odot_{\mathcal{C}^\ominus}^{\mathcal{C}} A &:= C\{0\} \otimes_{\mathcal{C}^\ominus} A, \\ \text{mor}_{\mathcal{C}^\ominus}^{\mathcal{C}}(A, B) &:= \text{ev}_0(\underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}^\ominus}(A, B)), \\ \text{et} \quad \mathfrak{m}_{\mathcal{C}^\ominus}^{\mathcal{C}}(C, A) &:= \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}^\ominus}(C\{0\}, A) \end{aligned}$$

forment une adjonction à deux variables qui fait de  $\mathcal{C}^\ominus$  une  $\mathcal{C}$ -catégorie bitensorisée. De même,  $\text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C})$  est la  $\mathcal{C}$ -catégorie bitensorisée associée à l'adjonction à deux variables entre les bifoncteurs

$$\begin{aligned} C \odot_{\text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C})}^{\mathcal{C}} A &:= (\Sigma_S^\infty C) \otimes_{\text{Sp}_S^\ominus} A, \\ \text{mor}_{\text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C})}^{\mathcal{C}}(A, B) &:= \Omega_S^\infty \underline{\text{mor}}_{\text{Sp}_S^\ominus}(A, B), \\ \text{et} \quad \mathfrak{m}_{\text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C})}^{\mathcal{C}}(C, A) &:= \underline{\text{mor}}_{\text{Sp}_S^\ominus}(\Sigma_S^\infty C, A). \end{aligned}$$

Supposons que  $\mathcal{C}$  soit localement  $\mathcal{U}$ -présentable. On remarque que les  $\mathcal{U}$ -petites limites et colimites dans  $\text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C})$  se calculent niveau par niveau, c'est-à-dire que le foncteur  $\text{ev}_r : \text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  préserve les  $\mathcal{U}$ -petites limites et colimites pour tout  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Effectivement, le foncteur  $\text{ev}_r : \text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  est un adjoint à droite et aussi à gauche comme remarqué dans [Hov01, 6.4]. Son adjoint à droite est donné par

$$(1.5.3.1) \quad R_r(A)_n := \begin{cases} \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}} \left( \text{Sym}(S)_{n-r}, \text{coind}_{\{1\}}^{\ominus_n}(A) \right) & \text{si } r \leq n \\ *_{\mathcal{C}} & \text{si } r > n, \end{cases}$$

muni des morphismes d'assemblage  $\sigma_n : S \otimes_{\mathcal{C}} R_r(A) \rightarrow R_r(A)_{n+1}$  évidents, où  $*_{\mathcal{C}}$  désigne l'objet final de  $\mathcal{C}$ . Il s'ensuit que le foncteur d'oubli  $\nu : \text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\ominus$  préserve les  $\mathcal{U}$ -petites limites et colimites. On a déjà remarqué que  $\mathcal{C}^\ominus$  et  $\text{Sp}_S^\ominus(\mathcal{C})$  sont localement  $\mathcal{U}$ -présentables

et le théorème du foncteur adjoint pour les catégories localement  $\mathcal{U}$ -présentables implique alors que le foncteur d'oubli  $\upsilon : \mathrm{Sp}_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}^{\mathfrak{C}}$  est adjoint à gauche et à droite.

Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles, alors on dira qu'un morphisme  $f : (A_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \rightarrow (B_n, \tau_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  de  $\mathrm{Sp}_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  est une **cofibration niveau par niveau** (resp. **équivalence faible niveau par niveau**, resp. **fibration niveau par niveau**) lorsque  $f_n : A_n \rightarrow B_n$  est une cofibration (resp. équivalence faible, resp. fibration) de  $\mathcal{C}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

**Proposition 1.5.4** ([Hov01, 7.2, 7.3]). *Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\mathrm{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique  $\mathcal{U}$ -cellulaire et propre à gauche dont l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$  est cofibrante et  $S \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. Munie des classes des équivalences faibles niveau par niveau et des fibrations niveau par niveau, la catégorie  $\mathrm{Sp}_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathcal{U}$ -cellulaire et propre à gauche. On l'appelle **structure de  $\mathcal{U}$ -modèles projective niveau par niveau** et on la note  $\mathrm{Sp}_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\mathrm{lvl-proj}}$ .*

*Démonstration.* Ces classes de morphismes définissent une structure de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathcal{U}$ -cellulaire et propre à gauche d'après [Hov01, 7.2, 7.3]. Se donner une  $\mathcal{C}$ -catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles revient à se donner un foncteur de Quillen à gauche monoïdal symétrique fort  $\mathcal{C} \rightarrow \mathrm{Sp}_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  d'après [Bar10, 1.31]. Le foncteur composé  $\Sigma_S^{\infty} : \mathcal{C} \rightarrow \mathrm{Sp}_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  est monoïdal symétrique d'après les remarques de 1.5.2 et de 1.5.3. Son adjoint à droite  $\Omega_S^{\infty}$  est de Quillen à droite puisqu'il préserve les propriétés définies niveau par niveau : c'est le foncteur d'évaluation  $(A_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mapsto A_0$ .  $\square$

**Lemme 1.5.5.** *Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\mathrm{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathcal{U}$ -cellulaire,  $\mathcal{U}$ -combinatoire et propre à gauche dont l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$  est cofibrante et  $S \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. Pour tout  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , les foncteurs suivants sont de Quillen à gauche :*

- (i)  $(-)\{-r\} : \mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{C}^{\mathfrak{C}})_{\mathrm{proj}}$  ;
- (ii)  $\mathrm{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^{\mathfrak{C}}} (-) : (\mathcal{C}^{\mathfrak{C}})_{\mathrm{proj}} \rightarrow \mathrm{Sp}_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\mathrm{lvl-proj}}$  ;
- (iii)  $\Sigma_S^{\infty} : \mathcal{C} \rightarrow \mathrm{Sp}_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\mathrm{lvl-proj}}$ .

*De plus, si les équivalences faibles de  $\mathcal{C}$  sont stables par produits finis, alors on peut rajouter à cette liste le foncteur*

- (iv)  $\mathrm{ev}_r : \mathrm{Sp}_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\mathrm{lvl-proj}} \rightarrow \mathcal{C}$ .

*Démonstration.* Les foncteurs  $(-)\{-r\}$  et  $\mathrm{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^{\mathfrak{C}}} (-)$  sont de Quillen à gauche puisque leurs adjoints à droite respectifs  $\mathrm{ev}_r$  et  $\upsilon$  préservent les fibrations et fibrations triviales par définition. Le foncteur  $\Sigma_S^{\infty}$  est le composé de ces deux foncteurs de Quillen à gauche pour  $r = 0$ . Si les équivalences faibles de  $\mathcal{C}$  sont stables par produits finis, alors, d'après la construction (1.5.3.1) de l'adjoint à droite  $R_r$  de  $\mathrm{ev}_r$ , il suffit de noter que  $\mathrm{coind}_{\{1\}}^{\mathfrak{S}_n}(A)$  est un produit de  $n!$  copies de  $A$  muni de l'action de  $\mathfrak{S}_n$  par permutations et que les fibrations et les fibrations triviales sont stables par produits finis.  $\square$

**Proposition 1.5.6.** *Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\mathrm{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathcal{U}$ -combinatoire,  $\mathcal{U}$ -cellulaire et propre à gauche dont l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$  est cofibrante et  $S \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. Si la catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{C}$  est stable et qu'elle vérifie l'axiome du monoïde, alors  $\mathrm{Sp}_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\mathrm{lvl-proj}}$  est stable.*

*Démonstration.* On suppose que  $\mathcal{C}$  est stable. Si  $*_{\mathcal{C}}$  désigne l'objet nul de  $\mathcal{C}$ , alors la suite symétrique donnée par  $*_{\mathcal{C}}$  à chaque niveau est un objet nul de  $\mathcal{C}^{\mathfrak{C}}$  et elle admet une structure canonique de  $\mathrm{Sym}(S)$ -module parce que  $\mathrm{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}} *_{\mathcal{C}} = *_{\mathcal{C}}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . La catégorie  $\mathrm{Sp}_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  est donc pointée.

Il reste à montrer que le foncteur de suspension

$$\Sigma^1 : \text{ho} \left( \mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}} \right) \rightarrow \text{ho} \left( \mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}} \right)$$

est inversible. La structure de  $\mathfrak{U}$ -modèles injective  $(\mathcal{C}^{\mathfrak{C}})_{\text{inj}}$  est monoïdale symétrique,  $\mathfrak{U}$ -combinatoire et stable d'après 1.2.7<sup>10</sup> et 1.2.8. Elle vérifie l'axiome du monoïde d'après 1.2.11. D'après [SS00, 4.1], la catégorie  $\text{Mod}(\text{Sym}(S))$  admet une structure de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{U}$ -combinatoire dont les équivalences faibles et les fibrations sont les équivalences faibles et les fibrations dans  $(\mathcal{C}^{\mathfrak{C}})_{\text{inj}}$ . En particulier, les équivalences faibles sont les équivalences faibles niveau par niveau. La condition d'inversibilité de  $\Sigma^1$  pour une structure de modèles donnée ne dépend que de la classe des équivalences faibles et l'on peut donc remplacer  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{proj}}$  par  $\text{Mod}(\text{Sym}(S))$ . En appliquant [Ayo07b, 4.1.58], on vérifie aisément que  $\text{Mod}(\text{Sym}(S))$  est stable.  $\square$

**Proposition 1.5.7.** *Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{U}$ -combinatoire vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) et (iv') de 1.5.0 et  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant.*

- (i) *Il existe une structure de  $\mathfrak{U}$ -modèles  $\mathfrak{U}$ -cellulaire et propre à gauche sur  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$ , appelée **structure injective niveau par niveau** et notée  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-inj}}$ , dont les cofibrations et les équivalences faibles sont les monomorphismes et les équivalences faibles niveau par niveau, respectivement.*
- (ii) *Le foncteur  $\text{id}_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})} : \mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}} \rightarrow \mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-inj}}$  est une équivalence de Quillen à gauche.*

*Démonstration.*

(i) On applique le théorème de J. Smith que l'on trouve dans [Bek00, 1.7]. Afin d'obtenir un ensemble de cofibrations génératrices, on vérifie que les hypothèses de [Bek00, 1.12] sont satisfaites. Comme on l'a remarqué dans 1.5.3, comme  $\mathcal{C}$  est localement  $\mathfrak{U}$ -présentable, il en est de même de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$ . Les réunions des sous-objets dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  sont effectives et les monomorphismes dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  sont stables par compositions transfinies puisque les monomorphismes dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  sont les morphismes qui sont des monomorphismes niveau par niveau. Effectivement, le foncteur d'oubli  $\upsilon : \mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}^{\mathfrak{C}}$  est conservatif d'après [Bor94, 4.14]. Par suite,  $\upsilon$  détecte les petites limites qu'il préserve. Or c'est un adjoint à droite, de sorte qu'il préserve et détecte les  $\mathfrak{U}$ -petites limites. En particulier, il préserve et détecte les monomorphismes grâce à l'argument donné dans la démonstration de 1.0.7. Les monomorphismes dans la catégorie de foncteurs  $\mathcal{C}^{\mathfrak{C}}$  étant les morphismes qui sont des monomorphismes objet par objet, on en déduit que les monomorphismes dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  sont les monomorphismes niveau par niveau. Les réunions des sous-objets dans  $\mathcal{C}$  sont effective d'après 1.5.0(i) et il s'ensuit que les réunions des sous-objets dans  $\mathcal{C}^{\mathfrak{C}}$  sont effectives. Les produits fibrés, les sommes amalgamées et les monomorphismes dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  étant définis objet par objet, on en déduit que les réunions des sous-objets dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  sont effectives. Ces remarques montrent de plus que les monomorphismes dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  sont stables par  $\mathfrak{U}$ -petites compositions transfinies. Par conséquent, on a un  $\mathfrak{U}$ -petit ensemble  $I$  de morphismes de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  tel que  $\text{cof}(I) = \text{llp}(\text{rlp}(I))$  est la classe des monomorphismes, où  $\text{llp}(S)$  (resp.  $\text{rlp}(S)$ ) désigne la classe des morphismes vérifiant la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) par rapport à l'ensemble de morphismes  $S$ .

10. Le groupoïde  $\mathfrak{C}$  n'a pas d'objet initial, mais l'hypothèse d'existence d'un objet final dans 1.2.7 n'était mise que pour faciliter l'étude des préfaisceaux représentables et l'on peut toujours définir la structure de  $\mathfrak{U}$ -modèles injective  $(\mathcal{C}^{\mathfrak{C}})_{\text{inj}}$ .

Montrons que les hypothèses de [Bek00, 1.7] sont satisfaites. La stabilité de la classe des équivalences faibles niveau par niveau par rétractes et la propriété de deux-sur-trois résultent de 1.5.4. Si  $f \in \text{rlp}(I)$ , alors  $f$  vérifie la propriété de relèvement à droite par rapport à la classe des monomorphismes. D'après 1.5.0(iii) et 1.5.4,  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}$  est  $\mathcal{U}$ -cellulaire et il s'ensuit que  $f$  vérifie la propriété de relèvement à droite par rapport à la classe des cofibrations de  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}$ , de sorte que  $f$  est une fibration triviale niveau par niveau et en particulier une équivalence faible niveau par niveau. Les sommes amalgamées et les  $\mathcal{U}$ -petites compositions transfinies dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$  se définissent niveau par niveau. Par conséquent, les sommes amalgamées et les  $\mathcal{U}$ -petites compositions transfinies d'équivalences faibles monomorphes sont des sommes amalgamées et des  $\mathcal{U}$ -petites compositions transfinies d'équivalences faibles monomorphes dans  $\mathcal{C}$  niveau par niveau et donc des équivalences faibles monomorphes niveau par niveau d'après 1.5.0(iv'). Enfin, la classe des équivalences faibles niveau par niveau est  $\mathcal{U}$ -accessible d'après [Lur09a, A.2.6.6] et l'on en déduit qu'elle vérifie la condition du « *solution set* » d'après [Bek00, 1.15]. En appliquant [Bek00, 1.7], on obtient la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{U}$ -cellulaire voulue. La propriété à gauche de cette structure résulte de ce que tout objet et cofibrant, de sorte que tout carré cocartésien dont une flèche est une cofibration est homotopiquement cartésien.

(ii) Il suffit de remarquer que  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}$  est  $\mathcal{U}$ -cellulaire d'après 1.5.4 et en particulier ses cofibrations sont des monomorphismes.  $\square$

*Remarque 1.5.8.*

(i) Une variante simplifiée de la démonstration de 1.5.7 montre que les hypothèses 1.5.0(i), (ii), (iii) et (iv') ensemble impliquent que  $\mathcal{C}$  admet une deuxième structure de  $\mathcal{U}$ -modèles, appelée *structure injective* et notée  $\mathcal{C}_{\text{inj}}$ , dont les équivalences faibles sont celles de  $\mathcal{C}$  et dont les cofibrations sont les monomorphismes.

(ii) L'auteur ne connaît pas de critère général et utile sur  $\mathcal{C}$  qui garantit que la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles injective niveau par niveau  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-inj}}$  est monoïdale symétrique. Dans les situations où l'on peut le démontrer, on en déduit que  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-inj}}$  et  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}$  vérifient l'axiome du monoïde. On établira l'axiome du monoïde dans les cas qui nous intéresseront dans la suite en adaptant des arguments de [CD09, §7].

**Lemme 1.5.9.** *Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathcal{U}$ -combinatoire dont l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$  est cofibrante qui vérifie les conditions (i), (ii), (iii), (iv'), (v) et (vi') de 1.5.0 et  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. Alors, pour tout  $E \in \text{ob}(\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}))$ , le foncteur  $E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}}(-) : \mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}} \rightarrow \mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-inj}}$  est de Quillen à gauche.*

*Démonstration.* D'après [Hov99, 2.1.20], il suffit de vérifier que  $E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}}(-)$  transforme une famille de cofibrations génératrices (resp. cofibrations triviales génératrices) en cofibrations (resp. cofibrations triviales). Si  $I$  (resp.  $J$ ) est une famille de cofibrations génératrices (resp. cofibrations triviales génératrices) dans  $\mathcal{C}$ , alors

$$I_S := \{\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}} f \{-r\} \mid f \in I, r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$$

(resp.  $J_S := \{\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}} f \{-r\} \mid f \in J, r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$ )

est une famille de cofibrations génératrices (resp. cofibrations triviales génératrices) dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}$  d'après [Hov01, 7.2]. On prétend que, pour tous  $(f : A \rightarrow B) \in I_S$  (resp.

$(f : A \rightarrow B) \in J_S$ ) et  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , le morphisme

$$\begin{array}{c} E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{S}}} (\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}} A\{-r\}) = E \otimes_{\mathcal{C}} A\{-r\} \\ \downarrow \text{id}_E \otimes f\{-r\} \\ E \otimes_{\mathcal{C}} B\{-r\} = E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{S}}} (\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}} B\{-r\}) \end{array}$$

est un monomorphisme (resp. équivalence faible monomorphe niveau par niveau). Comme on l'a remarqué dans la preuve de 1.5.7, les monomorphismes de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{S}}(\mathcal{C})$  sont les monomorphismes niveau par niveau. Si  $n \geq r$ , alors le morphisme  $\text{id}_E \otimes f\{-r\}$  est donné au niveau  $n$  par le morphisme

$$\mathfrak{S}_n \times_{\mathfrak{S}_{n-r} \times \mathfrak{S}_r} (E_{n-r} \otimes_{\mathcal{C}} (\mathfrak{S}_r \times A)) \xrightarrow{\text{id}_{E_{n-r}} \otimes (\mathfrak{S}_r \times f)} \mathfrak{S}_n \times_{\mathfrak{S}_{n-r} \times \mathfrak{S}_r} (E_{n-r} \otimes_{\mathcal{C}} (\mathfrak{S}_r \times B)).$$

D'après 1.5.0(v), c'est un monomorphisme (resp. une équivalence faible monomorphe) lorsque

$$E_{n-r} \otimes_{\mathcal{C}} (\mathfrak{S}_r \times A) \xrightarrow{\text{id}_{E_{n-r}} \otimes (\mathfrak{S}_r \times f)} E_{n-r} \otimes_{\mathcal{C}} (\mathfrak{S}_r \times B),$$

en est un (resp. une), ce qui est le cas lorsque

$$E_{n-r} \otimes_{\mathcal{C}} A \xrightarrow{\text{id}_{E_{n-r}} \otimes f} E_{n-r} \otimes_{\mathcal{C}} B$$

en est un (resp. une). Cette dernière condition est vraie grâce à l'hypothèse (vi'). Pour  $n < r$ , l'assertion est triviale parce que  $(E \otimes_{\mathcal{C}} A\{-r\})_n = \emptyset_{\mathcal{C}}$  dans ce cas.  $\square$

**Proposition 1.5.10.** Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{A}$ -combinatoire dont l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$  est cofibrante qui vérifie les conditions (i), (ii), (iii), (iv'), (v) et (vi') de 1.5.0 et  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. Alors  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{S}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}$  vérifie l'axiome du monoïde.

*Démonstration.* Cela résulte aussitôt de 1.5.9.  $\square$

**Lemme 1.5.11.** Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{A}$ -combinatoire dont l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$  est cofibrante qui vérifie les conditions (i), (ii), (iii), (iv'), (v), (vi) et (vii') de 1.5.0,  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant,  $I$  un  $\mathfrak{A}$ -petit ensemble de cofibrations génératrices dans  $\mathcal{C}$ ,  $(f : A \rightarrow B) \in I$ ,  $\text{cofiber}(I)$  la cofibre de  $f$  et  $E \in \text{ob}(\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{S}}(\mathcal{C}))$ . Alors le morphisme canonique

$$E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{S}}}^L (\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}} \text{cofiber}(f)\{-r\}) \rightarrow E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{S}}} (\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}} \text{cofiber}(f)\{-r\})$$

est un isomorphisme dans  $\text{ho}(\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{S}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}})$  pour tout  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ .

*Démonstration.* Pour tout  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , le foncteur  $(-)\otimes_{\mathcal{C}} \text{cofiber}(f)\{-r\} : \mathcal{C}^{\mathfrak{S}} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$  préserve les équivalences faibles niveau par niveau. En effet, par définition, le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ *_{\mathcal{C}} & \longrightarrow & \text{cofiber}(f) \end{array}$$

est cocartésien et  $f$  est une cofibration, donc  $\text{cofiber}(f)$  est cofibrant. D'après 1.5.5(i), le foncteur  $\{-r\}$  préserve les objets cofibrants. Si  $g : E \rightarrow E'$  est une équivalence faible niveau par niveau dans  $\mathcal{C}^\otimes$ , alors en imitant les arguments de 1.5.9 on se ramène à montrer que, pour  $n \geq r$ , le morphisme

$$E_{n-r} \otimes_{\mathcal{C}} \text{cofiber}(f) \xrightarrow{g_{n-r} \otimes \text{id}_{\text{cofiber}(f)}} E'_{n-r} \otimes_{\mathcal{C}} \text{cofiber}(f)$$

est une équivalence faible dans  $\mathcal{C}$ , ce qui est vrai d'après 1.5.0(vi) car tout objet de  $\mathcal{C}_{\text{inj}}$  est cofibrant.

On choisit une résolution cofibrante  $g : E \rightarrow E'$  dans  $\text{Sp}_S^\otimes(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}$ . Comme  $E'$  et  $\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\otimes} \text{cofiber}(f)\{-r\}$  sont cofibrants dans  $\text{Sp}_S^\otimes(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}$  pour tout  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , on a

$$E \otimes_{\text{Sp}_S^\otimes}^L (\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\otimes} \text{cofiber}(f)\{-r\}) \simeq E' \otimes_{\text{Sp}_S^\otimes} (\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\otimes} \text{cofiber}(f)\{-r\})$$

dans  $\text{ho}(\text{Sp}_S^\otimes(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}})$ . D'ailleurs, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E' \otimes_{\text{Sp}_S^\otimes} (\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\otimes} \text{cofiber}(f)\{-r\}) & \xrightarrow{g \otimes \text{id}} & E \otimes_{\text{Sp}_S^\otimes} (\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\otimes} \text{cofiber}(f)\{-r\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' \otimes_{\mathcal{C}^\otimes} \text{cofiber}(f)\{-r\} & \xrightarrow{g \otimes \text{id}} & E \otimes_{\mathcal{C}^\otimes} \text{cofiber}(f)\{-r\} \end{array}$$

dans  $\mathcal{C}^\otimes$ . La flèche horizontale inférieure est une équivalence faible niveau par niveau car  $(-) \otimes_{\mathcal{C}^\otimes} \text{cofiber}(f)\{-r\}$  préserve les équivalences faibles niveau par niveau et les flèches verticales sont des isomorphismes.  $\square$

**Lemme 1.5.12.** Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{A}$ -combinatoire dont l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$  est cofibrante qui vérifie les conditions (i), (ii), (iii), (iv'), (v), (vi) et (vii) de 1.5.0 et  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. Pour tous  $E, F \in \text{ob}(\text{Sp}_S^\otimes(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}})$ , si  $E$  ou  $F$  est cofibrant, alors le morphisme canonique

$$E \otimes_{\text{Sp}_S^\otimes}^L F \rightarrow E \otimes_{\text{Sp}_S^\otimes} F$$

est un isomorphisme dans  $\text{ho}(\text{Sp}_S^\otimes(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}})$ .

*Démonstration.* D'après 1.5.6,  $\text{Sp}_S^\otimes(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}$  est stable, de sorte que  $\text{ho}(\text{Sp}_S^\otimes(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}})$  est une catégorie triangulée. Le spectre symétrique  $E$  induit deux foncteurs triangulés  $\Phi, \Psi : \text{ho}(\text{Sp}_S^\otimes(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}) \rightarrow \text{ho}(\text{Sp}_S^\otimes(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}})$  définis comme suit :  $\Phi(F) := E \otimes_{\text{Sp}_S^\otimes}^L F := E' \otimes_{\text{Sp}_S^\otimes} F'$ , où  $E' \rightarrow E$  et  $F' \rightarrow F$  sont des résolutions cofibrantes ; et  $\Psi(F) := E \otimes_{\text{Sp}_S^\otimes} F'$ , où  $F' \rightarrow F$  est une résolution cofibrante. Autrement dit,  $\Phi$  est déterminé par le foncteur dérivé gauche du bifoncteur  $(-) \otimes_{\text{Sp}_S^\otimes} (-)$  et  $\Psi$  est le foncteur dérivé gauche du foncteur  $E \otimes_{\text{Sp}_S^\otimes} (-) : \text{Sp}_S^\otimes(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}} \rightarrow \text{Sp}_S^\otimes(\mathcal{C})_{\text{lvl-inj}}$ , lequel est de Quillen à gauche d'après 1.5.9. Par construction, il existe un morphisme canonique de foncteurs  $\Phi \rightarrow \Psi$  et l'on prétend que c'est un isomorphisme. D'après 1.5.11,  $\Phi(F) \rightarrow \Psi(F)$  est un isomorphisme lorsque  $F$  est de la forme  $\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\otimes} \text{cofiber}(f)\{-r\}$ , où  $f$  est une cofibration génératrice et  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ . D'après [Hov99, 7.3.1], les objets de cette forme engendrent la catégorie triangulée  $\text{ho}(\text{Sp}_S^\otimes(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}})$ . Comme la sous-catégorie pleine de  $\text{ho}(\text{Sp}_S^\otimes(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}})$  engendrée par les objets  $F$  tels que  $\Phi(F) \rightarrow \Psi(F)$  est un isomorphisme est localisante<sup>11</sup>, il en résulte

11. On dit qu'une sous-catégorie pleine  $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$  d'une catégorie triangulée dans laquelle les  $\mathfrak{A}$ -petits coproduits sont représentables est *localisante* si  $\mathcal{T}'$  est une sous-catégorie triangulée stable par  $\mathfrak{A}$ -petits coproduits.

que  $\Phi(F) \rightarrow \Psi(F)$  est un isomorphisme dans  $\text{ho}(\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}})$  pour tout  $F$ . L'assertion en découle parce que, si  $F$  est cofibrant, alors le morphisme  $\Phi(F) \rightarrow \Psi(F)$  est donné par  $E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}}^L F \rightarrow E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}} F$ .  $\square$

**Définition 1.5.13** ([Hov01, 7.7]). Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathfrak{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathfrak{C}}, \mathbf{1}_{\mathfrak{C}})$  une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{U}$ -tractable,  $\mathfrak{U}$ -cellulaire et propre à gauche dont l'unité  $\mathbf{1}_{\mathfrak{C}}$  est cofibrante,  $I$  une  $\mathfrak{U}$ -petite famille de cofibrations génératrices de sources et de buts cofibrants et  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. La catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles **projective stable**  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$  est la localisation de Bousfield à gauche de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}$  par rapport à la  $\mathfrak{U}$ -petite classe de morphismes  $\text{stab}(S)$  définie par

$$\{\text{Sym}(S) \otimes_{\mathfrak{C}} (C \otimes_{\mathfrak{C}} S)\{-r-1\} \rightarrow \text{Sym}(S) \otimes_{\mathfrak{C}} C\{-r\} \mid C \in \text{dom}(I) \cup \text{codom}(I), r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\},$$

où  $\text{dom}(I)$  (resp.  $\text{codom}(I)$ ) désigne l'ensemble des sources (resp. buts) des éléments de  $I$ . On appelle **équivalences faibles stables** et **fibrations projectives stables** les équivalences faibles et les fibrations, respectivement, de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$ .

**Proposition 1.5.14** ([Hov01, 7.11]). Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathfrak{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathfrak{C}}, \mathbf{1}_{\mathfrak{C}})$  une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{U}$ -tractable,  $\mathfrak{U}$ -cellulaire et propre à gauche dont l'unité  $\mathbf{1}_{\mathfrak{C}}$  est cofibrante,  $I$  une  $\mathfrak{U}$ -petite famille de cofibrations génératrices de sources et de buts cofibrants et  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. Alors  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$  est une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{U}$ -tractable,  $\mathfrak{U}$ -cellulaire et propre à gauche. Si  $\mathcal{C}$  est stable, alors il en est de même de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$ .

*Démonstration.* On renvoie à [Hov01, 7.11] pour la démonstration. Le fait que cette structure de  $\mathfrak{U}$ -modèles soit  $\mathfrak{U}$ -tractable résulte des considérations de [Hov04, 4.3] ou de [Bar10, 4.12]. La stabilité de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$  dans le cas où  $\mathcal{C}$  est stable résulte de [Ayo07b, 4.3.77].  $\square$

**Lemme 1.5.15.** Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathfrak{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathfrak{C}}, \mathbf{1}_{\mathfrak{C}})$  une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) et (iv) de 1.5.0 et  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. Alors la classe des équivalences faibles stables monomorphes dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$  est stable par sommes amalgamées et par  $\mathfrak{U}$ -petites colimites filtrantes.

*Démonstration.* On considère un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ E' & \xrightarrow{f'} & E' \amalg_E F \end{array}$$

dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  avec  $i$  un monomorphisme. Dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-inj}}$ , les objets  $E$ ,  $E'$  et  $F$  sont cofibrants et  $i$  est une cofibration. Le carré est donc homotopiquement cocartésien dans  $\text{ho}(\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-inj}}) = \text{ho}(\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}})$ . L'identité  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}} \rightarrow \mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$  est de Quillen à gauche et préserve donc les colimites homotopiques et en particulier les carrés homotopiquement cocartésiens. Par suite,  $i'$  est une équivalence faible stable si  $i$  en est une. D'après 1.5.0(iv), les monomorphismes de  $\mathcal{C}$  sont stables par sommes amalgamées. Les monomorphismes de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  sont les monomorphismes niveau par niveau et les sommes amalgamées se calculent niveau par niveau. Du coup, les monomorphismes de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  sont stables par sommes amalgamées et  $i'$  est donc une équivalence faible stable monomorphe dès que  $i$  en est une.

On considère ensuite deux  $\mathcal{U}$ -petits diagrammes filtrants  $F, G : A \rightrightarrows \mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ . Les colimites dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$  se calculent niveau par niveau, de sorte que 1.5.0(iv) entraîne que le foncteur  $\text{colim} : \mathcal{F}\text{un}(A, \mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})) \rightarrow \mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$  préserve les équivalences faibles niveau par niveau. Par conséquent, le morphisme  $\mathbf{L}\text{colim } F \rightarrow \text{colim } F$  induit par un choix de résolution cofibrante dans  $\mathcal{F}\text{un}(A, \mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}})_{\text{proj}}$  est un isomorphisme dans  $\text{ho}(\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}})$ . C'est donc *a fortiori* un isomorphisme dans  $\text{ho}(\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}})$ . D'après 1.3.10 et la remarque que les colimites homotopiques dans  $\text{ho}(\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}})$  transforment les équivalences faibles stables objet par objet en équivalences faibles stables, si  $f : F \rightarrow G$  est un morphisme de  $A$ -diagrammes qui est une équivalence faible stable objet par objet, alors on a un carré homotopiquement commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}\text{colim } F & \xrightarrow{\mathbf{L}\text{colim } f} & \mathbf{L}\text{colim } G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{colim } F & \xrightarrow{\text{colim } f} & \text{colim } G \end{array}$$

dans lequel  $\mathbf{L}\text{colim } f$  et les flèches verticales sont des isomorphismes. Comme les  $\mathcal{U}$ -petites colimites filtrantes préservent les monomorphismes d'après 1.5.0(iv) et comme les monomorphismes dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$  sont les monomorphismes niveau par niveau, les  $\mathcal{U}$ -petites colimites filtrantes préservent les monomorphismes dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ . L'assertion en résulte.  $\square$

**Proposition 1.5.16.** *Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) et (iv) de 1.5.0 et  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. Alors la catégorie  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$  admet une structure de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{U}$ -tractable,  $\mathcal{U}$ -cellulaire et propre à gauche dont les cofibrations et les équivalences faibles sont les monomorphismes et les équivalences faibles stables, respectivement. On l'appelle **structure injective stable** et on la note  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-inj}}$ .*

*Démonstration.* On vérifie que les conditions de [Bek00, 1.7] sont satisfaites. D'après 1.5.7, il existe un  $\mathcal{U}$ -petit ensemble  $I$  de cofibrations génératrices parce que les cofibrations de  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-inj}}$  sont celles de  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-inj}}$ . La classe des équivalences faibles stables est stable par rétractes et vérifie l'axiome de deux-sur-trois puisque c'est la classe des équivalences faibles de  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$ . On sait que la classe  $\text{rlp}(I)$  est contenue dans la classe des équivalences faibles niveau par niveau, donc *a fortiori* dans la classe des équivalences faibles stables. D'après 1.5.15, la classe des équivalences faibles stables monomorphes est stable par  $\mathcal{U}$ -petite composition transfinie et par sommes amalgamées. Enfin, la classe des équivalences faibles stables vérifie la condition du « solution set » parce que c'est la classe des équivalences faibles de la catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{U}$ -combinatoire  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$ .  $\square$

**Proposition 1.5.17.** *Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique vérifiant les conditions (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi) et (vii) de 1.5.0 et  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. Alors, pour tout  $E \in \text{ob}(\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}))$ , le foncteur  $E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}}(-) : \mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}} \rightarrow \mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-inj}}$  est de Quillen à gauche.*

*Démonstration.* D'après 1.5.9, le foncteur composé

$$\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}} \xrightarrow{E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}}(-)} \mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-inj}} \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-inj}}$$

est de Quillen à gauche. Il suffit de montrer que la condition (iii) de 1.3.7 est satisfaite par rapport à la localisation de Bousfield  $\mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}} \rightarrow \mathcal{S}p_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$ . Soit  $f : F \rightarrow F'$  une

équivalence faible stable entre objets cofibrants de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$ . On a un carré commutatif dans  $\text{ho}(\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}})$

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}}^L F & \xrightarrow{\text{id} \otimes^L f} & E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}}^L F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}} F & \xrightarrow{\text{id} \otimes f} & E \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}} F' \end{array}$$

dont les flèches verticales sont induites par le choix d'une résolution cofibrante fonctorielle. D'après 1.5.12, ces flèches verticales sont des isomorphismes. La flèche horizontale supérieure étant un isomorphisme par définition de  $\otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}}^L$ , l'assertion en résulte.  $\square$

**Théorème 1.5.18.** Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathfrak{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathfrak{C}}, \mathbf{1}_{\mathfrak{C}})$  une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique vérifiant les hypothèses de 1.5.0 et  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. Alors  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$  vérifie l'axiome du monoïde.

*Démonstration.* L'assertion résulte aussitôt de 1.5.17 et de 1.5.15.  $\square$

**Définition 1.5.19.** Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathfrak{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathfrak{C}}, \mathbf{1}_{\mathfrak{C}})$  une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{U}$ -tractable,  $\mathfrak{U}$ -cellulaire et propre à gauche et  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant.

(i) La localisation de Bousfield à gauche  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$  de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}$  par rapport à la classe  $\text{stab}(S)$  définie dans 1.5.13 existe d'après 1.5.14. On dira qu'un objet  $E = (E_n, \sigma_n)_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$  de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$  est un  $\Omega_S^{\infty}$ -spectre si, pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ ,  $E_n$  est un objet fibrant de  $\mathcal{C}$  et que l'adjoint  $\check{\sigma}_n : E_n \rightarrow \underline{\text{mor}}_{\mathfrak{C}}(S, E_{n+1})$  du morphisme d'assemblage  $\sigma_n$  est une équivalence faible. D'après [Hov01, 7.8], les  $\Omega^{\infty}$ -spectres sont les objets fibrants de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$ .

(ii) Plus généralement, on appelle  $\Omega^{\infty}$ -spectre faible un objet  $\text{stab}(S)$ -local de  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})$ . Évidemment, un  $\Omega^{\infty}$ -spectre est un  $\Omega^{\infty}$ -spectre faible. On peut caractériser les  $\Omega^{\infty}$ -spectres faibles  $(E_n, \sigma_n)_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$  par la propriété suivante : pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , le morphisme canonique  $\check{\sigma}_n : E_n \rightarrow \mathbf{R}\underline{\text{mor}}_{\mathfrak{C}}(S, E_{n+1})$ , adjoint du morphisme  $\sigma_n : S \otimes_{\mathfrak{C}} E_n \rightarrow E_{n+1}$ , est un isomorphisme dans  $\text{ho}(\mathcal{C})$ . La théorie des localisations de Bousfield montre que les  $\Omega^{\infty}$ -spectres sont précisément les  $\Omega^{\infty}$ -spectres faibles qui sont fibrants dans  $\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}$ .

(iii) Soit  $E = (E_n, \sigma_n)_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \in \text{ob}(\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C}))$ . On note  $E(1)$  le  $S$ -spectre symétrique

$$E(1) = \underline{\text{mor}}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{C}}}(1_{\mathfrak{C}}\{-1\}, E) \cong \underline{\text{mor}}_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}}(\text{Sym}(S)\{-1\}, E).$$

Explicitement,  $E(1) = (E(1)_n, \sigma(1)_n)_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$  est le  $S$ -spectre symétrique donné par  $E(1)_n = E_{n+1}$  et  $\sigma(1)_n = \sigma_{n+1}$ , où l'action de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $E_{n+1}$  est celle induite par l'inclusion  $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathfrak{S}_{n+1}$ . Il existe un morphisme canonique  $\sigma : \Sigma_S^{\infty} S \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}} E = S\{0\} \otimes_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{C}}} E \rightarrow E(1)$  donné par le morphisme  $\sigma_n$  au niveau  $n \in \mathbf{Z}_{n \geq 0}$ . On peut itérer la construction  $(-)(1)$  : on pose  $E(0) := E$  et l'on note  $E(n)$  le  $S$ -spectre symétrique  $(E(n-1))(1)$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ . Évidemment, les morphismes d'assemblage  $\sigma_r$  induisent un morphisme canonique  $\sigma^n : (\Sigma_S^{\infty} S)^{\otimes n} \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}} E \rightarrow E(n)$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ .

**Lemme 1.5.20** ([CD09, 7.11, p. 255]). Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathfrak{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathfrak{C}}, \mathbf{1}_{\mathfrak{C}})$  une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique vérifiant les hypothèses de 1.5.0,  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant,  $E \in \text{ob}(\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}(\mathcal{C}))$  un  $\Omega^{\infty}$ -spectre et  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ . Alors le morphisme canonique  $\sigma^r : (\Sigma_S^{\infty} S)^{\otimes r} \otimes_{\mathcal{S}p_S^{\mathfrak{C}}} E \rightarrow E(r)$  est une équivalence faible stable.

*Démonstration.* Le cas  $r = 0$  est trivial. Si  $E$  est un  $\Omega^\infty$ -spectre, alors il en est de même de  $E(1)$ , parce que  $\text{Sym}(S)\{-1\}$  est cofibrant d'après 1.5.5 et  $\underline{\text{mor}}_{\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}}$  est un bifoncteur de Quillen. Du coup, par récurrence, il suffit de traiter du cas  $r = 1$ . Par adjonction, on peut factoriser  $\sigma$  en

$$\Sigma_S^\infty S \otimes_{\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}} E \xrightarrow{\text{id} \otimes \check{\sigma}} \Sigma_S^\infty S \otimes_{\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}} \underline{\text{mor}}_{\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}} \left( \Sigma_S^\infty S, E(1) \right) \xrightarrow{\text{counit}} E(1),$$

où  $\check{\sigma}$  est le morphisme adjoint de  $\sigma$ . D'après 1.5.12, il existe un isomorphisme d'endo-foncteurs  $\Sigma_S^\infty S \otimes_{\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}} (-) \cong \Sigma_S^\infty S \otimes_{\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}}^L (-)$  de  $\text{ho} \left( \mathbb{S}p_S^\mathbb{C}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}} \right)$ . Par conséquent, d'après [Hov01, 9.3], la deuxième flèche est une équivalence faible stable. Comme  $\Sigma_S^\infty S \otimes_{\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}} (-) = \Sigma_S^\infty S \otimes_{\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}}^L (-)$  préserve les équivalences faibles niveau par niveau, il reste à constater que  $E$  est un  $\Omega^\infty$ -spectre si et seulement s'il est fibrant dans  $\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}(\mathcal{C})_{\text{lvl-proj}}$  et que  $\check{\sigma}$  est une équivalence faible niveau par niveau, ce que l'on peut vérifier facilement à l'aide de l'identification  $\underline{\text{mor}}_{\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}} \left( \Sigma_S^\infty S, E(1) \right) \cong \underline{\text{mor}}_{\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}} \left( \text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^\mathbb{C}} S\{-1\}, E \right)$ .  $\square$

**Proposition 1.5.21** ([CD09, 7.16]). *Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique vérifiant les hypothèses de 1.5.0,  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant,  $E = (E_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \in \text{ob} \left( \mathbb{S}p_S^\mathbb{C}(\mathcal{C}) \right)$  un  $\Omega^\infty$ -spectre faible et  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .*

(i) *Le morphisme canonique  $\sigma^r : (\Sigma_S^\infty S)^{\otimes r} \otimes_{\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}} E \rightarrow E(r)$  est un isomorphisme dans  $\text{ho} \left( \mathbb{S}p_S^\mathbb{C}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}} \right)$ .*

(ii) *Il existe un isomorphisme canonique  $\mathbf{R}\Omega_S^\infty \left( (\Sigma_S^\infty S)^{\otimes r} \otimes_{\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}} E \right) \cong E_r$  dans  $\text{ho}(\mathcal{C})$ .*

*Démonstration.*

(i) L'assertion est vraie si  $E$  est un  $\Omega^\infty$ -spectre d'après 1.5.20. Sinon, il existe une résolution fibrante  $\rho : E \rightarrow E'$  dans  $\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$ . Comme les  $\Omega^\infty$ -spectres faibles sont les objets  $\text{stab}(S)$ -locaux, l'équivalence faible stable  $\rho$  est une équivalence faible niveau par niveau. Il en résulte que le morphisme induit  $\rho(r) : E(r) \rightarrow E'(r)$  est une équivalence faible niveau par niveau. Comme le foncteur  $(\Sigma_S^\infty S)^{\otimes r} \otimes_{\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}} (-)$  préserve les équivalences faibles niveau par niveau (1.5.21), on est ramené au cas où  $E$  est un  $\Omega^\infty$ -spectre.

(ii) C'est une conséquence immédiate de (i).  $\square$

**Corollaire 1.5.22.** *Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique vérifiant les hypothèses de 1.5.0,  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant et  $\mathcal{G} \subseteq \text{ob}(\mathcal{C})$  une famille homotopiquement génératrice d'objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables. Si  $G \otimes_{\mathcal{C}}^L S$  est homotopiquement  $\aleph_0$ -présentable pour tout  $G \in \mathcal{G}$ , alors les  $\Omega^\infty$ -spectres faibles dans  $\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}(\mathcal{C})$  sont stables par  $\mathfrak{U}$ -petites colimites filtrantes.*

*Démonstration.* D'après 1.5.0(iv), les  $\mathfrak{U}$ -petites colimites dans  $\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}(\mathcal{C})$  sont des  $\mathfrak{U}$ -petites colimites homotopiques dans  $\mathbb{S}p_S^\mathbb{C}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$ . Soit  $\alpha \mapsto E_\alpha : A \rightarrow \mathbb{S}p_S^\mathbb{C}(\mathcal{C})$  un  $\mathfrak{U}$ -petit diagramme filtrant tel que  $E_\alpha$  soit un  $\Omega^\infty$ -spectre faible pour tout  $\alpha \in \text{ob}(A)$ . Alors on prétend que le morphisme canonique

$$\check{\sigma}_n : \text{colim}_{\alpha \in A} E_{\alpha, n} \rightarrow \mathbf{R}\underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}} \left( S, \text{colim}_{\alpha \in A} E_{\alpha, n+1} \right)$$

est un isomorphisme dans  $\text{ho}(\mathcal{C})$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Comme  $S$  est supposé homotopiquement  $\aleph_0$ -présentable, on a un isomorphisme canonique

$$\text{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{R}\underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}} \left( S, E_{\alpha, n+1} \right) \rightarrow \mathbf{R}\underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}} \left( S, \text{colim}_{\alpha \in A} E_{\alpha, n+1} \right)$$

pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  grâce à l'existence de la famille  $\mathcal{G}$  et la  $\aleph_0$ -présentabilité des objets  $G \otimes_{\mathcal{C}}^L S$ . L'assertion en résulte.  $\square$

**Lemme 1.5.23.** Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\aleph$ -modèles monoïdale symétrique vérifiant les hypothèses de 1.5.0,  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant,  $\mathcal{G} \subseteq \text{ob}(\mathcal{C})$  une  $\aleph$ -petite famille génératrice et homotopiquement génératrice d'objets cofibrants,  $\aleph_0$ -présentables et homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables. Si  $G \otimes_{\mathcal{C}}^L S$  est homotopiquement  $\aleph_0$ -présentable dans  $\mathcal{C}$  pour tout  $G \in \mathcal{G}$ , alors  $\{\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^{\otimes}} G\{-r\} \mid G \in \mathcal{G}, r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$  est une  $\aleph$ -petite famille génératrice et homotopiquement génératrice d'objets  $\aleph_0$ -présentables et homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables dans  $\text{Sp}_S^{\otimes}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$ .

*Démonstration.* Il est facile de voir que les objets  $G\{-r\}$ ,  $G \in \mathcal{G}$ ,  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , engendrent  $\mathcal{C}^{\otimes}$  et il en résulte que les objets  $\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^{\otimes}} G\{-r\}$  engendrent  $\text{Mod}(\text{Sym}(S)) \cong \text{Sp}_S^{\otimes}(\mathcal{C})$ . L'argument de [Ayo07b, 4.5.67] montre que la famille de tels objets est également homotopiquement génératrice.

D'ailleurs, les objets  $G\{-r\}$  sont  $\aleph_0$ -présentables dans  $\mathcal{C}^{\otimes}$  parce que les  $\aleph$ -petites colimites dans  $\mathcal{C}^{\otimes}$  se calculent niveau par niveau. Comme le foncteur d'oubli  $\upsilon : \text{Sp}_S^{\otimes}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}^{\otimes}$  préserve les  $\aleph$ -petites colimites, il en résulte par adjonction que  $\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^{\otimes}} G\{-r\}$  est  $\aleph_0$ -présentable pour tous  $G \in \mathcal{G}$ ,  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ . Montrons qu'un objet de cette forme est homotopiquement  $\aleph_0$ -présentable. Soient  $G \in \mathcal{G}$ ,  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  et  $\alpha \mapsto E_{\alpha} : A \rightarrow \text{Sp}_S^{\otimes}(\mathcal{C})$  un  $\aleph$ -petit diagramme filtrant. Sachant que les  $\aleph$ -petites colimites filtrantes sont des colimites homotopiques dans  $\text{Sp}_S^{\otimes}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$ , on prétend que le morphisme canonique

$$\begin{array}{c} \text{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{R}\text{mor}_{\text{Sp}_S^{\otimes}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}}(\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^{\otimes}} G\{-r\}, E_{\alpha}) \\ \downarrow \\ \mathbf{R}\text{mor}_{\text{Sp}_S^{\otimes}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}}(\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^{\otimes}} G\{-r\}, \text{colim}_{\alpha \in A} E_{\alpha}) \end{array}$$

est un isomorphisme dans  $\text{ho}(\text{Set}_{\Delta})$ . Le foncteur  $(-)\{-r\}$  préserve les colimites et l'on peut donc supposer  $r = 0$  en remplaçant  $E_{\alpha}$  par  $E_{\alpha}\{-r\}$  pour tout  $\alpha \in A$ . De plus, on peut évidemment supposer que  $E_{\alpha}$  est un  $\Omega^{\infty}$ -spectre faible pour tout  $\alpha \in A$ . D'après 1.5.22,  $\text{colim}_{\alpha \in A} E_{\alpha}$  est un  $\Omega^{\infty}$ -spectre faible. Il reste à remarquer que

$$\begin{aligned} & \text{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{R}\text{mor}_{\text{Sp}_S^{\otimes}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}}(\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^{\otimes}} G\{0\}, E_{\alpha}) \\ & \cong \text{colim}_{\alpha \in A} \mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{C}}(G, E_{\alpha,0}) \\ & \cong \mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{C}}\left(G, \text{colim}_{\alpha \in A} E_{\alpha,0}\right) \\ & \cong \mathbf{R}\text{mor}_{\mathcal{C}}\left(G, \left(\text{colim}_{\alpha \in A} E_{\alpha}\right)_0\right) \\ & = \mathbf{R}\text{mor}_{\text{Sp}_S^{\otimes}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}}\left(\text{Sym}(S) \otimes_{\mathcal{C}^{\otimes}} G\{0\}, \text{colim}_{\alpha \in A} E_{\alpha}\right), \end{aligned}$$

grâce à 1.5.21 et à l'hypothèse que les éléments de  $\mathcal{G}$  sont cofibrants.  $\square$

**Lemme 1.5.24.** Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\aleph$ -modèles monoïdale symétrique vérifiant les hypothèses de 1.5.0 et  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. Alors  $\text{Sp}_S^{\otimes}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$  est naturellement une  $\mathcal{C}$ -catégorie de  $\aleph$ -modèles. De plus, si  $(\mathcal{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  est une catégorie de  $\aleph$ -modèles monoïdale symétrique dont l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{V}}$  est cofibrante et que  $\mathcal{C}$  est une  $\mathcal{V}$ -catégorie de  $\aleph$ -modèles, alors  $\text{Sp}_S^{\otimes}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$  est naturellement une  $\mathcal{V}$ -catégorie de  $\aleph$ -modèles.

*Démonstration.* On applique [Bar10, 1.31]. Plus précisément, comme on l'a remarqué dans 1.5.3, l'adjonction  $\Sigma_S^\infty \dashv \Omega_S^\infty$  induit une structure de  $\mathcal{C}$ -catégorie sur  $\mathcal{S}p_S^\mathcal{C}(\mathcal{C})$  et, munie de cette structure,  $\mathcal{S}p_S^\mathcal{C}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles car  $\Sigma_S^\infty$  est de Quillen à gauche. La deuxième assertion se démontre de la même façon : la structure de  $\mathcal{V}$ -catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles sur  $\mathcal{C}$  induit un foncteur de Quillen à gauche monoïdal symétrique fort  $(-) \odot_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}} \mathbf{1}_{\mathcal{C}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}$  d'après [Bar10, 1.31] et le composé  $\Sigma_S^\infty((-) \odot_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}} \mathbf{1}_{\mathcal{C}}) : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{S}p_S^\mathcal{C}(\mathcal{C})$  induit une structure de  $\mathcal{V}$ -catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles sur  $\mathcal{S}p_S^\mathcal{C}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}}$ .  $\square$

On rappelle encore un théorème utile de M. Hovey dont on aura besoin.

**Théorème 1.5.25** ([Hov01, 8.3]). *Soient  $f^* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur de Quillen à gauche monoïdal symétrique fort entre catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdales symétriques  $\mathcal{U}$ -tractables,  $\mathcal{U}$ -cellulaires et propres à gauche et  $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$  un objet cofibrant. Alors  $f^*$  induit un foncteur de Quillen à gauche monoïdal symétrique fort  $\mathcal{S}p_S^\mathcal{C}(f) : \mathcal{S}p_S^\mathcal{C}(\mathcal{C})_{\text{st-proj}} \rightarrow \mathcal{S}p_{f^*S}^\mathcal{C}(\mathcal{C}')_{\text{st-proj}}$ . De plus,  $\mathcal{S}p_S^\mathcal{C}(f^*)$  est une équivalence de Quillen dès que  $f^*$  en est une.*

## 1.6 STRUCTURES DE MODÈLES $\mathbf{P}^1$ -STABLES

*Notation 1.6.0.* Dans ce numéro, on fixe les données suivantes :

- (i) un  $\mathcal{U}$ -schéma  $\mathbf{B}$  noethérien de dimension de Krull finie ;
- (ii) une sous-catégorie pleine  $\mathcal{S} \subseteq \text{Sch}^{\text{ft}} \downarrow \mathbf{B}$  stable par produits finis et par tirés-en-arrière le long des morphismes de  $\text{Sch}^{\text{ft}} \downarrow \mathbf{B}$  et contenant les  $\mathbf{B}$ -schémas quasi-projectifs ;
- (iii) la classe admissible  $\mathcal{S}m \subseteq \text{mor}(\mathcal{S})$  des morphismes lisses ;
- (iv) une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  de Ext-dimension  $\leq d_{\mathcal{T}} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  ;
- (v) la catégorie  $\mathcal{T} := \text{Ind}(\mathcal{T}_0)$  des ind-objets de  $\mathcal{T}_0$  ; et
- (vi) la catégorie  $\mathcal{C}plx(\mathcal{T})_{\text{inj}}$  des complexes dans  $\mathcal{T}$  munie de la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles injective.

En particulier, ces données vérifient les hypothèses de 1.4.0 d'après 1.0.7. Pour tout  $S \in \text{ob}(\mathcal{S})$ , on désigne par  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}, S} \in \text{ob}(\mathcal{P}Sh(\mathcal{S}m \downarrow \mathcal{S}, \mathcal{C}plx(\mathcal{T})))$  l'objet unité, à savoir le préfaisceau constant de valeur  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}$ , et par  $\mathbf{K}$  le corps de caractéristique nulle  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$ .

*Résumé.* On achève la construction de la catégorie homotopique stable à coefficients ind-tannakiens en stabilisant les structures de modèles projective et injective  $\mathbf{A}^1$ -Nisnevich-locales de §1.4 par rapport à  $\mathbf{P}^1$ . Il s'agit de résumer les résultats des numéros précédents dans le cas particulier auquel on s'intéresse au prochain chapitre, à savoir celui des spectres symétriques à coefficients ind-tannakiens. Par ailleurs, l'existence des adjonctions de 1.0.8 et 1.0.6 nous permet de relier très fructueusement la catégorie homotopique stable  $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathcal{T}}(S)$  à coefficients dans  $\mathcal{T}$  aux catégories  $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathbf{K}}(S)$  et  $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathbf{K}'}(S)$  lorsqu'il existe un foncteur fibre  $\omega : \mathcal{T}_0 \rightarrow \text{Mod}(\mathbf{K}')$  avec  $\mathbf{K}'$  un corps de caractéristique nulle.

*Plan.* On commence par vérifier que la catégorie  $\mathcal{C}plx(\mathcal{T})_{\text{inj}}$  satisfait aux diverses hypothèses introduites dans les numéros précédents (1.6.1, 1.6.2) et l'on en déduit l'existence d'une catégorie homotopique stable à coefficients ind-tannakiens jouissant des propriétés attendues (1.6.7). Dans 1.6.8, on construit une adjonction  $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathbf{K}}(S) \rightleftarrows \mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathcal{T}}(S)$  induite par celle de 1.0.8. Une conséquence heureuse est l'existence d'une famille homotopiquement génératrice d'objets homotopiquement fortement dualisables de  $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathcal{T}}(\mathbf{B})$ , où  $\mathbf{B} = \text{Spec}(\kappa)$  est le spectre d'un corps parfait (1.6.9). On verra dans 1.6.11 que l'existence d'un foncteur fibre  $\omega : \mathcal{T}_0 \rightarrow \text{Mod}(\mathbf{K}')$  avec  $\mathbf{K}'$  un corps de caractéristique nulle induit une adjonction  $\omega^* : \mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathcal{T}}(-) \rightleftarrows$

$\mathcal{SH}_{\mathbb{K}'}(-) : \mathbf{R}\omega_*$  de catégories motiviques ([CD12b, 2.4.45] dont l'adjoint à gauche est conservatif.

**Proposition 1.6.1.** *Soit  $S \in \text{ob}(S)$ . Les catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles*

- (i)  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{proj}}$ ,  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{inj}}$ ,
- (ii)  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{Nis-proj}}$ ,  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{Nis-inj}}$ ,
- (iii)  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{A^1\text{-Nis-proj}}$  et  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{A^1\text{-Nis-inj}}$

sont monoïdales symétriques,  $\mathcal{U}$ -tractables, stables et propres à gauche et elles vérifient l'axiome du monoïde. De plus, si  $\mathcal{G} := \{V[n] \mid V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0), n \in \mathbb{Z}\}$ , alors  $\mathcal{G} \odot^{\mathcal{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathcal{S}m \downarrow S)$  est une  $\mathcal{U}$ -petite famille génératrice et homotopiquement génératrice d'objets  $\mathfrak{K}_0$ -présentables et homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentables dans chacune de ces structures de  $\mathcal{U}$ -modèles.

*Démonstration.*

- (i) La première assertion résulte de 1.0.7, 1.2.7, 1.2.8 et 1.2.11 et la seconde de 1.0.12 et 1.2.14. On remarque que les  $\mathcal{U}$ -petites colimites filtrantes sont exactes dans la catégorie abélienne de  $\mathcal{U}$ -Grothendieck  $\mathcal{Cplx}(\mathcal{T})$ , de sorte que les hypothèses de 1.2.14 sont satisfaites.
- (ii) La première assertion résulte de 1.3.3, 1.3.5 et 1.3.6 et la seconde de 1.0.12 et 1.3.9.
- (iii) La première assertion résulte de 1.4.2 et 1.4.4 et la seconde de 1.0.12 et 1.4.6.  $\square$

**Lemme 1.6.2.** *Soit  $S \in \text{ob}(S)$ . Alors les catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles*

$$\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{A^1\text{-Nis-proj}} \quad \text{et} \quad \mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{A^1\text{-Nis-inj}}$$

*vérifient les hypothèses de 1.5.0.*

*Démonstration.*

- (i) Les réunions sont effectives dans une catégorie abélienne.
- (ii) Les monomorphismes sont stables par  $\mathcal{U}$ -petites compositions transfinies, voire par  $\mathcal{U}$ -petites colimites filtrantes, dans une catégorie abélienne de  $\mathcal{U}$ -Grothendieck.
- (iii) La  $\mathcal{U}$ -tractabilité et la propreté à gauche ont été constatées dans 1.4.2. Pour la  $\mathcal{U}$ -cellularité, il suffit de remarquer que les localisations de Bousfield à gauche par rapport aux  $\mathcal{U}$ -petites classes de morphismes préservent cette propriété d'après [Hir03, 4.1.1] et que  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{proj}}$  et  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{inj}}$  sont  $\mathcal{U}$ -cellulaires parce qu'il en est ainsi de  $\mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$ . En effet, tout monomorphisme dans une catégorie abélienne est effectif.
- (iv) Dans une catégorie de complexes dans une catégorie abélienne de  $\mathcal{U}$ -Grothendieck, les monomorphismes et les quasi-isomorphismes sont stables par  $\mathcal{U}$ -petites colimites filtrantes. D'après 1.3.10, les équivalences faibles de  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{A^1\text{-Nis-proj}}$  sont stables par  $\mathcal{U}$ -petites colimites filtrantes. Dans une catégorie abélienne, les monomorphismes sont stables par sommes amalgamées. Si  $f : K \rightarrow L$  est une équivalence faible monorphe de  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{A^1\text{-Nis-proj}}$  et que  $g : K \rightarrow K'$  et un morphisme quelconque, alors le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & K' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ L & \xrightarrow{g'} & L \amalg_K K' \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien parce que  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{inj})_{A^1\text{-Nis-inj}}$  est propre à gauche d'après (iii) et sa classe de cofibrations est la classe des monomorphismes. Il en résulte que  $f'$  est une équivalence faible et l'on a déjà remarqué qu'il est monomorphe.

(v) Un coproduit fini de monomorphismes ou de quasi-isomorphismes monomorphes dans la catégorie abélienne  $\mathcal{Cplx}(\mathcal{T})$  est forcément un monomorphisme ou un quasi-isomorphisme monomorphe, respectivement. Par suite, les monomorphismes et les équivalences faibles monomorphes de  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{inj})_{proj}$  sont stables par coproduits finis. Il est évident que cette stabilité par coproduits est respectée par les localisations de Bousfield à gauche : il suffit de se rappeler de la définition des morphismes  $S$ -locales, où  $S$  est une classe de morphismes d'une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles.

(vi) Les cofibrations de la catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{inj})_{A^1\text{-Nis-inj}}$  sont les monomorphismes et cette structure de  $\mathcal{U}$ -modèles est monoïdale symétrique d'après 1.4.4.

(vii) La catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{inj})_{A^1\text{-Nis-inj}}$  est stable d'après 1.4.2.  $\square$

**Théorème 1.6.3.** Soient  $S \in \text{ob}(S)$  et  $T \in \text{ob}(\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{inj})_{proj})$  un objet cofibrant. Alors les  $\mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{inj}$ -catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdales symétriques

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}p_T^{\mathcal{S}} \left( \mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{inj})_{A^1\text{-Nis-proj}} \right)_{st\text{-proj}} \\ \text{et } & \mathcal{S}p_T^{\mathcal{S}} \left( \mathcal{PSh}(\mathcal{S}m \downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{inj})_{A^1\text{-Nis-inj}} \right)_{st\text{-proj}} \end{aligned}$$

sont stables,  $\mathcal{U}$ -tractables,  $\mathcal{U}$ -cellulaires, propres à gauche et vérifient l'axiome du monoïde. De plus, elles sont parfaites au sens de [CD12b, 7.2.3] et, si  $(V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{Cplx}(\mathcal{T})} \mathbf{y}_{\mathcal{T},S}(X)) \otimes^L T$  est homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentable pour tous  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}m \downarrow S)$ , alors

$$\{\text{Sym}(T) \otimes_{\mathcal{PSh}^{\mathcal{S}}} (V[n] \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{T}} \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(X))\{-r\} \mid V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0), n \in \mathbf{Z}, X \in \text{ob}(\mathcal{S}m \downarrow S), r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$$

est une famille génératrice et homotopiquement génératrice d'objets cofibrants,  $\mathfrak{K}_0$ -présentables et homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentables.

*Démonstration.* On commence par remarquer que ce sont des  $\mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{inj}$ -catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétriques d'après 1.5.14 et 1.5.24. La première assertion résulte aussitôt de 1.6.2 et de 1.5.18. On rappelle qu'une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique  $\mathcal{M}$  est dite *parfaite* si elle vérifie les conditions suivantes :

- (i)  $\mathcal{M}$  est  $\mathcal{U}$ -tractable ;
- (ii)  $\mathcal{M}$  vérifie l'axiome du monoïde ;
- (iii) pour toute équivalence faible  $R \rightarrow S$  de monoïdes dans  $\mathcal{M}$ , le foncteur  $S \otimes_R (-) : \mathcal{LMod}(R) \rightarrow \mathcal{LMod}(S)$  est une équivalence de Quillen à gauche, où  $\mathcal{LMod}(-)$  désigne la catégorie des modules à gauche, munie de la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles de [SS00, 4.1] ;
- (iv) les équivalences faibles de  $\mathcal{M}$  sont stables par  $\mathcal{U}$ -petits coproduits.

Dans notre cas particulier, (i) résulte de 1.5.14, (ii) de la remarque précédente, (iv) de la preuve de 1.5.15 et (iii) de [CD12b, 7.2.9], (iv) et 1.5.12. La dernière assertion résulte de 1.5.23, 1.0.12, 1.2.13 et 1.4.6.  $\square$

**Définition 1.6.4.** Soit  $S \in \text{ob}(S)$ .

(i) On appelle **objet de Tate**  $\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)$  la co-suspension  $\text{cofiber}(\mathbf{y}_{\mathcal{T},S}(\sigma_1))[-1]$  de la cofibre du morphisme  $\mathbf{y}_{\mathcal{T},S}(\sigma_1) : \mathbf{1}_{\mathcal{T},S} = \mathbf{y}_{\mathcal{T},S}(S) \rightarrow \mathbf{y}_{\mathcal{T},S}(\mathbf{G}_{m,S})$  dans  $\mathcal{PSh}(\mathcal{P}\downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})$  induit par la section unité  $\sigma_1 : S \rightarrow \mathbf{G}_{m,S}$ . On remarque que  $\mathbf{y}_{\mathcal{T},S}(\sigma_1)$  est un monomorphisme scindé en tant que section de  $\mathbf{y}_{\mathcal{T},S}(p)$ , où  $p : \mathbf{G}_{m,S} \rightarrow S$  désigne la projection canonique. Par conséquent,  $\text{cofiber}(\mathbf{y}_{\mathcal{T},S}(\sigma_1))$  est cofibrant dans chacune des structures de modèles de 1.6.1 en tant que rétracte de l'objet  $\mathbf{y}_{\mathcal{T},S}(\mathbf{G}_{m,S})$ , qui est cofibrant d'après 1.2.13. Comme le foncteur de co-suspension  $(-)[-1]$  préserve les objets cofibrants,  $\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)$  est cofibrant par rapport à ces structures.

(ii) On note  $\mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}(S, \mathcal{T})$  la catégorie  $\mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}(S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T}))$  et on l'appelle **catégorie des spectres de Tate symétriques sur S**. Cette catégorie admet une structure de  $\mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$ -catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles

$$\mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}(S, \mathcal{T})_{\text{st-proj}} = \mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}\left(\mathcal{PSh}(\text{Sm}\downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{A^1\text{-Nis-proj}}\right)_{\text{st-proj}}$$

monoïdale symétrique,  $\mathcal{U}$ -tractable,  $\mathcal{U}$ -cellulaire, stable et propre à gauche dont l'unité est cofibrante et qui vérifie l'axiome du monoïde d'après 1.5.14, 1.5.24 et 1.6.2. On note  $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(S)$  sa catégorie homotopique. On remarque que l'objet  $\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)$  est  $\aleph_0$ -présentable et homotopiquement  $\aleph_0$ -présentable en tant que rétracte d'un objet  $\aleph_0$ -présentable et homotopiquement  $\aleph_0$ -présentable. Par ailleurs,  $V \odot_{\mathcal{PSh}}^{\mathcal{Cplx}(\mathcal{T})} \mathbf{y}_{\mathcal{T},S}(X) \otimes_{\mathcal{PSh}}^L \mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)$  est homotopiquement  $\aleph_0$ -présentable pour tous  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $X \in \text{ob}(\text{Sm}\downarrow S)$ . En particulier,  $\mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}(S, \mathcal{T})_{\text{st-proj}}$  admet une  $\mathcal{U}$ -petite famille homotopiquement génératrice d'objets cofibrants,  $\aleph_0$ -présentables et homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables d'après 1.6.3.

*Notation 1.6.5.* Soit  $S \in \text{ob}(S)$ .

(i) On fera l'abus de supprimer le foncteur  $\Sigma_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\infty}$  de la notation lorsqu'on l'applique aux objets projectivement cofibrants, e.g. si  $F \in \text{ob}\left(\mathcal{PSh}(\text{Sm}\downarrow S, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{proj}}\right)$  est cofibrant, alors on désignera par  $F$  l'objet  $\Sigma_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\infty} F$  lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

(ii) On fera aussi l'abus de noter  $\otimes_{\mathfrak{S}p^{\mathfrak{S}}}$  le produit tensoriel dans  $\mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1),S}^{\mathfrak{S}}(S, \mathcal{T})$ ,  $\underline{\text{hom}}_{\mathfrak{S}p^{\mathfrak{S}}}$  le bifoncteur d'exponentiation  $\underline{\text{hom}}_{\mathfrak{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1),S}^{\mathfrak{S}}(S, \mathcal{T})}$  et  $\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}$  l'objet  $\mathbf{1}_{\mathfrak{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1),S}^{\mathfrak{S}}(S, \mathcal{T})}$ .

(iii) Pour tous  $E \in \text{ob}(\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(S))$  et  $r \in \mathbf{Z}$ , on note  $E(r)$  l'objet  $E \otimes_{\mathfrak{S}p^{\mathfrak{S}}} \mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)^{\otimes r}$ . Rappelons que  $\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)$  est  $\otimes$ -invertible dans  $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(S)$  d'après [Hov01, 9.1]<sup>12</sup> et donc  $E(r)$  est bien défini à équivalence près même pour  $r < 0$ .

**Proposition 1.6.6.** Soit  $(f : T \rightarrow S) \in \text{mor}(S)$ .

(i) La  $\mathcal{Cplx}(\mathcal{T})$ -adjonction

$$f^* = \mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}(f^*) : \mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}(S, \mathcal{T})_{\text{st-proj}} \rightleftarrows \mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}(T, \mathcal{T})_{\text{st-proj}} : \mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}(f_*) = f_*$$

induite par la  $\mathcal{Cplx}(\mathcal{T})$ -adjonction  $f^* \dashv f_*$  de 1.4.5(i) est de Quillen et  $f^* = \mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}(f^*)$  est monoïdale symétrique fort.

(ii) Si  $f \in \text{Sm}$ , alors la  $\mathcal{Cplx}(\mathcal{T})$ -adjonction

$$f_{\sharp} = \mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}(f_{\sharp}) : \mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}(T, \mathcal{T})_{\text{st-proj}} \rightleftarrows \mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}(S, \mathcal{T})_{\text{st-proj}} : \mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\mathfrak{S}}(f^*) = f^*$$

induite par la  $\mathcal{Cplx}(\mathcal{T})$ -adjonction  $f_{\sharp} \dashv f^*$  de 1.4.5(ii) est de Quillen.

12. En effet, [Hov01, 9.1] montre que  $\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1) \otimes_{\mathfrak{S}p^{\mathfrak{S}}}^L (-)$  est une auto-équivalence de  $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(S)$  et il existe donc un objet  $F \in \text{ob}(\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(S))$  tel que  $\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1) \otimes_{\mathfrak{S}p^{\mathfrak{S}}}^L F \cong \mathbf{1}_{\mathcal{T},S}$ .

*Démonstration.*

(i) Cela résulte aussitôt de 1.4.5 et de 1.5.25.

(ii) Une fois que l'on a vérifié que c'est une Set-adjonction de Quillen, on en déduit facilement que c'est une  $\text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$ -adjonction de Quillen. Montrons que l'on a une Set-adjonction de Quillen. Il s'agit d'une application de [Ayo07b, 4.3.34]. En effet, d'après 1.4.5,

$$f_{\sharp} : \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{T}, \text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\mathbb{A}^1\text{-Nis-proj}} \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\mathbb{A}^1\text{-Nis-proj}}$$

est de Quillen à gauche et il faut construire un isomorphisme naturel

$$\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}(1) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} f_{\sharp} F \xrightarrow{\cong} f_{\sharp}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathcal{T}}(1) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} F).$$

Pour cela, on constate que  $f^* \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}(1) \cong \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathcal{T}}(1)$  parce que  $f^*$  préserve les cofibres et les co-suspensions et que  $f^* \mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}(X) \cong \mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathcal{T}}(X \times_{\mathcal{S}} \mathcal{T})$  pour tout  $X \in \text{ob}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S})$ . L'isomorphisme naturel voulu est donc fourni par la formule de projection qui est assurée par le fait que  $\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow(-), \text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\mathbb{A}^1\text{-Nis-proj}}$  est une catégorie  $\text{Sm}$ -prémotivique (1.4.7).  $\square$

**Proposition 1.6.7.** *La donnée  $\text{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathfrak{S}}((-, \mathcal{T})_{\text{st-proj}})$  est une catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles  $\mathfrak{A}$ -tractable,  $\text{Sm}$ -prémotivique sur  $\mathcal{S}$  dont la catégorie homotopique  $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(-)$  est une catégorie motivique au sens de [CD12b, 2.4.45] dont chaque fibre  $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(\mathcal{S})$ ,  $\mathcal{S} \in \text{ob}(\mathcal{S})$  est engendrée en tant que catégorie triangulée par les objets homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentables de la forme  $V \odot_{\text{Sp}^{\mathfrak{S}}} \mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}(X)(-r)$ ,  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $X \in \text{ob}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S})$ ,  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , c'est-à-dire une catégorie motivique engendrée par la famille des twists  $\text{ob}(\mathcal{T}_0) \times \mathbb{Z}_{\leq 0} := \{V \odot_{\text{Sp}^{\mathfrak{S}}} \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(r) \mid V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0), r \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$  ([CD12b, 1.1.41]).*

*Démonstration.* D'après 1.3.18, cette catégorie fibrée est équivalente à celle définie dans [Ayo07b, 4.5.52] avec  $\mathfrak{M} := \text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$ . Les résultats de [Ayo07b, §4.5] montrent qu'il s'agit d'une catégorie motivique. La dernière assertion résulte de 1.5.23.  $\square$

Rappelons que l'on note  $\mathbf{K}$  le corps de caractéristique nulle  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$ .

**Proposition 1.6.8.** *Il existe un morphisme canonique de catégories de  $\mathfrak{A}$ -modèles monoïdales symétriques,  $\mathbf{K}$ -linéaires,  $\text{Sm}$ -fibrées, complètes sur  $\mathcal{S}$  ([CD12b, 1.2.4])*

$$\alpha^* : \text{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathbf{K}}(1)}^{\mathfrak{S}}(\mathcal{S}, \text{Mod}(\mathbf{K}))_{\text{st-proj}} \rightleftarrows \text{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathfrak{S}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})_{\text{st-proj}} : \alpha_*$$

*Démonstration.* D'après 1.0.8, il existe un foncteur de Quillen à gauche  $\mathbf{K}$ -linéaire, exact, monoïdal symétrique fort canonique  $\alpha^* : \text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}))_{\text{inj}} \rightarrow \text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$ . Alors  $\alpha^*$  induit un foncteur canonique, noté abusivement

$$\alpha^* : \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}))) \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \text{Cplx}(\mathcal{T}))$$

défini par  $F \mapsto \alpha^* \circ F$ . Ce foncteur est adjoint à gauche du foncteur  $F \mapsto \alpha_* \circ F$ , noté abusivement  $\alpha_*$ . Cet adjoint à droite  $\alpha_*$  préserve les fibrations et les fibrations triviales objet par objet, de sorte que  $\alpha_*$  est de Quillen à gauche par rapport aux structures projectives globales. D'ailleurs, pour tous  $\mathcal{S} \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ,  $X \in \text{ob}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S})$ , on a  $\alpha^* \mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathcal{S}}(X) \cong \mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}(X)$  parce que  $\alpha^* \mathbf{1}_{\mathbf{K}} \cong \mathbf{1}_{\mathcal{T}}$  et  $\alpha^*$  préserve les  $\mathfrak{A}$ -petites colimites. Comme  $\alpha^*$  préserve les équivalences faibles objet par objet, il se dérive trivialement et en particulier  $\alpha^*$  préserve les colimites homotopiques. Par suite,  $\alpha^*$  préserve les équivalences faibles Nisnevich-locales génératrices (1.3.2) ainsi que les équivalences faibles  $\mathbb{A}^1$ -locales génératrices (1.4.1). D'après 1.3.7,

$$\alpha^* : \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}))_{\text{inj}})_{\mathbb{A}^1\text{-Nis-proj}} \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\mathbb{A}^1\text{-Nis-proj}}$$

est de Quillen à gauche. Grâce à 1.5.25, on en déduit un foncteur de Quillen à gauche monoïdal symétrique fort

$$\alpha^* : \mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathbf{K}(1)}}^{\mathfrak{S}}(\mathcal{S}, \text{Mod}(\mathbf{K}))_{\text{st-proj}} \rightarrow \mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}(1)}}^{\mathfrak{S}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})_{\text{st-proj}}$$

pour tout  $S \in \text{ob}(\mathcal{S})$ .

Le foncteur  $\alpha^*$  commute aux foncteurs d'image inverse  $f^*$  au niveau des catégories de préfaisceaux et donc aussi au niveau des catégories de spectres de Tate symétriques. Par suite, on dispose d'un morphisme cartésien et monoïdal symétrique fort de catégories monoïdales symétriques fibrées  $\mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathbf{K}(1)}}^{\mathfrak{S}}((-), \text{Mod}(\mathbf{K})) \rightarrow \mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}(1)}}^{\mathfrak{S}}((-), \mathcal{T})$ . D'après [CD12b, 1.2.13], pour que  $\alpha^* \dashv \alpha_*$  soit un morphisme de catégories monoïdales symétriques,  $\mathcal{S}m$ -fibrées, complètes, il faut et il suffit que le morphisme canonique  $\alpha^* \Sigma_{\mathbf{1}_{\mathbf{K},S}(1)}^{\infty} \mathbf{y}_{\mathbf{K},S}(X) \rightarrow \Sigma_{\mathbf{1}_{\mathcal{T},S}(1)}^{\infty} \mathbf{y}_{\mathcal{T},S}(X)$  soit inversible pour tous  $S \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ,  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}m \downarrow S)$ , ce qui est vrai pour les raisons déjà évoquées.  $\square$

**Corollaire 1.6.9.** *On suppose que  $\mathbf{B} = \text{Spec}(\kappa)$  est le spectre d'un corps parfait. Alors la  $\mathfrak{A}$ -petite famille d'objets homotopiquement fortement dualisables*

$$\mathcal{G} := \{V \odot_{\mathcal{S}p^{\mathfrak{S}}}^{\mathcal{T}} \mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(X)(-r) \mid V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0), X \in \text{ob}(\mathcal{S}m \downarrow \mathbf{B}) \text{ projectif}, r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$$

est homotopiquement génératrice dans  $\mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}(1)}}^{\mathfrak{S}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})_{\text{st-proj}}$ . Par conséquent, tout objet homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentable de  $\mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}(1)}}^{\mathfrak{S}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})_{\text{st-proj}}$  est homotopiquement fortement dualisable.

*Démonstration.* D'après [Rio05, 1.4], la famille

$$\{\mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(X)(-r) \mid X \in \text{ob}(\mathcal{S}m \downarrow \mathbf{B}) \text{ projectif}, r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$$

est homotopiquement génératrice et formée d'objets homotopiquement fortement dualisables dans  $\mathcal{S}p_{\mathbf{1}_{\mathbf{K}(1)}}^{\mathfrak{S}}(\mathbf{B}, \text{Mod}(\mathbf{K}))_{\text{st-proj}}$ . Le foncteur  $\alpha^*$  de 1.6.8 étant monoïdal symétrique fort,  $\mathbf{L}\alpha^*$  préserve les objets homotopiquement fortement dualisables. Il en est de même du foncteur  $V \odot_{\mathcal{S}p^{\mathfrak{S}}}^{\mathbf{L},\mathcal{T}}(-)$  pour tout  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ .

D'après 1.6.3, les objets  $V \odot_{\mathcal{S}p^{\mathfrak{S}}}^{\mathcal{T}} \mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(X)(-r)$ ,  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}m \downarrow \mathbf{B})$ ,  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  engendrent  $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathcal{T}}(\mathbf{B})$ . D'après le théorème de Thomason [Nee01, 4.4.9], il suffit de montrer que pour tous  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}m \downarrow \mathbf{B})$  et  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , l'objet  $V \odot_{\mathcal{S}p^{\mathfrak{S}}}^{\mathcal{T}} \mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(X)(-r)$  appartient à la sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathcal{T}}(\mathbf{B})$  engendrée par  $\mathcal{G}$ . L'objet  $\mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(X)$  étant cofibrant pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}m \downarrow \mathbf{B})$ , on a  $\mathbf{L}\alpha^* \mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(X) = \alpha^* \mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(X) \cong \mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(X)$ . D'après [Rio05, 1.4], pour tous  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}m \downarrow \mathbf{B})$ ,  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , l'objet  $\mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(X)(-r)$  est un rétracte de la colimite homotopique d'un diagramme fini de suspensions et de co-suspensions d'objets de la forme  $\mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(\bar{X})(-s)$ , où  $\bar{X} \in \text{ob}(\mathcal{S}m \downarrow \mathbf{B})$  est projectif et  $s \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ . Comme  $\mathbf{L}\alpha^*$  préserve les rétractes et les colimites homotopiques, on en déduit que  $\mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(X) = \mathbf{L}\alpha^* \mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(X)$  est un rétracte de la colimite homotopique d'un diagramme fini de suspensions et de co-suspensions d'éléments de  $\mathcal{G}$ . Cela achève la démonstration, parce que la sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathcal{T}}(\mathbf{B})$  engendrée par  $\mathcal{G}$  est stable par l'endofoncteur  $V \odot_{\mathcal{S}p^{\mathfrak{S}}}^{\mathbf{L},\mathcal{T}}(-)$  et l'on vient de montrer que tout objet de cette sous-catégorie est homotopiquement fortement dualisable.  $\square$

**Lemme 1.6.10.** *Soient  $\mathcal{C}$  un  $\mathfrak{A}$ -petite catégorie dans laquelle les produits finis sont représentables et  $\omega : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  un foncteur monoïdal symétrique fort entre catégories monoïdales symétriques fermées  $\mathfrak{A}$ -cocomplètes. On suppose que  $\omega$  préserve les  $\mathfrak{A}$ -petites colimites. Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$\omega \left( \underline{\text{mor}}_{\mathcal{P}\text{Sh}}(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X), F) \right) \cong \underline{\text{mor}}_{\mathcal{P}\text{Sh}}(\omega(\mathbf{y}_{\mathcal{V}}(X)), \omega(F))$$

dans  $\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V}')$  qui dépend fonctoriellement de  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et de  $F \in \text{ob}(\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{V}'))$ .

*Démonstration.* Par adjonction, se donner un tel morphisme revient à se donner un morphisme

$$\omega \left( \underline{\text{mor}}_{\mathcal{P}\text{Sh}}(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(X), F) \right) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} \omega(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(X)) \cong \omega \left( \underline{\text{mor}}_{\mathcal{P}\text{Sh}}(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(X), F) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} \mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(X) \right) \rightarrow \omega(F)$$

et le candidat évident pour un morphisme de cette forme est l'image du morphisme d'évaluation par  $\omega$ . Rappelons que  $\omega \mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(Y) = \mathbf{y}_{\mathcal{Y}'}(Y)$  pour tout  $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , puisque  $\omega$  préserve l'unité et les  $\mathcal{A}$ -petites colimites. Afin de montrer que l'on obtient un isomorphisme, il suffit de remarquer que la famille

$$\left\{ \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{Y}')}^{\mathcal{Y}'}(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}'}(Y), -) \mid Y \in \text{ob}(\mathcal{C}) \right\}$$

est conservative et que

$$\begin{aligned} & \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{Y}')}^{\mathcal{Y}'}(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}'}(Y), \omega \left( \underline{\text{mor}}_{\mathcal{P}\text{Sh}}(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(X), F) \right)) \\ &= \omega \left( \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{Y})}^{\mathcal{Y}}(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(Y), \underline{\text{mor}}_{\mathcal{P}\text{Sh}}(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(X), F)) \right) \\ &= \omega \left( \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{Y})}^{\mathcal{Y}}(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(Y) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} \mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(X), F) \right) \\ &= \omega \left( \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{Y})}^{\mathcal{Y}}(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(Y \times X), F) \right) \\ &= \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{Y}')}^{\mathcal{Y}'}(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}'}(Y \times X), \omega(F)) \\ &= \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{Y}')}^{\mathcal{Y}'}(\omega(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(Y) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} \mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(X)), \omega(F)) \\ &= \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{Y}')}^{\mathcal{Y}'}(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}'}(Y) \otimes_{\mathcal{P}\text{Sh}} \omega(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(X)), \omega(F)) \\ &= \text{mor}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{Y}')}^{\mathcal{Y}'}(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}'}(Y), \underline{\text{mor}}_{\mathcal{P}\text{Sh}}(\omega(\mathbf{y}_{\mathcal{Y}}(X)), \omega(F))) \end{aligned}$$

pour tout  $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ . □

**Proposition 1.6.11.** Soient  $\mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{K}'$  une extension de corps et  $\omega : \mathcal{T}_0 \rightarrow \text{Mod}(\mathbf{K}')$  un foncteur fibre. Alors  $\omega$  induit un foncteur de Quillen à gauche, monoïdal symétrique fort

$$\omega^* : \mathcal{S}\mathcal{P}_{1_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathcal{S}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})_{\text{st-proj}} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{P}_{1_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathcal{S}}(\mathcal{S}, \text{Mod}(\mathbf{K}'))_{\text{st-proj}}$$

qui préserve et détecte les équivalences faibles. En particulier, son dérivé  $\omega^* = \mathbf{L}\omega^*$  est conservatif.

*Démonstration.* D'après 1.0.6,  $\omega$  induit un foncteur de Quillen à gauche, monoïdal symétrique fort, conservatif et homotopiquement conservatif  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}} \rightarrow \mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))_{\text{inj}}$ . Le foncteur induit

$$\omega^* : \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm} \downarrow \mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{proj}} \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm} \downarrow \mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))_{\text{inj}})_{\text{proj}}$$

est aussi de Quillen à gauche, monoïdal symétrique fort, conservatif et homotopiquement conservatif. En effet, l'adjoint à droite  $\omega_*$  du foncteur  $\omega^* : \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))$  induit un adjoint à droite

$$\omega_* : \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm} \downarrow \mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))_{\text{inj}})_{\text{proj}} \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm} \downarrow \mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\text{proj}}$$

qui préserve les fibrations et les fibrations triviales objet par objet.

Il est clair que  $\omega^*$  préserve les équivalences faibles Nisnevich-locales génératrices (1.3.2) ainsi que les équivalences faibles  $\mathbf{A}^1$ -locales génératrices (1.4.1), de sorte qu'il est de Quillen à gauche entre les localisations de Bousfield à gauche

$$\omega^* : \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm} \downarrow \mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-inj}} \rightarrow \mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm} \downarrow \mathcal{S}, \mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))_{\text{inj}})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-inj}}$$

d'après 1.3.7. Cela montre de plus que  $\omega^*$  préserve les équivalences faibles. D'après 1.5.25, ce foncteur induit un foncteur de Quillen à gauche, monoïdal symétrique fort

$$\omega^* : \mathcal{PSh}(\mathcal{S}m\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{T})_{inj})_{proj} \rightarrow \mathcal{PSh}(\mathcal{S}m\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{Mod}(\mathbf{K}'))_{inj})_{proj}.$$

À l'aide de 1.4.7 et 1.6.10, on vérifie aisément que ce foncteur préserve les objets Nisnevich-locaux et  $\mathbf{A}^1$ -locaux.

Montrons que  $\omega^*$  est homotopiquement conservatif. Les deux catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles étant stables, il suffit que le foncteur dérivé  $\omega^* = \mathbf{L}\omega^*$  détecte les objets nuls. Soit  $E = (E_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \in \text{ob}(\mathcal{S}p_{1_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})_{st-proj})$ . On peut supposer que  $E$  est cofibrant et fibrant. En particulier,  $E$  est un  $\Omega^\infty$ -spectre faible qui est Nisnevich-local et  $\mathbf{A}^1$ -local niveau par niveau. En utilisant 1.6.10, on peut montrer que  $\omega^*E = \mathbf{L}\omega^*E$  est un  $\Omega^\infty$ -spectre faible qui est Nisnevich-local et  $\mathbf{A}^1$ -local niveau par niveau d'après les remarques précédentes. Par suite, si  $\mathbf{L}\omega^*E$  est faiblement équivalent à l'objet nul  $0$ , alors il est faiblement équivalent à  $0$  dans  $\mathcal{PSh}(\mathcal{S}m\downarrow\mathcal{S}, \mathcal{Cplx}(\mathcal{Mod}(\mathbf{K}'))_{inj})_{proj}$  niveau par niveau. Comme  $\omega^*$  détecte les quasi-isomorphismes, cela entraîne que  $E$  est quasi-isomorphe à  $0$  niveau par niveau.  $\square$

## 2 THÉORIES DE WEIL MIXTES ENRICHIES

*Notation 2.0.0.* Dans ce chapitre, on fixe les données suivantes :

- (i) un  $\mathcal{U}$ -schéma  $\mathbf{B}$  noethérien de dimension de Krull finie ;
- (ii) une sous-catégorie pleine  $\mathcal{S} \subseteq \text{Sch}^{\text{ft}} \downarrow \mathbf{B}$  stable par produits finis et par tirés-en-arrière le long des morphismes de  $\text{Sch}^{\text{ft}} \downarrow \mathbf{B}$  et contenant les  $\mathbf{B}$ -schémas quasi-projectifs ;
- (iii) la classe admissible  $\mathcal{S}m \subseteq \text{mor}(\mathcal{S})$  des morphismes lisses ;
- (iv) une  $\mathcal{U}$ -petite catégorie tannakienne  $(\mathcal{T}_0, \otimes_{\mathcal{T}}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  de Ext-dimension  $\leq d_{\mathcal{T}} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  et  $\mathbf{K} := \text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  ;
- (v) la catégorie  $\mathcal{T} := \text{Ind}(\mathcal{T}_0)$  des ind-objets de  $\mathcal{T}$  ;
- (vi) la catégorie  $\text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$  des complexes dans  $\mathcal{T}$  munie de la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles injective ; et
- (vii) pour tout  $S \in \text{ob}(\mathcal{S})$ , une sous-catégorie pleine  $(\mathcal{S}m^{\circ} \downarrow S) \subseteq (\mathcal{S}m \downarrow S)$  Nisnevich-cofinale (1.3.19).

Sauf mention expresse du contraire, pour tout  $S \in \text{ob}(\mathcal{S})$ , la catégorie  $\text{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathcal{S}}(S, \mathcal{T})$  est supposée munie de la structure de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\text{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathcal{S}}(S, \mathcal{T})_{\text{st-proj}}$  de 1.6.4. Par exemple, le bifoncteur  $\text{Rhom}_{\text{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathcal{S}}(S, \mathcal{T})}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}$  désigne le foncteur dérivé du bifoncteur de Quillen  $\text{hom}_{\text{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathcal{S}}(S, \mathcal{T})}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}$  dans cette structure de  $\mathcal{U}$ -modèles.

*Résumé.* Dans [CD12a, 2.1.4], D.-C. Cisinski et F. Déglise introduisent la notion d'une théorie de Weil mixte. Il s'agit d'une axiomatisation des propriétés des cohomologies de Weil analogue à l'axiomatisation d'Eilenberg-Steenrod en topologie algébrique. Une théorie de Weil mixte est donc un préfaisceau de dg- $\mathbf{K}$ -algèbres commutatives avec  $\mathbf{K}$  un corps de caractéristique nulle. Cette formulation ne permet pas de retenir certaines structures supplémentaires sur les cohomologies de Weil classiques, e.g. l'action du groupe de Galois absolu sur la cohomologie  $\ell$ -adique, la structure de Hodge mixte sur la cohomologie de Betti sur un  $\mathbf{C}$ -schéma de type fini ou la structure de F-isocristal sur la cohomologie rigide d'un  $\mathbf{F}_q$ -schéma avec  $q = p^r$ ,  $p, r \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ ,  $p$  premier.

Dans ce chapitre, on propose une généralisation de la définition de [CD12a] qui consiste à remplacer la catégorie  $\text{Mod}(\mathbf{K})$  des espaces vectoriels sur le corps de caractéristique nulle  $\mathbf{K}$  par la catégorie ind-tannakienne  $\mathcal{T}$ . Dans un premier temps, on s'intéresse à la représentabilité dans  $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(\mathbf{B})$  des théories de Weil mixtes à coefficients dans  $\mathcal{T}$  (2.1.4). Le premier, et seul à l'heure actuelle, exemple d'une théorie de Weil mixte qui sort du cadre de [CD12a] est celui associé à la théorie de Hodge mixte. On construit dans 2.1.8 un préfaisceau de dg-algèbres dans la catégorie des complexes de ind- $\mathbf{Q}$ -structures de Hodge mixtes polarisables en passant par les complexes de Hodge mixtes polarisables de [Beĭ86, 3.9] et l'on vérifie qu'il s'agit d'une théorie de Weil mixte.

On étudie ensuite la théorie des coefficients constructibles canoniquement associée à une telle  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte. En particulier, on examinera le formalisme des six opérations de Grothendieck dans ce contexte-là, ainsi que la construction de structures de poids au sens de [Bon10, 1.1.1] sur la catégorie des coefficients constructibles associée à une  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte.

## 2.1 AXIOMES ET REPRÉSENTABILITÉ

*Résumé.* Dans ce numéro, on définit la notion d'une  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte (2.1.1) et l'on vérifie que toute  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte sur  $\mathbf{B}$  est représentée par un monoïde commutatif de  $\mathcal{S}p_{1_{\mathcal{T}}^{\mathcal{S}}}^{\mathcal{S}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})$  (2.1.4). On construit une théorie de Weil mixte du type « de Hodge mixte » dans 2.1.8.

**Définition 2.1.1** ([CD12a, 2.1.4]). On appelle  $\mathcal{T}_0$ -*théorie* ou  $\mathcal{T}$ -*théorie de Weil mixte* sur  $\mathbf{B}$  un monoïde commutatif  $E_{\mathbf{B}}$  de  $\mathcal{P}Sh(\mathcal{S}m^{\circ} \downarrow \mathbf{B}, \mathcal{C}plx(\mathcal{T}))$  vérifiant les axiomes suivants.

- (W1) Le préfaisceau  $E_{\mathbf{B}}$  vérifie la propriété de descente par rapport aux hyper-recouvrements Nisnevich.
- (W2) Pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}m^{\circ} \downarrow \mathbf{B})$ , la projection canonique  $p : \mathbf{A}_X^1 \rightarrow X$  induit une équivalence faible  $E_{\mathbf{B}}(X) \rightarrow E_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}_X^1)$  dans  $\mathcal{C}plx(\mathcal{T})_{\text{inj}}$ .
- (W3) L'unité  $\eta_{E_{\mathbf{B}}} : \mathbf{1}_{\mathcal{T}, \mathbf{B}} \rightarrow E_{\mathbf{B}}$  induit une équivalence faible  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}} \rightarrow E_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})$  dans  $\mathcal{C}plx(\mathcal{T})_{\text{inj}}$ .
- (W4) Si  $\sigma_1 : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{G}_{m, \mathbf{B}}$  désigne la section unité et que  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E := \ker(E_{\mathbf{B}}(\sigma_1))[1]$ , alors  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E$  appartient au cœur de la  $\mathfrak{t}$ -structure naturelle sur  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$  et  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E \otimes_{\mathcal{T}}^L (-)$  est une auto-équivalence de  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ .
- (W5) Pour tous  $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{S}m^{\circ} \downarrow \mathbf{B})$ , le morphisme canonique  $E_{\mathbf{B}}(X) \otimes_{\mathcal{T}}^L E_{\mathbf{B}}(Y) \rightarrow E_{\mathbf{B}}(X \times_{\mathbf{B}} Y)$  est une équivalence faible dans  $\mathcal{C}plx(\mathcal{T})_{\text{inj}}$ .

*Remarque 2.1.2.*

(i) Plus généralement, on peut définir de la même manière une  $\mathcal{V}$ -théorie de Weil mixte en remplaçant  $\mathcal{C}plx(\mathcal{T})_{\text{inj}}$  par une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique plus générale, éventuellement munie d'une  $\mathfrak{t}$ -structure sur sa catégorie homotopique.

(ii) Les conditions (W1) et (W2) entraînent que  $E_{\mathbf{B}}$  est faiblement équivalent objet par objet à une résolution fibrante dans  $\mathcal{P}Sh(\mathcal{S}m^{\circ} \downarrow \mathbf{S}, \mathcal{C}plx(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}}$ .

(iii) Dans (W4), l'objet  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E$  est bien défini parce que le morphisme  $E_{\mathbf{B}}(\sigma_1)$  est un épimorphisme scindé. La surjectivité essentielle de  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E \otimes_{\mathcal{T}}^L (-)$  implique qu'il existe un objet  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)_E$  de  $\mathcal{C}plx(\mathcal{T})$  tel que  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E \otimes_{\mathcal{T}}^L \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)_E \simeq \mathbf{1}_{\mathcal{T}}$  dans  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ . Par suite, le foncteur  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)_E \otimes_{\mathcal{T}}^L (-)$  est quasi-inverse de  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E \otimes_{\mathcal{T}}^L (-)$  et donc  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)_E \cong \mathbf{R}\underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1), \mathbf{1}_{\mathcal{T}})$  dans  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ . L'objet  $\otimes_{\mathcal{T}}^L$ -inversible  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E$  est *a fortiori* homotopiquement fortement dualisable. D'après 1.0.12,  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E$  est homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentable. Comme  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E$  appartient au cœur  $\mathcal{D}(\mathcal{T})^{\heartsuit}$  de la  $\mathfrak{t}$ -structure naturelle, on peut l'identifier à un objet de  $\mathcal{T}_0$  et par suite on peut identifier  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)_E$  au dual de  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E$  dans  $\mathcal{T}_0$ . Pour tout  $r \in \mathbf{Z}$ , on appelle *r-ième twist de Tate (relatif à  $E_{\mathbf{B}}$ )* l'objet

$$\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(r)_E := \begin{cases} \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E^{\otimes(-r)} & \text{si } r \leq 0 \\ \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-r)_E, \mathbf{1}_{\mathcal{T}}) & \text{si } r > 0 \end{cases}$$

de  $\mathcal{T}_0$ . Pour tous  $K \in \text{ob}(\mathcal{C}plx(\mathcal{T}))$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ , on introduit la notation  $K(r)_E := K \otimes_{\mathcal{T}}^L \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(r)_E$ .

(iv) Le morphisme de (W5) est le **morphisme de Künneth**. C'est le morphisme canonique induit par la propriété universelle du coproduit  $E_{\mathbf{B}}(X) \otimes_{\mathcal{T}} E_{\mathbf{B}}(Y) = E_{\mathbf{B}}(X) \otimes_{\mathcal{T}}^L E_{\mathbf{B}}(Y)$  de  $E_{\mathbf{B}}(X)$  et  $E_{\mathbf{B}}(Y)$  dans la catégorie des monoïdes commutatifs de  $\mathcal{C}plx(\mathcal{T})$ .

(v) Au vu de (ii) ci-dessus et de ce que, pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{S}m^{\circ} \downarrow \mathbf{B})$ , le préfaisceau représentable  $\mathbf{y}_{\mathcal{T}}(X)$  est cofibrant dans  $\mathcal{P}Sh(\mathcal{S}m^{\circ} \downarrow \mathbf{B}, \mathcal{C}plx(\mathcal{T})_{\text{inj}})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}}$ , on déduit de (W5) la variante suivante de la formule de Künneth :

(W5\*) Pour tous  $X, Y \in \text{ob}(\text{Sm}^\circ \downarrow \mathbf{B})$ , le morphisme canonique

$$\text{Rhom}_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T}}(X), E_{\mathbf{B}}) \otimes_{\mathcal{T}}^{\text{L}} \text{Rhom}_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T}}(Y), E_{\mathbf{B}}) \rightarrow \text{Rhom}_{\mathcal{P}\text{Sh}}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T}}(X \times_{\mathbf{B}} Y), E_{\mathbf{B}})$$

est un isomorphisme dans  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ .

**Lemme 2.1.3.** Soient  $E_{\mathbf{B}}$  un objet de  $\mathcal{C}\text{Alg}(\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \text{Cplx}(\mathcal{T})))$ ,  $(\mathcal{T}'_0, \otimes_{\mathcal{T}'_0}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{T}'_0}, \mathbf{1}_{\mathcal{T}'_0})$  une  $\mathfrak{A}$ -petite catégorie tannakienne,  $\mathcal{T}' := \text{Ind}(\mathcal{T}'_0)$ ,  $\omega : \mathcal{T}_0 \rightarrow \mathcal{T}'_0$  un foncteur monoïdal symétrique fort, exact.

- (i) Si  $E_{\mathbf{B}}$  est une  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte, alors  $\omega \circ E_{\mathbf{B}}$  est une  $\mathcal{T}'$ -théorie de Weil mixte.
- (ii) Inversement, si  $\omega \circ E_{\mathbf{B}}$  est une  $\mathcal{T}'$ -théorie de Weil mixte et que  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E$  est homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentable, alors  $E_{\mathbf{B}}$  est une  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte.

*Démonstration.*

(i) Le foncteur  $\omega$  induit un foncteur monoïdal symétrique fort  $\omega : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  qui préserve donc les monoïdes commutatifs. Comme  $\omega$  est exact (1.0.6), le morphisme induit  $\text{Cplx}(\mathcal{T}) \rightarrow \text{Cplx}(\mathcal{T}')$  préserve les fibres et les cofibres homotopiques. D'après [CD12b, 3.3.2],  $\omega \circ E_{\mathbf{B}}$  vérifie la propriété de descente par rapport aux hyper-recouvrements Nisnevich, c'est-à-dire  $\omega \circ E_{\mathbf{B}}$  vérifie la condition (W1). Les conditions (W2), (W3), (W4) et (W5) résultent de l'observation que  $\omega : \text{Cplx}(\mathcal{T}) \rightarrow \text{Cplx}(\mathcal{T}')$  est monoïdal symétrique fort et préserve les quasi-isomorphismes et son foncteur dérivé est  $\mathfrak{t}$ -exact par rapport aux  $\mathfrak{t}$ -structures naturelles.

(ii) Le foncteur  $\omega : \text{Cplx}(\mathcal{T}) \rightarrow \text{Cplx}(\mathcal{T}')$  préserve et détecte les quasi-isomorphismes (1.0.6). En particulier, il détecte les limites homotopiques et les colimites homotopiques qu'il préserve. On en déduit tous les axiomes de 2.1.1 sauf (W4). L'objet  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$  appartient au cœur de la  $\mathfrak{t}$ -structure naturelle, car  $\omega$  est  $\mathfrak{t}$ -exact est conservatif. Par hypothèse,  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E$  est homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentable et, de manière équivalente, homotopiquement fortement dualisable (1.0.12(ii)). Notons  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)_E^{\vee}$  son dual fort homotopique et

$$\mathbf{1}_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\eta} \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E \otimes_{\mathcal{T}}^{\text{L}} \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)_E^{\vee} \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E \otimes_{\mathcal{T}}^{\text{L}} \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)_E^{\vee} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{1}_{\mathcal{T}}$$

les morphismes canoniques. Alors  $\omega(\eta)$  et  $\omega(\varepsilon)$  sont des isomorphismes de  $\mathcal{D}(\mathcal{T}')$ , puisque  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E$  est  $\otimes_{\mathcal{T}}^{\text{L}}$ -inversible, de sorte que  $\eta$  et  $\varepsilon$  sont des isomorphismes de  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ . Il s'ensuit que  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_E$  est  $\otimes_{\mathcal{T}}^{\text{L}}$ -inversible et  $E_{\mathbf{B}}$  vérifie (W4).  $\square$

**Théorème 2.1.4.** Soit  $E_{\mathbf{B}} \in \text{ob}(\mathcal{C}\text{Alg}(\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \text{Cplx}(\mathcal{T}))))$  une  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte. Alors il existe un monoïde commutatif  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  de  $\text{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathfrak{S}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})$  et un isomorphisme canonique

$$\text{Rhom}_{\text{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathfrak{S}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T}}(X), \mathcal{E}_{\mathbf{B}}(r)) \simeq E_{\mathbf{B}}(X)(r)_E$$

dans  $\mathcal{D}(\text{Ind}(\mathcal{T}))$  pour tous  $X \in \text{ob}(\text{Sm}^\circ \downarrow \mathbf{B})$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ . De plus,  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  est un  $\Omega^\infty$ -spectre faible.

*Démonstration.* On peut supposer que  $E_{\mathbf{B}}$  est fibrant dans  $\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \text{Cplx}(\mathcal{T}))_{\text{inj}}_{\text{proj}}$ . Effectivement, d'après [CD12b, 7.1.8], la catégorie  $\mathcal{C}\text{Alg}(\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \text{Cplx}(\mathcal{T})))$  admet une structure de  $\mathfrak{A}$ -modèles dont les équivalences faibles (resp. fibrations) sont les morphismes de monoïdes qui sont des équivalences faibles (resp. fibrations) dans la catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles  $\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \text{Cplx}(\mathcal{T}))_{\text{inj}}_{\text{A}^1\text{-Nis-proj}}$  et les axiomes de 2.1.1 sont respectés par cette classe d'équivalences faibles.

On note  $L_{\mathbf{B}}$  le préfaisceau constant sur  $\mathrm{Sm}^\circ \downarrow \mathbf{B}$  de valeur  $\mathrm{hom}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}^{\mathrm{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1), E_{\mathbf{B}})$ . Pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , on pose  $\mathcal{E}_{\mathbf{B},n} := \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(L_{\mathbf{B}}^{\otimes n}, E_{\mathbf{B}})$ . La  $\mathrm{Cplx}(\mathcal{T})$ -adjonction  $\mathrm{cst}_{\mathbf{B}} \dashv \Gamma(\mathbf{B}, -)$  et l'identification

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathrm{Sm}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \mathrm{Cplx}(\mathcal{T}))}^{\mathrm{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1), E_{\mathbf{B}}) \simeq \Gamma(\mathbf{B}, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1), E_{\mathbf{B}}))$$

induisent un morphisme canonique  $L_{\mathbf{B}} \rightarrow \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1), E_{\mathbf{B}})$ , d'où des morphismes canoniques  $L_{\mathbf{B}} \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}} \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1) \rightarrow E_{\mathbf{B}}$  et

$$L_{\mathbf{B}} \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}} \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1) \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(L_{\mathbf{B}}^{\otimes n}, E_{\mathbf{B}}) \rightarrow E_{\mathbf{B}} \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(L_{\mathbf{B}}^{\otimes n}, E_{\mathbf{B}}) \rightarrow \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(L_{\mathbf{B}}^{\otimes n}, E_{\mathbf{B}})$$

pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ . La seconde flèche est l'adjoint du composé

$$E_{\mathbf{B}} \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(L_{\mathbf{B}}^{\otimes n}, E_{\mathbf{B}}) \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}} L_{\mathbf{B}}^{\otimes n} \rightarrow E_{\mathbf{B}} \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}} E_{\mathbf{B}} \rightarrow E_{\mathbf{B}}$$

du morphisme d'évaluation avec la multiplication sur  $E_{\mathbf{B}}$ . Par adjonction, on obtient un morphisme canonique  $\sigma_n : \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1) \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}} \mathcal{E}_{\mathbf{B},n} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{B},n+1}$ . On vérifie aisément que  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}} := (\mathcal{E}_{\mathbf{B},n}, \sigma_n)_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$  est un  $\mathrm{Sym}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1))$ -module, c'est-à-dire un spectre de Tate symétrique. De plus, les morphismes d'assemblage  $\sigma_n$  et le morphisme unité  $\eta_0 : \mathrm{Sym}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1))_0 = \mathrm{cst}_{\mathbf{B}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}) \rightarrow E_{\mathbf{B}} = \mathcal{E}_{\mathbf{B},0}$  induisent un morphisme unité  $\eta : \mathrm{Sym}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1)) \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  par récurrence. Pour construire un morphisme de multiplication sur  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ , il suffit de construire une famille compatible de morphismes  $\mu_{n,n'} : \mathcal{E}_{\mathbf{B},n} \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}} \mathcal{E}_{\mathbf{B},n'} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{B},n+n'}$  pour tous  $n, n' \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ . Pour cela, on considère les flèches diagonales des diagrammes commutatifs de la forme

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(L_{\mathbf{B}}^{\otimes n}, E_{\mathbf{B}}) \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(L_{\mathbf{B}}^{\otimes n'}, E_{\mathbf{B}}) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(L_{\mathbf{B}}^{\otimes(n+n')}, E_{\mathbf{B}} \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}} E_{\mathbf{B}}) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(L_{\mathbf{B}}^{\otimes(n+n')}, E_{\mathbf{B}}), \end{array}$$

où la flèche horizontale est l'adjoint du morphisme d'évaluation et la flèche verticale est celle induite par la structure de monoïde commutatif sur  $E_{\mathbf{B}}$ . On vérifie que le spectre  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  est une  $\mathrm{Sym}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1))$ -algèbre lorsqu'on le munit de ces morphismes d'unité et de multiplication.

Montrons que  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  est un  $\Omega^\infty$ -spectre faible. On fixe  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  et l'on note  $\check{\sigma}_n : \mathcal{E}_{\mathbf{B},n} \rightarrow \underline{\mathrm{Rhom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1), \mathcal{E}_{\mathbf{B},n+1})$  l'adjoint du morphisme d'assemblage  $\sigma_n$ . Il faut montrer que  $\check{\sigma}_n$  est un isomorphisme dans  $\mathrm{ho}(\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathrm{Sm}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \mathrm{Cplx}(\mathcal{T}))_{\mathrm{inj}})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}}$ . On remarque que, si  $\mathcal{T} = \mathrm{Mod}(\mathbf{K})$ , alors l'assertion n'est autre que celle de [CD12a, 2.1.6]. On peut toujours se ramener à cette situation de la manière suivante.

D'après [Del90, 7.1], il existe une extension de corps  $\mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{K}'$  et un foncteur fibre  $\omega : \mathcal{T} \rightarrow \mathrm{Mod}(\mathbf{K}')$ . D'après 2.1.3,  $F_{\mathbf{B}} := \omega E_{\mathbf{B}}$  est une  $\mathrm{Mod}(\mathbf{K}')$ -théorie de Weil mixte. On note  $\mathcal{F}_{\mathbf{B}} := (\mathcal{F}_{\mathbf{B},n}, \tau_n)_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$  le monoïde commutatif de  $\mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathbf{K}'}(1)}^{\mathcal{S}}(\mathbf{B}, \mathrm{Mod}(\mathbf{K}'))$  associée à  $F_{\mathbf{B}}$ . Comme on vient de le rappeler,  $\check{\tau}_n : \mathcal{F}_{\mathbf{B},n} \rightarrow \underline{\mathrm{Rhom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(\mathbf{1}_{\mathbf{K}',\mathbf{B}}(1), \mathcal{F}_{\mathbf{B},n+1})$  est un isomorphisme de  $\mathrm{ho}(\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathrm{Sm}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \mathrm{Cplx}(\mathrm{Mod}(\mathbf{K}'))_{\mathrm{inj}})_{\mathbf{A}^1\text{-Nis-proj}})$  d'après [CD12a, 2.1.6]. On utilisera cet isomorphisme et la conservativité de  $\omega$  afin de montrer que  $\check{\sigma}_n$  est aussi un isomorphisme.

Comme  $E_{\mathbf{B}}$  est projectivement  $\mathbf{A}^1$ -Nisnevich-localement fibrant, on a

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1), \mathcal{E}_{\mathbf{B},n+1}) \simeq \underline{\mathrm{Rhom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1), \mathcal{E}_{\mathbf{B},n+1}),$$

Il faut et il suffit que  $\check{\sigma}_n : \mathcal{E}_{\mathbf{B},n} \rightarrow \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1), \mathcal{E}_{\mathbf{B},n+1})$  soit un quasi-isomorphisme, car la source et le but sont  $\mathbf{A}^1$ -Nisnevich-locaux. Cela revient à montrer que

$$\begin{array}{c} \mathrm{hom}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{S}\mathrm{m}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T}))}^{\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(X), \mathcal{E}_{\mathbf{B},n}) \\ \downarrow \Gamma(X, \check{\sigma}_n) \\ \mathrm{hom}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{S}\mathrm{m}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T}))}^{\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(X) \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}} \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1), \mathcal{E}_{\mathbf{B},n+1}) \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme pour tout  $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{S}\mathrm{m}^\circ \downarrow \mathbf{B})$ . D'après 1.0.6, il suffit de montrer que  $\omega\Gamma(X, \check{\sigma}_n)$  est un quasi-isomorphisme pour tout  $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{S}\mathrm{m}^\circ \downarrow \mathbf{B})$ . D'après 1.6.10, il revient au même de montrer que  $\Gamma(X, \check{\tau}_n)$  est un quasi-isomorphisme pour tout  $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{S}\mathrm{m}^\circ \downarrow \mathbf{B})$ , ce qui résulte de [CD12b, 2.1.6].

Il reste à vérifier que  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  représente la  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte  $E_{\mathbf{B}}$ . On a

$$\begin{aligned} & \mathrm{Rhom}_{\mathrm{Sp}_{1_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathcal{E}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})}^{\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(X), \mathcal{E}_{\mathbf{B}}(r)) \\ &= \mathrm{Rhom}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{S}\mathrm{m}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T}))}^{\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(X), \mathbf{R}\Omega_{1_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1)}^\infty(\mathcal{E}_{\mathbf{B}}(r))) \\ &= \mathrm{Rhom}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{S}\mathrm{m}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T}))}^{\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(X), \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(\mathbf{L}_{\mathbf{B}}^{\otimes r}, E_{\mathbf{B}})) \\ &\cong \mathrm{Rhom}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{S}\mathrm{m}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T}))}^{\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(X), \underline{\mathrm{Rhom}}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}(\mathbf{L}_{\mathbf{B}}^{\otimes r}, E_{\mathbf{B}})) \\ &= \mathrm{Rhom}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{S}\mathrm{m}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T}))}^{\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(X) \otimes_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}}^{\mathbf{L}} \mathbf{L}_{\mathbf{B}}^{\otimes r}, E_{\mathbf{B}}) \\ &\cong \mathrm{Rhom}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{S}\mathrm{m}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T}))}^{\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(X), E_{\mathbf{B}}) \otimes_{\mathcal{T}}^{\mathbf{L}} \mathrm{Rhom}_{\mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{S}\mathrm{m}^\circ \downarrow \mathbf{B}, \mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T}))}^{\mathcal{C}\mathrm{plx}(\mathcal{T})}(\mathbf{L}_{\mathbf{B}}^{\otimes r}, E_{\mathbf{B}}) \\ &\cong E_{\mathbf{B}}(X) \otimes_{\mathcal{T}}^{\mathbf{L}} \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(r)_E = E_{\mathbf{B}}(X)(r)_E, \end{aligned}$$

où la deuxième ligne résulte de ce que  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  est un  $\Omega^\infty$ -spectre faible, la troisième de ce que  $\mathbf{L}_{\mathbf{B}}$  est cofibrant et  $E_{\mathbf{B}}$  fibrant ; et l'avant-dernière ligne de l'axiome (W5).  $\square$

*Exemple 2.1.5.* On renvoie à [CD12a, §3] pour la construction de théories de Weil mixtes des types suivants : de De Rham algébrique ([CD12a, 3.1.5]) et analytique ([CD12a, 3.1.7]) ; rigide ([CD12a, 3.2.10]) ; et  $\ell$ -adique ([CD12a, 3.3.5]).

*Remarque 2.1.6.* Chacune des théories de Weil mixtes de 2.1.6 est à coefficients dans  $\mathrm{Mod}(\mathbf{K})$  avec  $\mathbf{K}$  un corps de caractéristique nulle et peut donc se construire sans passer par la théorie plus générale de la catégorie homotopique stable à coefficients ind-tannakiens. Il n'en est pas de même de l'exemple suivant.

*Notation 2.1.7.*

(i) On note  $\mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$  la catégorie des  $\mathbf{Q}$ -structures de Hodge mixtes ([Del71, 2.3.8]) et  $\mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{pol}} \subseteq \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$  la sous-catégorie pleine engendrée par les  $\mathbf{Q}$ -structures de Hodge mixtes polarisables ([Bei86, §2]). Elles sont essentiellement  $\mathcal{U}$ -petites, abéliennes, monoïdales symétriques fermées et leurs objets sont tous fortement dualisables. L'inclusion de  $\mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{pol}}$  dans  $\mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$  est monoïdale symétrique forte. Les foncteurs d'oubli  $\mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathrm{Mod}(\mathbf{Q})$  et  $\mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{pol}} \rightarrow \mathrm{Mod}(\mathbf{Q})$  qui associent à une  $\mathbf{Q}$ -structure de Hodge mixte le  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel sous-jacent sont monoïdaux symétriques forts, exacts, fidèles et  $\mathbf{Q}$ -linéaires. D'après [DM89, 2.11],  $\mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$  et  $\mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{pol}}$  sont tannakiennes. D'après [PS08, 3.35], elles sont de Ext-dimension  $\leq 1$ . En particulier, elles vérifient les hypothèses de 2.0.0.

(ii) On note  $\mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b$  la catégorie des  $\mathbf{Q}$ -complexes de Hodge mixtes bornés et  $\mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b$  la localisation de  $\mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b$  par rapport aux homotopies de chaînes telles qu'elles sont définies dans [Beï86, 3.2, 3.3]. La catégorie  $\mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b$  est triangulée et munie d'un foncteur cohomologique canonique  $\mathfrak{h}^r : \mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b \rightarrow \mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$  pour tout  $r \in \mathbf{Z}$ . On appelle *quasi-isomorphisme* un morphisme  $f$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b$  tel que  $\mathfrak{h}^r f$  soit un isomorphisme de  $\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$  pour tout  $r \in \mathbf{Z}$ . Si  $\mathcal{Q}\text{Iso}$  désigne la classe des quasi-isomorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b$ , alors on note  $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\infty}$  la  $(\infty, 1)$ -catégorie stable associée à la catégorie avec équivalences faibles  $(\mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b, \mathcal{Q}\text{Iso})$  et l'on note  $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b$  la catégorie homotopique de  $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\infty}$ . Plus précisément,  $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\infty}$  est une résolution fibrante dans la structure de modèles de Joyal set  $\text{Set}_{\Delta}$  ([Lur09a, 2.2.5.1]) de l'image de la catégorie avec équivalences faibles  $(\mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b, \mathcal{Q}\text{Iso})$  par le composé du foncteur de localisation simpliciale de Dwyer-Kan  $\mathcal{W}\text{Cat} \rightarrow \text{Set}_{\Delta}\text{-Cat}$  défini dans [DK80, 2.1, 3.4] avec le nerf simplicial  $N_{\Delta} : \text{Set}_{\Delta}\text{-Cat} \rightarrow \text{Set}_{\Delta}$ .

On vérifie facilement que le produit tensoriel des  $\mathbf{Q}$ -complexes de Hodge mixtes ([Beï86, 3.8]) préserve les quasi-isomorphismes en chaque variable. On déduit alors de [Rob13, 3.1.7, 3.2.2] que  $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\infty}$  se prolonge en une  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\infty,\otimes}$  telle que le  $(\infty, 1)$ -foncteur de localisation  $N(\mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\infty}$  se prolonge en un  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort  $N(\mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b)^{\otimes} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\infty,\otimes}$ , où la source est la  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique associée à la catégorie monoïdale symétrique  $(\mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b, \otimes)$  ([Lur12, 2.1.2.21]). D'après [Beï86, 3.4], le foncteur évident  $\mathcal{C}\text{plx}^b(\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^b$  induit une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories  $\mathcal{D}^{b,\infty}(\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}) \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\infty}$ , où  $\mathcal{D}^{b,\infty}(\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}})$  désigne la  $(\infty, 1)$ -catégorie associée à la catégorie avec équivalences faibles  $(\mathcal{C}\text{plx}^b(\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}), \mathcal{Q}\text{Iso})$ . De plus, ce foncteur est compatible aux structures monoïdales symétriques et l'on en déduit une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques  $\mathcal{D}^{b,\infty}(\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}})^{\otimes} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\infty,\otimes}$ , où  $\mathcal{D}^{b,\infty}(\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}})^{\otimes}$  est la structure monoïdale symétrique associée à la structure monoïdale sur  $\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$ .

(iii) On note  $\mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\text{pol}}$  la catégorie des  $\mathbf{Q}$ -complexes de Hodge mixtes bornés polarisables définie dans [Beï86, 3.9]. On dispose de la localisation de cette catégorie par rapport aux homotopies de chaînes ([Beï86, 3.10]) et de la classe  $\mathcal{Q}\text{Iso}^{\text{pol}} \subseteq \text{mor}(\mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\text{pol}})$  des quasi-isomorphismes. On note  $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\text{pol},\infty}$  la  $(\infty, 1)$ -catégorie stable associée à la catégorie avec équivalences faibles  $(\mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\text{pol}}, \mathcal{Q}\text{Iso}^{\text{pol}})$ . On fera attention que  $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\text{pol},\infty}$  n'est pas une sous- $(\infty, 1)$ -catégorie pleine de  $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\infty}$  ([Beï86, 2.5]). Comme dans le cas non polarisable, on dispose d'une structure de  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\text{pol},\infty,\otimes}$  sur  $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\text{pol},\infty}$  et d'une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques  $\mathcal{D}^{b,\infty}(\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^{\text{pol}}) \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\text{pol},\infty}$  ([Beï86, 3.11]).

(iv) Les constructions de la preuve de [Lev98, V, 2.3.10] fournissent un préfaisceau sur  $\text{Sm}\downarrow\mathbf{C}$  à valeurs dans  $\mathcal{C}\text{Alg}(\mathcal{C}_{\mathcal{H},\mathbf{Q}}^{b,\text{pol}})$  qui associe à  $X \in \text{ob}(\text{Sm}\downarrow\mathbf{C})$  un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Hodge mixte polarisable dont la cohomologie s'identifie à la structure de Hodge mixte polarisable sur la cohomologie de Betti rationnelle de  $X$  construite par P. Deligne ([Del71, 3.2.5]). On notera  $\tilde{E}_{\text{Hdg,Spec}(\mathbf{C})}$  ce préfaisceau d'algèbres commutatives.

**Théorème 2.1.8.** *Il existe une  $\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^{\text{pol}}$ -théorie de Hodge mixte  $E_{\text{Hdg,Spec}(\mathbf{C})}$  sur  $\text{Spec}(\mathbf{C})$  telle que  $\mathfrak{h}^r E_{\text{Hdg,Spec}(\mathbf{C})}(X)$  s'identifie à la structure de Hodge mixte polarisable sur la cohomologie de Betti rationnelle  $H_{\text{Betti}}^r(X, \mathbf{Q})$  pour tous  $X \in \text{ob}(\text{Sm}\downarrow\mathbf{C})$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ .*

*Démonstration.* D'après 2.1.7(iii), il existe une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales

symétriques

$$\mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{D}^{\mathrm{b},\infty}(\mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}}) \right)^{\otimes} \simeq \mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbb{Q}}^{\mathrm{b},\mathrm{pol},\infty} \right)^{\otimes}.$$

De plus, d'après [Oor64], on a une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques

$$\mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{D}^{\mathrm{b},\infty}(\mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}}) \right)^{\otimes} \simeq \mathcal{D}^{\infty}(\mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right)^{\otimes}),$$

où le but est la  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique dont la  $(\infty, 1)$ -catégorie sous-jacente est celle associée à la catégorie avec équivalences faibles  $(\mathcal{C}\mathrm{plx} \left( \mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right) \right), \mathcal{Q}\mathcal{I}\mathrm{so})$  et dont la structure monoïdale symétrique est induite par celle sur  $\mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}}$  de la façon évidente. Par suite, on a une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories

$$\mathcal{C}\mathrm{Alg} \left( \mathcal{D}^{\mathrm{b},\infty}(\mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right)^{\otimes}) \right) \simeq \mathcal{C}\mathrm{Alg} \left( \mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbb{Q}}^{\mathrm{b},\mathrm{pol}} \right)^{\otimes} \right).$$

On en déduit une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories

$$\begin{array}{c} \mathcal{F}\mathrm{un} \left( \mathcal{N}(\mathrm{Sm}\downarrow\mathbf{C})^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}\mathrm{Alg} \left( \mathcal{D}^{\infty}(\mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right)^{\otimes}) \right) \right) \\ \downarrow \sim \\ \mathcal{F}\mathrm{un} \left( \mathcal{N}(\mathrm{Sm}\downarrow\mathbf{C})^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}\mathrm{Alg} \left( \mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{D}_{\mathcal{H},\mathbb{Q}}^{\mathrm{b},\mathrm{pol}} \right)^{\otimes} \right) \right), \end{array}$$

où  $\mathcal{F}\mathrm{un}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  désigne la  $(\infty, 1)$ -catégorie des  $(\infty, 1)$ -foncteurs entre les  $(\infty, 1)$ -catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . Le préfaisceau  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{Hdg}, \mathrm{Spec}(\mathbb{C})}$  de 2.1.7(iv) induit un objet du but de cette équivalence et donc un  $(\infty, 1)$ -foncteur  $\mathcal{N}(\mathrm{Sm}\downarrow\mathbf{C})^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathcal{C}\mathrm{Alg} \left( \mathcal{D}^{\infty}(\mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right)^{\otimes}) \right)$ . D'après le théorème de rectification [Lur12, 4.4.4.7], on a une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories

$$\mathcal{N} \left( \mathcal{C}\mathrm{Alg} \left( \mathcal{C}\mathrm{plx} \left( \mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right) \right) \right) \right) [\mathcal{W}_{\mathrm{calg}}^{-1}] \simeq \mathcal{C}\mathrm{Alg} \left( \mathcal{D}^{\infty}(\mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right)^{\otimes}) \right),$$

où  $\mathcal{W}_{\mathrm{calg}}$  est la classe des morphismes de monoïdes commutatifs de  $\mathcal{C}\mathrm{plx} \left( \mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right) \right)$  qui sont des quasi-isomorphismes des complexes sous-jacents. Le préfaisceau  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{Hdg}, \mathrm{Spec}(\mathbb{C})}$  induit donc un  $(\infty, 1)$ -foncteur

$$\mathcal{N}(\mathrm{Sm}\downarrow\mathbf{C})^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathcal{N} \left( \mathcal{C}\mathrm{Alg} \left( \mathcal{C}\mathrm{plx} \left( \mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right) \right) \right) \right) [\mathcal{W}_{\mathrm{calg}}^{-1}].$$

D'après la formule (41) de [Rob13, 2.2.2], généralisation de [Lur09a, 4.2.4.4], on a une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories

$$\begin{array}{c} \mathcal{N} \left( \mathcal{P}\mathrm{Sh} \left( \mathrm{Sm}\downarrow\mathbf{C}, \mathcal{C}\mathrm{Alg} \left( \mathcal{C}\mathrm{plx} \left( \mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right) \right) \right) \right) \right) [\mathcal{W}_{\mathrm{proj}}^{-1}] \\ \downarrow \sim \\ \mathcal{F}\mathrm{un} \left( \mathcal{N}(\mathrm{Sm}\downarrow\mathbf{C})^{\mathrm{op}}, \mathcal{N} \left( \mathcal{C}\mathrm{Alg} \left( \mathcal{C}\mathrm{plx} \left( \mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right) \right) \right) \right) [\mathcal{W}_{\mathrm{calg}}^{-1}] \right), \end{array}$$

où  $\mathcal{W}_{\mathrm{proj}}$  désigne la classe des équivalences faibles objet par objet et où la catégorie  $\mathcal{C}\mathrm{Alg} \left( \mathcal{C}\mathrm{plx} \left( \mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right) \right) \right)$  est munie de la structure de modèles  $\mathfrak{A}$ -combinatoire de [CD12b, 7.1.8] associée à la structure de modèles injective sur  $\mathcal{C}\mathrm{plx} \left( \mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right) \right)$  (1.0.4(ii)). En particulier,  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{Hdg}, \mathrm{Spec}(\mathbb{C})}$  induit un objet de la catégorie

$$\mathcal{P}\mathrm{Sh} \left( \mathrm{Sm}\downarrow\mathbf{C}, \mathcal{C}\mathrm{Alg} \left( \mathcal{C}\mathrm{plx} \left( \mathcal{J}\mathrm{nd} \left( \mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pol}} \right) \right) \right) \right)$$

que l'on notera  $E_{\text{Hdg,Spec}(\mathbf{C})}$ . Il reste à vérifier les axiomes de 2.1.1. Or en composant avec le foncteur fibre

$$\text{Cplx} \left( \text{Jnd} \left( \mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^{\text{pol}} \right) \right) \rightarrow \text{Cplx} \left( \text{Mod}(\mathbf{Q}) \right),$$

on obtient un préfaisceau qui représente la cohomologie de Betti rationnelle. D'après 2.1.3(ii),  $E_{\text{Hdg,Spec}(\mathbf{C})}$  est une  $\mathcal{MH}\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^{\text{pol}}$ -théorie de Weil mixte.  $\square$

## 2.2 FORMALISME DES SIX OPÉRATIONS DE GROTHENDIECK

*Notation 2.2.0.* Dans ce numéro, on fixe une  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte  $E_{\mathbf{B}}$ , objet de la catégorie  $\mathcal{CAlg} \left( \mathcal{P}\text{Sh} \left( \text{Sm}^{\circ} \downarrow \mathbf{B}, \text{Cplx}(\mathcal{T}) \right) \right)$ . De plus, on note  $\mathcal{E}'_{\mathbf{B}} \in \text{ob} \left( \mathcal{CAlg} \left( \text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathbb{S}}}^{\mathbb{S}} \left( \mathbf{B}, \text{Cplx}(\mathcal{T}) \right) \right) \right)$  le spectre de Tate symétrique qui représente  $E_{\mathbf{B}}$  construit dans 2.1.4. On remarque que la catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique  $\text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathbb{S}}}^{\mathbb{S}} \left( \mathbf{B}, \text{Cplx}(\mathcal{T}) \right)$  vérifie les hypothèses de [CD12b, 7.1.8] d'après 1.6.3. Par conséquent,  $\mathcal{CAlg} \left( \text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathbb{S}}}^{\mathbb{S}} \left( \mathbf{B}, \text{Cplx}(\mathcal{T}) \right) \right)$  admet une structure de  $\mathcal{U}$ -modèles telle que le foncteur d'oubli

$$\mathcal{CAlg} \left( \text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathbb{S}}}^{\mathbb{S}} \left( \mathbf{B}, \text{Cplx}(\mathcal{T}) \right) \right) \rightarrow \text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathbb{S}}}^{\mathbb{S}} \left( \mathbf{B}, \text{Cplx}(\mathcal{T}) \right)$$

détecte les équivalence faibles et les fibrations. De plus, ce foncteur préserve les objets cofibrants. On fixe une résolution cofibrante  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}} \rightarrow \mathcal{E}'_{\mathbf{B}}$  dans  $\mathcal{CAlg} \left( \text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathbb{S}}}^{\mathbb{S}} \left( \mathbf{B}, \text{Cplx}(\mathcal{T}) \right) \right)$ . C'est une résolution cofibrante aussi dans  $\text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathbb{S}}}^{\mathbb{S}} \left( \mathbf{B}, \text{Cplx}(\mathcal{T}) \right)$ . En particulier, la règle  $(\pi_X : X \rightarrow \mathbf{B}) \mapsto \mathcal{E}_X := \pi_X^* \mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  définit un monoïde commutatif cofibrant, cartésien et homotopiquement cartésien de la catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles  $\text{Sm}$ -prémotivique,  $\mathcal{U}$ -tractable sur  $\mathcal{S}$ .

*Résumé.* Dans ce numéro, on examine le formalisme des six opérations de Grothendieck canoniquement associé à la  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte  $E_{\mathbf{B}}$ . En particulier, on vérifie qu'elles préservent les objets homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentables ; que la catégorie motivique associée est séparée et continue ; et que le spectre de cohomologie absolue  $\mathcal{E}_{\text{abs},\mathbf{B}}$  associée à  $E_{\mathbf{B}}$  est orientable et donc une algèbre sur le spectre de cohomologie motivique de Beilinson.

*Plan.* Après avoir remarqué dans 2.2.1 que le spectre  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  fournit une catégorie motivique  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{(-)})$  canoniquement associée à la  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte  $E_{\mathbf{B}}$  ainsi qu'un système de foncteurs de réalisation canoniques  $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(X) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  qui forment un morphisme de catégories motiviques, on étudie la catégorie  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}})$ . En particulier, on montre qu'elle est engendrée en tant que catégorie triangulée, pseudo-abélienne par une famille d'objets homotopiquement fortement dualisables (2.2.5) et l'on en déduit qu'elle est canoniquement équivalente à  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$  (2.2.7). Ce dernier résultat, qui généralise [CD12a, 2.6.2], affirme en quelque sorte que la catégorie des « coefficients constructibles, triangulés » associée à  $E_{\mathbf{B}}$  sur  $\mathbf{B}$  n'est autre que la catégorie des « constantes ». En particulier, avec 2.1.8, cela fournit un foncteur de réalisation de Hodge mixte à coefficients rationnels sur  $\text{Spec}(\mathbf{C})$  (2.2.8).

La construction des catégories  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  et des six opérations là-dessus sont compatibles aux foncteurs fibres (2.2.9). On en déduit que  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{(-)})$  est séparée (2.2.10). D'autre part, la théorie de dualité développée dans [CD12b, §4.4] s'applique à  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{(-)})$  (2.2.11 et l'on en déduit que les six opérations de Grothendieck préservent les objets homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentables et les objets géométriques de  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{(-)})$  (2.2.12).

On montre dans 2.2.20 que le spectre de cohomologie absolue associée à une  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte est orientable. Comme corollaire, la catégorie des modules homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentables sur le spectre de cohomologie absolue  $\mathcal{E}_{\text{abs},X}$  est canoniquement équivalente

à la catégorie des modules géométriques sur  $\mathcal{E}_X$  (2.2.21) et, en particulier, on obtient un foncteur de réalisation canonique  $\mathcal{DM}_{\mathbb{B}, \aleph_0}(X) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{gm}}(\mathcal{E}_X)$  compatible aux six opérations de Grothendieck.

Pour terminer ce numéro, on étudie le comportement de la catégorie fibrée  $\mathcal{D}_{\aleph_0}(\mathcal{E}_{(-)})$  par rapport aux  $\aleph$ -petites limites filtrantes dans  $\text{Sch} \downarrow \mathbf{B}$ . Dans 2.2.23, on vérifie que les objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  sont constructibles en ce sens qu'elles sont « localement constants » sur une stratification de  $X$ .

**Proposition 2.2.1.**

(i) La règle  $X \mapsto \text{Mod}(\mathcal{E}_X)$  se prolonge en une  $\text{Cplx}(\mathcal{T})$ -catégorie de  $\aleph$ -modèles monoïdale symétrique,  $\aleph$ -combinatoire, stable,  $\text{Sm}$ -prémotivique sur  $\mathcal{S}$  dont la catégorie homotopique  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  est une  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ -catégorie motivique.

(ii) Pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ,

$$\{\mathcal{E}_X \otimes_{\text{Sp}^\mathcal{E}} (V \odot_{\text{Sp}^\mathcal{E}} \mathbf{y}_{\mathcal{T}, X}(Y)(-r)) \mid V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0), Y \in \text{ob}(\text{Sm}^\circ \downarrow X), r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$$

est une famille génératrice et homotopiquement génératrice d'objets  $\aleph_0$ -présentables et homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables de  $\text{Mod}(\mathcal{E}_X)$ , c'est-à-dire que  $\text{Mod}(\mathcal{E}_X)$  et  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  sont engendrées par la famille des twists  $\text{ob}(\mathcal{T}_0) \times \mathbf{Z}_{\leq 0}$ .

(iii) Le foncteur monoïdal symétrique fort  $\mathcal{E}_X \otimes_{\text{Sp}^\mathcal{E}} (-) : \text{Sp}_{1_{\mathcal{T}(1)}}^\mathcal{E}(X, \mathcal{T}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{E}_X)$  est un morphisme de catégories de  $\aleph$ -modèles  $\text{Sm}$ -prémotiviques et son dérivé  $\mathcal{E}_X \otimes_{\text{Sp}^\mathcal{E}}^L (-) : \mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(X) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  est un morphisme de catégories motiviques.

*Démonstration.*

(i) Les structures de catégories enrichies sur  $\text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}}$  et sur  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ , respectivement, sont induites par les adjonctions de Quillen évidentes

$$\text{Cplx}(\mathcal{T})_{\text{inj}} \rightleftarrows \text{Sp}_{1_{\mathcal{T}(1)}}^\mathcal{E}(X, \mathcal{T}) \rightleftarrows \text{Mod}(\mathcal{E}_X).$$

La première assertion résulte aussitôt de [CD12b, 7.2.11] et de 1.6.7. La seconde résulte de [CD12b, 2.4.47, 7.2.13, 7.2.18], 1.6.3 et 1.6.7 et (ii) ci-dessous.

(ii) Le foncteur d'oubli  $\upsilon : \text{Mod}(\mathcal{E}_X) \rightarrow \text{Sp}_{1_{\mathcal{T}(1)}}^\mathcal{E}(X, \mathcal{T})$  (resp.  $\mathbf{R}\upsilon$ ) est conservatif et préserve les  $\aleph$ -petites colimites filtrantes (resp. les  $\aleph$ -petites colimites homotopiques filtrantes).

(iii) Cela résulte de [CD12b, 7.2.13, 7.2.14]. □

*Notation 2.2.2.* On note  $\text{hom}_{\mathcal{E}_X}$  le bifoncteur  $\text{hom}_{\text{Mod}(\mathcal{E}_X)}$ , on note  $(\text{Mod}(\mathcal{E}_X), \otimes_{\mathcal{E}}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{E}}, \mathcal{E}_X)$  la structure monoïdale symétrique sur  $\text{Mod}(\mathcal{E}_X)$  et l'on note  $(\text{Mod}(\mathcal{E}_X), \text{hom}_{\mathcal{E}_X}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}, \odot_{\mathcal{E}}, \mathfrak{h}_{\mathcal{E}})$  la structure de  $\text{Cplx}(\mathcal{T})$ -catégorie bitensorisée. De plus, on désigne par  $\mathbf{y}_{\mathcal{E}_S}(X)$  l'objet  $\mathcal{E}_S \otimes_{\text{Sp}^\mathcal{E}} \mathbf{y}_{\mathcal{T}, X}(X)$  pour tous  $S \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ,  $X \in \text{ob}(\text{Sm} \downarrow S)$ .

**Définition 2.2.3.** Soient  $(\mathcal{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  et  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \otimes_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie monoïdale symétrique et une  $\mathcal{V}$ -catégorie monoïdale symétrique, respectivement. On dira que  $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$  est **fortement  $\mathcal{V}$ -dualisable** s'il existe un objet  $A^\vee \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et une  $\mathcal{V}$ -adjonction  $(-) \otimes_{\mathcal{C}} A \dashv A^\vee \otimes_{\mathcal{C}} (-)$  de  $\mathcal{V}$ -endofoncteurs de  $\mathcal{C}$ . Dans ce cas, on dira que  $A^\vee$  est le  **$\mathcal{V}$ -dual fort** de  $A$ . Un  $\mathcal{V}$ -dual fort est unique à unique isomorphisme près s'il existe et, si  $A^\vee$  est un  $\mathcal{V}$ -dual fort de  $A$ , alors  $A$  est un  $\mathcal{V}$ -dual fort de  $A^\vee$ . Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est fermée,  $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$  admet un  $\mathcal{V}$ -dual fort si et seulement si la transformation  $\mathcal{V}$ -naturelle

$$\underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}(A, \mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{C}} (-) \rightarrow \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

induite par la  $\mathcal{V}$ -adjonction à deux variables  $(\text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \otimes_{\mathcal{C}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}})$  est un isomorphisme. On peut ainsi identifier  $A^{\vee}$  à  $\underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}(A, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$ . Comme le montrera 2.2.4 ci-dessous, si  $\mathcal{C}$  est tensorisée sur  $\mathcal{V}$ , les  $\mathcal{V}$ -duaux forts sont précisément les Set-duaux forts. Par conséquent, sous cette hypothèse, on parlera simplement de « duaux forts ».

**Lemme 2.2.4.** *Si  $(\mathcal{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{V}}, \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$  est une catégorie monoïdale symétrique fermée et que  $(\mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \otimes_{\mathcal{C}}, \odot_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}, \underline{\text{mor}}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  est une  $\mathcal{V}$ -catégorie monoïdale symétrique fermée, tensorisée, alors un objet  $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$  admet un  $\mathcal{V}$ -dual fort si et seulement si  $A$  admet un Set-dual fort.*

*Démonstration.* Si  $A^{\vee}$  est un  $\mathcal{V}$ -dual fort de  $A$ , alors on a

$$\begin{aligned} \text{mor}_{\mathcal{C}}(B \otimes_{\mathcal{C}} A, C) &\cong \text{mor}_{\mathcal{V}}(\mathbf{1}_{\mathcal{V}}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(B \otimes_{\mathcal{C}} A, C)) \\ &\cong \text{mor}_{\mathcal{V}}(\mathbf{1}_{\mathcal{V}}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(B, A^{\vee} \otimes_{\mathcal{C}} C)) \\ &\cong \text{mor}_{\mathcal{C}}(B, A^{\vee} \otimes_{\mathcal{C}} C) \end{aligned}$$

pour tous  $B, C \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et l'on en déduit aisément que  $A^{\vee}$  est également un Set-dual fort de  $A$ . Inversement, si  $A^{\vee}$  est un Set-dual fort de  $A$ , alors on a

$$\begin{aligned} \text{mor}_{\mathcal{V}}(\mathbf{V}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(B \otimes_{\mathcal{C}} A, C)) &\cong \text{mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{V} \odot_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}} B \otimes_{\mathcal{C}} A, C) \\ &\cong \text{mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{V} \odot_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}} B, A^{\vee} \otimes_{\mathcal{C}} C) \\ &\cong \text{mor}_{\mathcal{V}}(\mathbf{V}, \text{mor}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{V}}(B, A^{\vee} \otimes_{\mathcal{C}} C)) \end{aligned}$$

et le lemme de  $\mathcal{V}$ -Yoneda entraîne que  $A^{\vee}$  est un  $\mathcal{V}$ -dual fort de  $A$ . □

**Lemme 2.2.5.** *Pour tout  $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$  projectif et lisse sur  $\mathbf{B}$ , l'objet  $\mathbf{y}_{\mathcal{E}_{\mathbf{B}}}(X)$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}})$  est fortement dualisable.*

*Démonstration.* D'après [CD12b, 2.4.31],  $\mathbf{y}_{\mathcal{Q}, \mathcal{S}}(X)$  est fortement dualisable dans  $\mathcal{SH}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{B})$ . Il s'ensuit que  $\mathbf{y}_{\mathbf{K}, \mathcal{S}}(X) = \mathbf{y}_{\mathcal{Q}, \mathcal{S}}(X) \otimes_{\mathcal{Q}} \mathbf{K}$  est fortement dualisable dans  $\mathcal{SH}_{\mathbf{K}}(\mathbf{B})$ . Il reste à rappeler que les morphismes  $\mathbf{L}\alpha^* : \mathcal{SH}_{\mathbf{K}}(\mathbf{B}) \rightarrow \mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(\mathbf{B})$  de 1.6.8 et  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}} \otimes_{\text{Sp}^{\mathcal{E}}}^{\mathbf{L}}(-) : \mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(\mathbf{B}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}})$  sont monoïdaux symétriques forts et que les morphismes monoïdaux symétriques forts préservent les duaux forts. □

**Lemme 2.2.6.**

- (i) *Le foncteur  $\text{Rhom}_{\mathcal{E}_{\mathbf{B}}}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}(-, \mathcal{E}_{\mathbf{B}}) : (\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}})^{\vee})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{T})$  est une équivalence de catégories triangulées, monoïdales symétriques, où  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}})^{\vee}$  désigne la sous-catégorie localisante engendrée par les objets fortement dualisables.*
- (ii) *Le foncteur  $\text{Rhom}_{\mathcal{E}_{\mathbf{B}}}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}}, -) : \mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}})^{\vee} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{T})$  est une équivalence de catégories triangulées, monoïdales symétriques.*

*Démonstration.* La preuve est essentiellement la même que celle de [CD12a, 2.6.2]. □

**Théorème 2.2.7.** *Supposons que  $\mathbf{B} = \text{Spec}(\kappa)$ , où  $\kappa$  est un corps parfait. Alors les foncteurs*

$$\text{Rhom}_{\mathcal{E}_{\mathbf{B}}}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}(-, \mathcal{E}_{\mathbf{B}}) : \mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{T}) \quad \text{et} \quad \text{Rhom}_{\mathcal{E}_{\mathbf{B}}}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}}, -) : \mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}})^{\vee} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{T})$$

*sont des équivalences de catégories triangulées, monoïdales symétriques.*

*Démonstration.* D'après 1.6.9 et 2.2.1(ii), la catégorie triangulée  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}})$  est engendrée par les objets de la forme  $\mathbf{y}_{\mathcal{E}_{\mathbf{B}}}(X)(-r)$  avec  $X$  un  $\mathbf{B}$ -schéma projectif, lisse et  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ . D'après 2.2.5, ces objets sont fortement dualisables. Par suite,  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}}) = \mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}})^{\vee}$  et l'on déduit alors de 2.2.6 que  $\mathbf{R}\mathrm{hom}_{\mathcal{E}_{\mathbf{B}}}^{\mathrm{cplx}(\mathcal{T})}(-, \mathcal{E}_{\mathbf{B}})$  et  $\mathbf{R}\mathrm{hom}_{\mathcal{E}_{\mathbf{B}}}^{\mathrm{cplx}(\mathcal{T})}(\mathcal{E}_{\mathbf{B}}, -)$  sont des équivalences triangulées, monoïdales symétriques.  $\square$

Grâce à 2.2.7, on achève l'étape 0 de notre programme de construction de foncteurs de réalisation motiviques enrichis sur une catégorie tannakienne de Ext-dimension finie.

**Corollaire 2.2.8.** *Supposons que  $\mathbf{B} = \mathrm{Spec}(\kappa)$ , où  $\kappa$  est un corps parfait. Alors il existe un foncteur triangulé, monoïdal symétrique fort,  $\mathbf{Q}$ -linéaire canonique  $\mathcal{SH}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{B})^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{T})$  qui transforme l'objet  $\mathbf{L}\pi_{X,\#}\mathbf{Q}_X \cong \mathbf{y}_{\mathbf{Q},\mathbf{B}}(X)$  en  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}(X)$  pour tout  $(\pi_X : X \rightarrow \mathbf{B}) \in \mathrm{ob}(\mathrm{Sm}\downarrow\mathbf{B})$ .*

*Démonstration.* Cela résulte aussitôt de 1.6.8, 2.2.1(iii) et 2.2.7.  $\square$

**Proposition 2.2.9.** *Soient  $\mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{K}'$  une extension de corps et  $\omega : \mathcal{T}_0 \rightarrow \mathrm{Mod}(\mathbf{K}')$  un foncteur fibre.*

- (i) *L'objet  $\omega(\mathcal{E}_{\mathbf{B}}) = (\omega(\mathcal{E}_{\mathbf{B},n}), \omega(\sigma_n))_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \in \mathrm{ob}\left(\mathcal{C}\mathrm{Alg}\left(\mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathbf{K}'(1)}}^{\mathcal{E}}(\mathbf{B}, \mathrm{Mod}(\mathbf{K}'))\right)\right)$  représente la  $\mathrm{Mod}(\mathbf{K}')$ -théorie de Weil mixte  $\omega\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  et le foncteur  $\omega$  induit un morphisme de catégories de  $\mathfrak{A}$ -modèles  $\mathrm{Sm}$ -prémotiviques*

$$\omega^* = \mathbf{L}\omega^* : \mathcal{D}(\mathcal{E}_{(-)}) \rightarrow \mathcal{D}(\omega(\mathcal{E}_{(-)}))$$

*qui est homotopiquement conservatif sur chaque fibre.*

- (ii) *Si  $\mathbf{B} = \mathrm{Spec}(\kappa)$  est le spectre d'un corps parfait, alors le morphisme de catégories motiviques  $\omega^*$  commute aux six opérations de Grothendieck lorsqu'ils sont évalués en des objets homotopiquement  $\mathfrak{X}_0$ -présentables :  $\mathbf{L}f^*$ ,  $\mathbf{R}f_*$ ,  $f_*$ ,  $f^!$  pour  $f \in \mathrm{mor}(\mathcal{S})$  un morphisme séparé,  $\otimes_{\mathcal{E}}$  et  $\mathbf{R}\mathrm{hom}_{\mathcal{E}}$ .*

*Démonstration.*

(i) D'après 2.1.3,  $\omega\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  est une  $\mathrm{Mod}(\mathbf{K}')$ -théorie de Weil mixte. Il est clair que le spectre symétrique  $(\omega(\mathcal{E}_{\mathbf{B},n}), \omega(\sigma_n))_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$  est isomorphe au spectre construit dans 2.1.4, parce que  $\omega$  préserve les équivalences faibles  $\mathbf{A}^1$ -Nisnevich-locales. De plus, le foncteur de Quillen à gauche, monoïdal symétrique fort  $\omega^* : \mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}(1)}}^{\mathcal{E}}(\mathbf{B}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathbf{K}'(1)}}^{\mathcal{E}}(\mathbf{B}, \mathrm{Mod}(\mathbf{K}'))$  induit un foncteur de Quillen à gauche  $\omega^* : \mathcal{C}\mathrm{Alg}\left(\mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}(1)}}^{\mathcal{E}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})\right) \rightarrow \mathcal{C}\mathrm{Alg}\left(\mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathbf{K}'(1)}}^{\mathcal{E}}(\mathbf{B}, \mathrm{Mod}(\mathbf{K}'))\right)$ . En particulier,  $\omega^*\mathcal{E}_{\mathbf{B}} = \omega(\mathcal{E}_{\mathbf{B}})$  est cofibrant. Grâce à 1.6.11 et 2.2.1, on dispose d'un carré commutatif de foncteurs de Quillen à gauche entre catégories de  $\mathfrak{A}$ -modèles  $\mathrm{Sm}$ -prémotiviques

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}(1)}}^{\mathcal{E}}((-), \mathcal{T}) & \xrightarrow{\mathcal{E}_{(-)} \otimes_{\mathrm{Sp}^{\mathcal{E}}} } & \mathrm{Mod}(\mathcal{E}_{(-)}) \\ \omega^* \downarrow & & \downarrow \mathbf{L}\omega^* \\ \mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathbf{K}'(1)}}^{\mathcal{E}}((-), \mathrm{Mod}(\mathbf{K}')) & \xrightarrow{\omega(\mathcal{E}_{(-)}) \otimes_{\mathrm{Sp}^{\mathcal{E}}} } & \mathrm{Mod}(\omega(\mathcal{E}_{(-)})). \end{array}$$

Il reste à montrer que  $\mathbf{L}\omega^* : \mathcal{D}(\mathcal{E}_X) \rightarrow \mathcal{D}(\omega(\mathcal{E}_X))$  est conservatif pour tout  $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{S})$ . Or la flèche verticale de gauche du carré ci-dessus est homotopiquement conservative d'après 1.6.11. Il suffit de constater que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathcal{T}(1)}}^{\mathcal{E}}(X, \mathcal{T}) & \xleftarrow{v} & \mathrm{Mod}(\mathcal{E}_X) \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega \\ \mathrm{Sp}_{\mathbf{1}_{\mathbf{K}'(1)}}^{\mathcal{E}}(X, \mathrm{Mod}(\mathbf{K}')) & \xleftarrow{v} & \mathrm{Mod}(\omega(\mathcal{E}_X)) \end{array}$$

est commutatif, où  $\upsilon$  désigne le foncteur homotopiquement conservatif d'oubli.

(ii) Cela résulte de [Ayo10, 3.5, 3.6, 3.7].  $\square$

**Corollaire 2.2.10.** *Supposons que  $\mathbf{B} = \text{Spec}(\kappa)$ , où  $\kappa$  est un corps. Alors la catégorie motivique  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{(-)})$  est séparée au sens de [CD12b, 2.1.7]. Autrement dit, pour tout morphisme surjectif de type fini  $(f : X \rightarrow Y) \in \text{mor}(\mathcal{S})$ , le foncteur  $\mathbf{L}f^* : \mathcal{D}(\mathcal{E}_Y) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  est conservatif.*

*Démonstration.* On choisit une extension de corps  $\mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{K}'$  et un foncteur fibre  $\omega : \mathcal{T}_0 \rightarrow \text{Mod}(\mathbf{K}')$ . D'après 2.2.9, il suffit de montrer que  $\mathcal{D}(\omega(\mathcal{E}_{(-)}))$  est séparée. Cela résulte de [CD12a, 2.2.8] et [CD12b, 12.2.10, 14.2.16].  $\square$

**Lemme 2.2.11.** *Supposons que  $\mathbf{B} = \text{Spec}(\kappa)$ , où  $\kappa$  est un corps parfait. Si l'on note  $\tau_S$  la famille de twists  $V \otimes_{\mathcal{E}}^{\mathcal{T}} \mathcal{E}_S(r)$ ,  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ , alors la catégorie motivique  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{(-)})$  est  $\tau$ -engendrée ([CD12b, 1.1.41]) et  $\tau$ -dualisable ([CD12b, 4.4.13]).*

*Démonstration.* D'après 2.2.1(ii),  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{(-)})$  est  $\tau$ -engendrée. Montrons que  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{(-)})$  vérifie les conditions de [CD12b, 4.4.13].

(i) La première condition est que  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{(-)})$  est  $\tau$ -compatible. Cela veut dire que  $i^!(V \otimes_{\mathcal{E}}^{\mathcal{T}} \mathcal{E}_X(r))$  est homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentable pour toute immersion fermée  $i : Z \hookrightarrow X$  de  $\mathcal{S}$  avec  $Z$  et  $X$  réguliers et pour tous  $r \in \mathbf{Z}$ ,  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ , et que  $\mathbf{R}\underline{\text{hom}}_{\mathcal{E}}(V \otimes_{\mathcal{E}}^{\mathcal{T}} \mathcal{E}_X(r), -)$  préserve les objets homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentables pour tous  $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ,  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ . La première assertion résulte de (ii) ci-dessous, car  $i^!(V \otimes_{\mathcal{E}}^{\mathcal{T}} \mathcal{E}_X(r)) \cong V \otimes_{\mathcal{E}}^{\mathcal{T}} (i^! \mathcal{E}_X)(r)$ . La seconde résulte de ce que  $V \otimes_{\mathcal{E}}^{\mathcal{T}} \mathcal{E}_X(r)$  est homotopiquement fortement dualisable pour tous  $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ,  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ .

(ii) La deuxième condition est que l'objet  $i^! \mathcal{E}_X$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_Z)$  est  $\otimes_{\mathcal{E}}^{\mathbf{L}}$ -inversible pour toute immersion fermée  $i : Z \hookrightarrow X$  de  $\mathcal{S}$  avec  $Z$  et  $X$  réguliers. On peut supposer que  $X$  et  $Z$  sont équidimensionnels. Soient  $\pi_X : X \rightarrow \mathbf{B}$  et  $\pi_Z : Z \rightarrow \mathbf{B}$  les morphismes structuraux, qui sont alors lisses et de dimension relative pure  $\dim(X)$  et  $\dim(Z)$ , respectivement. D'après [CD12b, 2.4.50], on a

$$\begin{aligned} i^! \mathcal{E}_X &= i^! \pi_X^* \mathcal{E}_{\mathbf{B}} \\ &\cong i^! \pi_X^! \mathcal{E}_{\mathbf{B}}(-\dim(X))[-2\dim(X)] \\ &= \pi_Z^! \mathcal{E}_{\mathbf{B}}(-\dim(X))[-2\dim(X)] \\ &\cong (\pi_Z^* \mathcal{E}_{\mathbf{B}}(\dim(Z))[2\dim(Z)])(-\dim(X))[-2\dim(X)] \\ &= \mathcal{E}_Z(-\text{codim}(i))[-2\text{codim}(i)] \end{aligned}$$

et ce dernier est manifestement  $\otimes_{\mathcal{E}}^{\mathbf{L}}$ -inversible.

(iii) La dernière condition est que le morphisme canonique

$$V \otimes_{\mathcal{E}}^{\mathcal{T}} \mathcal{E}_X(r) \rightarrow \mathbf{R}\underline{\text{hom}}_{\mathcal{E}}(\mathbf{R}\underline{\text{hom}}_{\mathcal{E}}(V \otimes_{\mathcal{E}}^{\mathcal{T}} \mathcal{E}_X(r), \mathcal{E}_X), \mathcal{E}_X)$$

est un isomorphisme de  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$  pour tous  $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ,  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ . Or

$$\mathbf{R}\underline{\text{hom}}_{\mathcal{E}}(V \otimes_{\mathcal{E}}^{\mathcal{T}} M, N) \cong V^{\vee} \otimes_{\mathcal{E}}^{\mathcal{T}} \mathbf{R}\underline{\text{hom}}_{\mathcal{E}}(M, N)$$

pour tous  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $M, N \in \text{ob}(\mathcal{D}(\mathcal{E}_X))$ , où  $V^{\vee}$  désigne un dual fort homotopique de  $V$ . On se ramène donc au cas où  $V = \mathbf{1}_{\mathcal{T}}$  et l'assertion résulte de ce que  $\mathcal{E}_X(r)$  est  $\otimes_{\mathcal{E}}^{\mathbf{L}}$ -inversible.  $\square$

**Proposition 2.2.12** ([Ayo07a, 2.2.34]). *Supposons que  $\mathbf{B} = \text{Spec}(\kappa)$ , où  $\kappa$  est un corps parfait.*

- (i) Les sous-catégories pleines  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}_0}(\mathcal{E}_X) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$ ,  $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$ , formées des objets homotopiquement  $\mathfrak{X}_0$ -présentables sont stables par les six opérations de Grothendieck.
- (ii) Les sous-catégories triangulées épaisses  $\mathcal{D}_{\text{gm}}(\mathcal{E}_X) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E}_X)$ ,  $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$ , engendrées par les objets de la forme  $f_{\#}\mathcal{E}_Y(r)$ ,  $(f : Y \rightarrow X) \in \text{Sm}\downarrow X$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ , sont stables par les six opérations de Grothendieck. On appelle cette sous-catégorie motivique la sous-catégorie des objets géométriques.

En particulier, elles forment une catégorie motivique.

*Démonstration.* La stabilité de ses sous-catégories par les opérations  $\mathbf{L}f^*$ ,  $\mathbf{R}f_*$ ,  $f_!$  et  $f^!$  résulte aussitôt de 2.2.11 et de [Ayo07a, 2.2.34]. La stabilité par  $\otimes_{\mathcal{E}}$  et  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{E}}$  résulte des raisonnements des [Ayo07a, 2.3.60, 2.3.61].  $\square$

**Définition 2.2.13.** On fixe une résolution simultanément cofibrante et fibrante  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{B}}$  de  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  dans  $\mathcal{C}\text{Alg}\left(\text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathcal{E}}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})\right)$ . Le foncteur d'oubli  $\mathcal{C}\text{Alg}\left(\text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathcal{E}}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})\right) \rightarrow \text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathcal{E}}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})$  préserve les objets cofibrants et fibrants d'après [CD12b, 7.1.8]. On note  $\mathcal{E}_{\text{abs}, \mathbf{B}}$  une résolution cofibrante du monoïde commutatif  $\alpha_*\mathcal{E}_{\mathbf{B}} = \mathbf{R}\alpha_*\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ , image de  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{B}}$  par le foncteur  $\alpha_* : \text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathcal{E}}}(\mathbf{B}, \mathcal{T}) \rightarrow \text{Sp}_{1_{\mathbf{K}}^{\mathcal{E}}}(\mathbf{B}, \text{Mod}(\mathbf{K}))$  de 1.6.8 et on l'appelle *spectre de cohomologie absolue* associé à  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ . Pour tout  $(\pi_X : X \rightarrow \mathbf{B}) \in \text{ob}(\mathcal{S})$ , on pose  $\mathcal{E}_{\text{abs}, X} := \pi_X^*\mathcal{E}_{\text{abs}, \mathbf{B}}$ . C'est un monoïde commutatif cofibrant, cartésien et homotopiquement cartésien de  $\text{Sp}_{1_{\mathbf{K}}^{\mathcal{E}}}((-), \text{Mod}(\mathbf{K}))$ . D'après les résultats de [CD12b, §7.2], on obtient une catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathcal{U}$ -combinatoire,  $\text{Sm}$ -prémotivique sur  $\mathcal{S}$  dont la fibre sur  $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$  est  $\text{Mod}(\mathcal{E}_{\text{abs}, X})$ . De plus, la catégorie homotopique  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\text{abs}, (-)}) := \text{ho}\left(\text{Mod}(\mathcal{E}_{\text{abs}, (-)})\right)$  est une catégorie motivique.

**Définition 2.2.14.** Pour tout  $S \in \text{ob}(\mathcal{S})$ , il existe une décomposition canonique  $\mathbf{y}_{\mathcal{T}, S}(\mathbf{P}_S^1) = \mathbf{1}_{\mathcal{T}, S} \oplus \mathbf{1}_{\mathcal{T}, S}(1)[2]$  dans  $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathcal{T}}(S)$ . Effectivement, la démonstration est la même que celle de l'assertion analogue de [CD12b, 1.3.7]. D'après (W5), le morphisme unité  $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{T}, \mathbf{B}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{B}}$  induit un morphisme  $\eta(1)[2] : \mathbf{1}_{\mathcal{T}, \mathbf{B}}(1)[2] \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{B}}(1)[2]$ . On appelle *pré-orientation* l'élément de  $\text{hom}_{\mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathbf{K}}(\mathbf{B})}\left(\mathbf{y}_{\mathbf{K}}(\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^1), \mathcal{E}_{\text{abs}, \mathbf{B}}(1)[2]\right)$  induit par  $\eta(1)[2]$ .

**Lemme 2.2.15.** Pour tout  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ ,  $\text{Rhom}_{\text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathcal{E}}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}\left(\mathbf{1}_{\mathcal{T}, \mathbf{B}}(r), \mathcal{E}_{\mathbf{B}}\right)$  est canoniquement quasi-isomorphe à  $\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-r)[0]$ .

*Démonstration.* D'après (W4) et (W5), on a

$$\begin{aligned} \text{Rhom}_{\text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathcal{E}}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}\left(\mathbf{1}_{\mathcal{T}, \mathbf{B}}(r), \mathcal{E}_{\mathbf{B}}\right) &\cong \bigotimes_{\alpha=1}^r \text{Rhom}_{\text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathcal{E}}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}\left(\mathbf{1}_{\mathcal{T}, \mathbf{B}}(1), \mathcal{E}_{\mathbf{B}}\right) \\ &\cong \bigotimes_{\alpha=1}^r \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-1)_{\mathbf{E}} \\ &\cong \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(-r)_{\mathbf{E}}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**Lemme 2.2.16.** Pour tous  $m \leq n$  dans  $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ , soit  $\iota_{m, n} : \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^m \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^n$  l'immersion fermée donnée par  $(x_0 : \cdots : x_m) \mapsto (x_0 : \cdots : x_m : 0 : \cdots : 0)$ .

- (i) Pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{> 0}$ , on a  $\mathfrak{h}^s \mathbf{E}_{\mathbf{B}}(\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^n) = 0$  pour  $s \in \mathbf{Z}$  impair et pour  $s \notin [0, 2n]$ , où  $\mathfrak{h}^s$  désigne le foncteur de cohomologie en degré  $s$  associé à la  $\mathfrak{t}$ -structure naturelle sur  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ .

(ii) Si  $m, n, s \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  et que  $m \leq n$ , alors le morphisme  $\iota_{m,n}^* : \mathfrak{h}^s E_{\mathbf{B}}(\mathbf{P}_B^n) \rightarrow \mathfrak{h}^s E_{\mathbf{B}}(\mathbf{P}_B^m)$  est un isomorphisme dans  $\mathcal{T}$  lorsque  $s \leq 2m$ .

*Démonstration.* Sachant que  $\mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(\mathbf{P}_B^1) = \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}} \oplus \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1)$ , les assertions (i) et (ii) sont vraies pour  $n = 1$ . D'après 1.6.9 et [CD12a, 1.3.7], on a un triangle distingué canonique

$$\mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(\mathbf{P}_B^n) \xrightarrow{\mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(\iota_{n,n+1})} \mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(\mathbf{P}_B^{n+1}) \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(n+1)[2n+2] \rightarrow \mathbf{y}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(\mathbf{P}_B^n)[1]$$

dans  $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(\mathbf{B})$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ . Les assertions (i) et (ii) découlent de 2.2.15 et (W3) par récurrence.  $\square$

**Lemme 2.2.17.** Soient  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\sigma$  une permutation de  $\{0, \dots, n\}$  et notons abusivement  $\sigma : \mathbf{P}_B^n \rightarrow \mathbf{P}_B^n$  le morphisme  $(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_{\sigma(0)} : \dots : x_{\sigma(n)})$ . Alors  $\sigma^* : \mathfrak{h}^2 E_{\mathbf{B}}(\mathbf{P}_B^n) \rightarrow \mathfrak{h}^2 E_{\mathbf{B}}(\mathbf{P}_B^n)$  est l'identité.

*Démonstration.* La démonstration est la même que celle de [CD12a, 2.2.4].  $\square$

**Définition 2.2.18.** Comme  $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(\mathbf{B})$  est une catégorie monoïdale symétrique, le carré du morphisme de tressage

$$\tau : \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1)[1] \otimes_{\mathcal{S}\mathcal{P}^{\otimes}}^L \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1)[1] \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1)[1] \otimes_{\mathcal{S}\mathcal{P}^{\otimes}}^L \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}(1)[1]$$

est l'identité :  $\tau^2 = \text{id}$ . Par conséquent,  $\tau$  correspond à un élément

$$\varepsilon \in \text{hom}_{\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(\mathbf{B})}(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}}, \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B}})$$

tel que  $\varepsilon^2 = \text{id}$ . Les projecteurs  $\varepsilon_+ := (1 - \varepsilon)/2$  et  $\varepsilon_- := (1 + \varepsilon)/2$  induisent des objets  $\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B},+} := \text{im}(\varepsilon_+)$  et  $\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B},-} := \text{im}(\varepsilon_-)$ , respectivement. Évidemment, si  $\omega : \mathcal{T}_0 \rightarrow \mathcal{T}'_0$  est un foncteur monoïdal symétrique fort entre  $\mathcal{U}$ -petites catégories tannakiennes et que  $\mathcal{T}' := \text{Ind}(\mathcal{T}'_0)$ , alors  $\omega$  induit un foncteur monoïdal symétrique fort  $\omega^* : \mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(\mathbf{B}) \rightarrow \mathcal{SH}_{\mathcal{T}'_0}(\mathbf{B})$  tel que  $\omega^*(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B},+}) = \mathbf{1}_{\mathcal{T}'_0,\mathbf{B},+}$  et  $\omega^*(\mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B},-}) = \mathbf{1}_{\mathcal{T}'_0,\mathbf{B},-}$ . Pour tout objet  $M \in \mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(\mathbf{B})$ , on pose  $M_+ := M \otimes_{\mathcal{S}\mathcal{P}^{\otimes}}^L \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B},+}$  et  $M_- := M \otimes_{\mathcal{S}\mathcal{P}^{\otimes}}^L \mathbf{1}_{\mathcal{T},\mathbf{B},-}$ .

**Proposition 2.2.19.** Le morphisme canonique  $\mathcal{E}_{\text{abs},\mathbf{B}} \rightarrow \mathcal{E}_{\text{abs},\mathbf{B},+}$  est un inversible dans  $\mathcal{SH}_{\mathbf{K}}(\mathbf{B})$ .

*Démonstration.* Si le projecteur  $\text{id}_{\mathcal{E}_{\text{abs},\mathbf{B}}} \otimes_{\mathcal{S}\mathcal{P}^{\otimes}}^L \varepsilon_+$  est un isomorphisme, alors son image est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{E}_{\text{abs},\mathbf{B}} \otimes_{\mathcal{S}\mathcal{P}^{\otimes}}^L \mathbf{1}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}$ . D'après [Mor04, 6.1.1], pour tous  $X \in \text{ob}(\text{Sm}\downarrow\mathbf{B})$ ,  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  et  $s \in \mathbf{Z}$ , on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{hom}_{\mathcal{SH}_k(\mathbf{B})} \left( \mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(\mathbf{X})(-r)[s], \mathcal{E}_{\mathrm{abs},\mathbf{B}} \right) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{hom}_{\mathcal{SH}_k(\mathbf{B})} \left( \mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(\mathbf{X})(-r-1)[s-2] \otimes_{\mathbb{S}p^{\infty}}^{\mathbf{L}} \mathbf{1}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(1)[2], \mathcal{E}_{\mathrm{abs},\mathbf{B}} \right) \\
\downarrow (\mathrm{id} \otimes \epsilon_+)^* & & \downarrow \frac{1}{2}(\mathrm{id} \otimes^{\mathbf{L}}(\mathrm{id} + \sigma))^* \\
\mathrm{hom}_{\mathcal{SH}_k(\mathbf{B})} \left( \mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(\mathbf{X})(-r)[s], \mathcal{E}_{\mathrm{abs},\mathbf{B}} \right) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{hom}_{\mathcal{SH}_k(\mathbf{B})} \left( \mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(\mathbf{X})(-r-1)[s-2] \otimes_{\mathbb{S}p^{\infty}}^{\mathbf{L}} \mathbf{1}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(1)[2], \mathcal{E}_{\mathrm{abs},\mathbf{B}} \right),
\end{array}$$

où  $\sigma : \mathbf{1}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(1)[2] \rightarrow \mathbf{1}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(1)[2]$  désigne le morphisme associé au morphisme pointé  $(x : y) \mapsto (y : x) : \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^1 \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^1$ . Les objets de la forme  $\mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(\mathbf{X})(-r)$ ,  $\mathbf{X} \in \mathrm{ob}(\mathcal{S}m \downarrow \mathbf{B})$ ,  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , engendrent  $\mathcal{SH}_k(\mathbf{B})$  et il suffit donc de montrer que la flèche verticale de droite est un isomorphisme pour tous  $\mathbf{X}$ ,  $r$  et  $s$ . D'après (W5), on a

$$\begin{aligned}
& \mathrm{hom}_{\mathcal{SH}_k(\mathbf{B})} \left( \mathbf{y}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(\mathbf{X})(-r)[s] \otimes_{\mathbb{S}p^{\infty}}^{\mathbf{L}} \mathbf{1}_{\mathbf{K},\mathbf{B}}(1)[2], \mathcal{E}_{\mathrm{abs},\mathbf{B}} \right) \\
&= \mathrm{hom}_{\mathcal{SH}_{\mathcal{I}}(\mathbf{B})} \left( \mathbf{y}_{\mathcal{I},\mathbf{B}}(\mathbf{X})(-r)[s] \otimes_{\mathbb{S}p^{\infty}}^{\mathbf{L}} \mathbf{1}_{\mathcal{I},\mathbf{B}}(1)[2], \mathcal{E}_{\mathbf{B}} \right) \\
&= \mathrm{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{I})} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{I}}[s], \mathrm{Rhom}_{\mathbb{S}p_{1^{\mathcal{I}}(1)}^{\infty}(\mathbf{B},\mathcal{I})}^{\mathrm{cplx}(\mathcal{I})} \left( \mathbf{y}_{\mathcal{I},\mathbf{B}}(\mathbf{X})(-r) \otimes_{\mathbb{S}p^{\infty}}^{\mathbf{L}} \mathbf{1}_{\mathcal{I},\mathbf{B}}(1)[2], \mathcal{E}_{\mathbf{B}} \right) \right) \\
&\cong \mathrm{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{I})} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{I}}[s], \mathrm{Rhom}_{\mathbb{S}p_{1^{\mathcal{I}}(1)}^{\infty}(\mathbf{B},\mathcal{I})}^{\mathrm{cplx}(\mathcal{I})} \left( \mathbf{y}_{\mathcal{I},\mathbf{B}}(\mathbf{X})(-r), \mathcal{E}_{\mathbf{B}} \right) \otimes_{\mathcal{I}}^{\mathbf{L}} \mathfrak{h}^2 E_{\mathbf{B}}(\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^1)[-2] \right),
\end{aligned}$$

parce que

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Rhom}_{\mathrm{Sp}_{1_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathfrak{S}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})}^{\mathrm{Cplx}(\mathcal{T})} \left( \mathbf{y}_{\mathcal{T}, \mathbf{B}}(X)(-r), \mathcal{E}_{\mathbf{B}} \right) \otimes_{\mathcal{T}}^{\mathrm{L}} \mathfrak{h}^2 \mathbf{E}_{\mathbf{B}}(\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^1)[-2] \\
& \simeq \mathrm{Rhom}_{\mathrm{Sp}_{1_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathfrak{S}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})}^{\mathrm{Cplx}(\mathcal{T})} \left( \mathbf{y}_{\mathcal{T}, \mathbf{B}}(X)(-r), \mathcal{E}_{\mathbf{B}} \right) \otimes_{\mathcal{T}}^{\mathrm{L}} \mathrm{Rhom}_{\mathrm{Sp}_{1_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathfrak{S}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})}^{\mathrm{Cplx}(\mathcal{T})} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{T}, \mathbf{B}}(1)[2], \mathcal{E}_{\mathbf{B}} \right) \\
& \simeq \mathrm{Rhom}_{\mathrm{Sp}_{1_{\mathcal{T}}(1)}^{\mathfrak{S}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})}^{\mathrm{Cplx}(\mathcal{T})} \left( \mathbf{y}_{\mathcal{T}, \mathbf{B}}(X)(-r) \otimes_{\mathrm{Sp}^{\mathfrak{S}}}^{\mathrm{L}} \mathbf{1}_{\mathcal{T}, \mathbf{B}}(1)[2], \mathcal{E}_{\mathbf{B}} \right)
\end{aligned}$$

d'après 2.2.15. Grâce à 2.2.17, le morphisme  $\sigma$  induit l'identité sur  $\mathfrak{h}^2 \mathbf{E}_{\mathbf{B}}(\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^1)$  et l'assertion en résulte.  $\square$

**Corollaire 2.2.20.** *Le spectre  $\mathcal{E}_{\mathrm{abs}, \mathbf{B}}$  est un motif de Beilinson au sens de [CD12b, 14.2.1]. De manière équivalente,*

- (i)  $\mathcal{E}_{\mathrm{abs}, \mathbf{B}}$  vérifie la propriété descente par rapport à la topologie  $\mathfrak{h}$ ;
- (ii)  $\mathcal{E}_{\mathrm{abs}, \mathbf{B}}$  est orientable au sens de [CD12b, 12.2.2];
- (iii) il existe un morphisme de monoïdes commutatifs  $\mathrm{H}_{\mathbf{B}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathrm{abs}, \mathbf{B}}$  dans  $\mathrm{Sp}_{1_{\mathbf{Q}}(1)}^{\mathfrak{S}}(\mathbf{B}, \mathrm{Mod}(\mathbf{Q}))$ , où  $\mathrm{H}_{\mathbf{B}}$  est le spectre de cohomologie motivique de Beilinson défini dans [CD12b, 13.1.2].

*Démonstration.* C'est une conséquence de 2.2.19 et [CD12b, 14.2.16, 16.1.3, 16.2.13].  $\square$

**Proposition 2.2.21.** *Supposons que  $\mathbf{B} = \mathrm{Spec}(\kappa)$ , où  $\kappa$  est le spectre d'un corps parfait. Alors le morphisme canonique de catégories motiviques  $\mathcal{E} \otimes_{\mathrm{L} \alpha^* \mathcal{E}_{\mathrm{abs}}}^{\mathrm{L}} : \mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathrm{abs}, (-)}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}_{(-)})$  induit une équivalence de catégories motiviques  $\mathcal{D}_{\aleph_0}(\mathcal{E}_{\mathrm{abs}, (-)}) \simeq \mathcal{D}_{\mathrm{gm}}(\mathcal{E}_{(-)})$  qui commute aux six opérations de Grothendieck, où  $\mathcal{D}_{\aleph_0}(\mathcal{E}_{\mathrm{abs}, (-)})$  désigne la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathrm{abs}, (-)})$  engendrée par les objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables.*

*Démonstration.* Pour la pleine fidélité et la surjectivité essentielle, on laisse au lecteur le soin d'adapter l'argument de [CD12b, 17.1.5] à la présente situation. Grâce à 2.2.10, 2.2.20 et 1.6.3, la seule différence entre nos hypothèses et celles de [CD12b, 17.1.5] est que  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{(-)})$  n'est pas engendrée par les twists de Tate, mais 2.2.12(ii) nous permet de remédier à cet obstacle. La commutation aux six opérations de Grothendieck est conséquence de [CD12b, 4.4.25].  $\square$

En posant  $\mathcal{E}_{\mathrm{abs}, X} := \pi_X^* \mathcal{E}_{\mathrm{abs}, \mathbf{B}}$  pour tout  $(\pi_X : X \rightarrow \mathbf{B}) \in \mathrm{ob}(\mathrm{Sch} \downarrow \mathbf{B})$ , on obtient un monoïde commutatif de la catégorie  $\mathcal{SH}_{\mathbf{K}}(-)$  fibrée sur  $\mathrm{Sch} \downarrow \mathbf{B}$ . Dans cette situation, on a intérêt à étudier le comportement des catégories  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathrm{abs}, X})$  vis-à-vis des limites filtrantes à morphismes de transition affines lisses dans  $\mathrm{Sch} \downarrow \mathbf{B}$ .

**Proposition 2.2.22.**

- (i) La catégorie motivique  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathrm{abs}, (-)})$  est continue au sens de [CD12b, 4.3.1].
- (ii) Les catégories motiviques  $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(-)$  et  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{(-)})$  sont  $\tau$ -continues, où  $\tau$  désigne la famille des twists de la forme  $\mathbf{V} \otimes^{\mathcal{T}} \mathcal{E}_X(r)$ ,  $\mathbf{V} \in \mathrm{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ .

*Démonstration.*

(i) Plus généralement, si  $\mathcal{M}$  est une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique,  $\mathfrak{U}$ -combinatoire,  $\mathrm{Sm}$ -prémotivique sur  $\mathcal{S}$  vérifiant l'axiome du monoïde dont la catégorie homotopique est une catégorie motivique,  $\tau$ -engendrée pour  $\tau$  une famille de twists homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables et  $\tau$ -continue et que  $\mathcal{A} \in \mathrm{ob}(\mathcal{CAlg}(\mathcal{M}))$  est un monoïde

commutatif homotopiquement cartésien, alors  $\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \text{ho}(\text{Mod}(\mathcal{A}))$  est une catégorie motivique,  $\tau$ -engendrée et  $\tau$ -continue. En effet, cela résulte aussitôt de la définition [CD12b, 4.3.2], puisque  $\text{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_X)}(\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{M}} \mathbf{1}_{\mathcal{M}(X)}\{n\}, M) = \text{hom}_{\text{ho}(\mathcal{M})}(\mathbf{1}_{\mathcal{M}(X)}\{n\}, M)$  pour tous  $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ,  $n \in \tau$ ,  $M \in \text{ob}(\text{Mod}(\mathcal{A}_X))$ .

(ii) L'argument de (i) nous ramène au cas de  $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(-)$ . On remarque d'abord que, si  $\omega : \mathcal{T}_0 \rightarrow \text{Mod}(\mathbf{K}')$  est un foncteur fibre avec  $\mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{K}'$  une extension de corps, alors le foncteur induit  $\omega^* : \mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(-) \rightarrow \mathcal{SH}_{\mathbf{K}'}(-)$  commute à  $\mathbf{R}f_*$  pour tout morphisme  $(f : T \rightarrow S) \in \text{mor}(\text{Sch}\downarrow\mathbf{B})$ . En effet, soient  $X \in \text{ob}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S})$ ,  $r \in \mathbf{Z}_{\leq 0}$  et  $M \in \text{ob}(\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(T))$ . Alors, sachant que  $\omega^*$  préserve les  $\Omega^\infty$ -spectres faibles (cf. 1.6.11, 1.6.10) et que  $\mathbf{R}\Omega^\infty$  commute à  $\mathbf{R}f_*$  car  $\mathbf{L}\Sigma^\infty$  commute à  $\mathbf{L}f^*$ , on a

$$\begin{aligned}
& \text{Rhom}_{\text{Sp}_{\mathbf{K}'(1)}^\mathcal{E}(\mathcal{S}, \mathbf{K}')}^{\text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))}(\mathbf{y}_{\mathbf{K}', S}(X)(r), \omega^* \mathbf{R}f_* M) \\
&= \text{Rhom}_{\text{Sp}_{\mathbf{K}', S(1)}^\mathcal{E}(\mathcal{S}, \mathbf{K}')}^{\text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))}(\mathbf{y}_{\mathbf{K}', S}(X), \omega^* \mathbf{R}f_* M(-r)) \\
&= \text{Rhom}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}')))}^{\text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))}(\mathbf{y}_{\mathbf{K}', S}(X), \mathbf{R}\Omega^\infty \omega^* \mathbf{R}f_*(M(-r))) \\
&\cong \text{Rhom}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}')))}^{\text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))}(\mathbf{y}_{\mathbf{K}', S}(X), \omega^* \mathbf{R}\Omega^\infty \mathbf{R}f_*(M(-r))) \\
&= \omega \left( \text{Rhom}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \text{Cplx}(\mathcal{T}))}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T}, S}(X), \mathbf{R}\Omega^\infty \mathbf{R}f_*(M(-r))) \right) \\
&= \omega \left( \text{Rhom}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \text{Cplx}(\mathcal{T}))}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T}, S}(X), \mathbf{R}f_* \mathbf{R}\Omega^\infty(M(-r))) \right) \\
&= \omega \left( \text{Rhom}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \text{Cplx}(\mathcal{T}))}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathbf{L}f^* \mathbf{y}_{\mathcal{T}, S}(X), \mathbf{R}\Omega^\infty(M(-r))) \right) \\
&= \omega \left( \text{Rhom}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \text{Cplx}(\mathcal{T}))}^{\text{Cplx}(\mathcal{T})}(\mathbf{y}_{\mathcal{T}, T}(X \times_S T), \mathbf{R}\Omega^\infty(M(-r))) \right) \\
&= \text{Rhom}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}')))}^{\text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))}(\mathbf{y}_{\mathbf{K}', T}(X \times_S T), \omega^* \mathbf{R}\Omega^\infty(M(-r))) \\
&= \text{Rhom}_{\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\downarrow\mathcal{S}, \text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}')))}^{\text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))}(\mathbf{y}_{\mathbf{K}', S}(X), \mathbf{R}f_* \omega^* \mathbf{R}\Omega^\infty(M(-r))) \\
&= \text{Rhom}_{\text{Sp}_{\mathbf{K}'(1)}^\mathcal{E}(\mathcal{S}, \mathbf{K}')}^{\text{Cplx}(\text{Mod}(\mathbf{K}'))}(\mathbf{y}_{\mathbf{K}'}(X)(r), \mathbf{R}f_* \omega^* M).
\end{aligned}$$

On considère dès lors un schéma  $S \in \text{ob}(\text{Sch}\downarrow\mathbf{B})$  et un  $\mathcal{U}$ -petit système projectif  $\alpha \mapsto S_\alpha : A \rightarrow \text{Sch}\downarrow\mathbf{B}$  à morphismes de transition affines tels que  $S = \lim_{\alpha \in A} S_\alpha$ . Soient  $V \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ ,  $\alpha_0 \in A$  et  $M_{\alpha_0} \in \text{ob}(\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(S_{\alpha_0}))$  et notons  $M$  et  $M_\alpha$  les images inverses de  $M_{\alpha_0}$  sur  $S$  et sur  $S_\alpha$  pour tout  $\alpha \geq \alpha_0$ , respectivement. Il faut montrer que le morphisme canonique

$$\text{colim}_{\alpha \geq \alpha_0} \text{hom}_{\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(S_\alpha)}(V \odot_{\text{Sp}^\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\mathcal{T}, S_\alpha}(r), M_\alpha) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(S)}(V \odot_{\text{Sp}^\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\mathcal{T}, S}(r), M)$$

est inversible. Les foncteurs  $V^\vee \odot_{\text{Sp}^\mathcal{E}}(-)$  et  $(-)(-r)$  commutant aux images inverses, il suffit par adjonction de montrer que le morphisme canonique

$$\text{colim}_{\alpha \geq \alpha_0} \text{hom}_{\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(S_\alpha)}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}, S_\alpha}, M_\alpha) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(S)}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}, S}, M)$$

est inversible. Notons  $f_\alpha : S_\alpha \rightarrow S_{\alpha_0}$  et  $f : S \rightarrow S_{\alpha_0}$  les morphismes de transition pour  $\alpha \geq \alpha_0$ .

Alors ce morphisme s'identifie à

$$\begin{array}{c}
\operatorname{colim}_{\alpha \geq \alpha_0} \operatorname{hom}_{\mathcal{SH}_{\mathcal{K}}(S_{\alpha_0})} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{I}, S_{\alpha_0}}, \mathbf{R}f_{\alpha*} M_{\alpha} \right) \\
\downarrow \sim \\
\operatorname{hom}_{\mathcal{SH}_{\mathcal{K}}(S_{\alpha_0})} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{I}, S_{\alpha_0}}, \operatorname{Lcolim}_{\alpha \geq \alpha_0} \mathbf{R}f_{\alpha*} M_{\alpha} \right) \\
\downarrow \\
\operatorname{hom}_{\mathcal{SH}_{\mathcal{K}}(S_{\alpha_0})} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{I}, S_{\alpha_0}}, \mathbf{R}f_* M \right).
\end{array}$$

Il suffit donc de montrer que le morphisme canonique  $\operatorname{Lcolim}_{\alpha \geq \alpha_0} \mathbf{R}f_{\alpha*} M_{\alpha} \rightarrow \mathbf{R}f_* M$  est un isomorphisme, ou encore que son image par  $\omega^*$  en est un, puisque  $\omega^*$  est conservatif (1.6.11). Comme  $\omega^*$  préserve les colimites homotopiques et commute aux foncteurs  $\mathbf{R}g_*$ , cela résulte de la continuité de  $\mathcal{SH}_{\mathcal{K}}(-)$  par adjonction.  $\square$

**Proposition 2.2.23.** *Supposons que  $\mathbf{B} = \operatorname{Spec}(\kappa)$ , où  $\kappa$  est un corps parfait. Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie de  $\mathfrak{A}$ -modèles  $\mathfrak{A}$ -combinatoire,  $\mathcal{S}m$ -prémotivique sur  $\operatorname{Sch} \downarrow \mathbf{B}$  dont la catégorie homotopique  $\operatorname{ho}(\mathcal{M})$  est une catégorie motivique  $\mathbf{Q}$ -linéaire, séparée,  $\tau$ -continue et  $\tau$ -compatible ([CD12b, 4.2.20]) pour une famille  $\tau$  de twists homotopiquement fortement dualisables stable par twists de Tate négatifs. On suppose de plus que  $\operatorname{ho}(\mathcal{M})$  admet une  $\mathfrak{A}$ -petite famille homotopiquement génératrice d'objets homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentables et que  $\mathbf{R}f_*$  commute aux twists dans  $\tau$  pour tout  $f \in \operatorname{mor}(\operatorname{Sch} \downarrow \mathbf{B})$  projectif. Alors, pour tous  $X \in \operatorname{ob}(\operatorname{Sch} \downarrow \mathbf{B})$ ,  $M \in \operatorname{ob}(\operatorname{ho}(\mathcal{M})(X))$ , il existe une immersion ouverte dense  $j : U \hookrightarrow X$  dans  $\operatorname{Sch} \downarrow \mathbf{B}$  telle que  $j^*M$  soit homotopiquement fortement dualisable.*

*Démonstration.* Quitte à rétrécir  $X$ , on peut supposer que  $X$  est lisse sur  $\mathbf{B}$ . Par suite, on peut supposer que  $X$  est lisse sur  $\mathbf{B}$  et irréductible. Comme  $\operatorname{ho}(\mathcal{M})$  est séparée, on peut supposer que  $X$  est réduit et donc intègre ([CD12b, 2.1.9]). Soit  $\eta \in X$  le point générique. Alors  $\mathcal{O}_{X, \eta} = \kappa(\eta)$  est un corps. On note  $\kappa(\eta)^{\operatorname{perf}}$  la clôture parfaite de  $\kappa(\eta)$  et  $\beta : \operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\operatorname{perf}}) \rightarrow \operatorname{Spec}(\kappa(\eta))$  le morphisme canonique. D'après [CD12b, 4.3.15],  $\mathbf{L}\beta^* : \operatorname{ho}(\mathcal{M})(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta))) \rightarrow \operatorname{ho}(\mathcal{M})(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\operatorname{perf}}))$  est une équivalence de catégories triangulées, monoïdales symétriques.

D'après [CD12b, 4.2.29], si  $j_{\eta} : \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X, \eta}) \rightarrow X$  désigne le morphisme canonique, alors  $\mathbf{L}j_{\eta}^* M$  est homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentable. Par suite,  $\mathbf{L}\beta^* \mathbf{L}j_{\eta}^* M$  est homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentable dans  $\operatorname{ho}(\mathcal{M})(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\operatorname{perf}}))$ . D'après [CD12b, 4.4.3], la catégorie triangulée  $\operatorname{ho}(\mathcal{M})(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\operatorname{perf}}))$  est engendrée par les objets de la forme  $\mathbf{R}f_*(\mathbf{1}_{\mathcal{M}(Y)}\{n\})[r] \cong (\mathbf{R}f_* \mathbf{1}_{\mathcal{M}(Y)})\{n\}[r]$ , où  $f : Y \rightarrow \operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\operatorname{perf}})$  est un morphisme projectif lisse et  $r \in \mathbf{Z}$  et  $n \in \tau$ . Comme tout objet de cette forme est homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentable et homotopiquement fortement dualisable ([CD12b, 2.4.26, 2.4.28, 2.4.31]), on déduit du théorème de Thomason [Nee01, 4.4.9] que tout objet homotopiquement  $\mathfrak{K}_0$ -présentable de  $\operatorname{ho}(\mathcal{M})(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\operatorname{perf}}))$  est homotopiquement fortement dualisable. Par conséquent,  $\mathbf{L}\beta^* \mathbf{L}j_{\eta}^* M$  et  $\mathbf{L}j_{\eta}^* M$  sont homotopiquement fortement dualisables.

Le schéma  $\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)) = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X, \eta})$  est la limite du système projectif des ouverts non vides de  $X$  et donc  $\operatorname{ho}(\mathcal{M})_{\mathfrak{K}_0}(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)))$  est la 2-colimite filtrante des catégories  $\operatorname{ho}(\mathcal{M})_{\mathfrak{K}_0}(U)$  indexées par les ouverts non vides  $U \subseteq X$  d'après [CD12b, 4.3.4], où l'indice

$\aleph_0$  désigne les sous-catégories pleines engendrées par les objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables. Ainsi, on peut étaler le dual fort homotopique de  $\mathbf{L}j_\eta^*M$  sur un ouvert non vide  $j : U \hookrightarrow X$  et l'on obtient de cette façon un dual fort homotopique de  $j^*M$ .  $\square$

**Définition 2.2.24.** Soit  $X \in \text{ob}(\text{Sch} \downarrow \mathbf{B})$ . On appelle *stratification récursive* de  $X$  une partition finie  $\Sigma$  de  $X$  en sous-schémas localement fermés, réguliers et équidimensionnels telle que, pour toute strate  $S \in \Sigma$ , son adhérence  $\bar{S}$  dans  $X$  soit réunion de strates de  $\Sigma$ .

**Corollaire 2.2.25.** Les notations et les hypothèses sont celles de 2.2.23. Quels que soient  $X \in \text{ob}(\text{Sch} \downarrow \mathbf{B})$  et  $M \in \text{ob}(\text{ho}(\mathcal{M})(X))$  homotopiquement  $\aleph_0$ -présentable, il existe une stratification récursive  $\Sigma$  de  $X$  telle que  $\mathbf{L}h^*M$  soit homotopiquement fortement dualisable dans  $\text{ho}(\mathcal{M})(S)$  pour toute strate  $h : S \hookrightarrow X$  de  $\Sigma$ .

*Démonstration.* On procède par récurrence noethérienne. Si  $\dim(X) = 0$ , alors l'assertion résulte de 2.2.23. En général, il existe un ouvert dense  $j : U \hookrightarrow X$  tel que  $j^*M$  soit homotopiquement fortement dualisable et le complémentaire réduit  $Z := X - U$  est de dimension  $< \dim(X)$ .  $\square$

**Proposition 2.2.26.** Les notations et les hypothèses sont celles de 2.2.23. Soit  $X \in \text{ob}(\text{Sch} \downarrow \mathbf{B})$ . Pour tout  $x \in X$ , on note  $i_x : \text{Spec}(\kappa(x)) \rightarrow X$  le morphisme canonique. Alors la famille  $\{\mathbf{L}i_x^* : \text{ho}(\mathcal{M})(X) \rightarrow \text{ho}(\mathcal{M})(\text{Spec}(\kappa(x))) \mid x \in X\}$  est conservative.

*Démonstration.* Pour tout  $x \in X$ , on note  $j_x : \text{Spec}(\mathcal{O}_{x,x}) \rightarrow X$  et  $h_x : \text{Spec}(\mathcal{O}_{x,x}^h) \rightarrow X$  les morphismes canoniques, où  $\mathcal{O}_{x,x}^h$  désigne l'hensélisé de l'anneau local  $\mathcal{O}_{x,x}$ . D'après [CD12b, 4.3.9], la famille  $\{\mathbf{L}h_x^* : \text{ho}(\mathcal{M})(X) \rightarrow \text{ho}(\mathcal{M})(\text{Spec}(\mathcal{O}_{x,x}^h)) \mid x \in X\}$  est conservative. Les morphismes  $h_x$  se factorisent par les morphismes  $j_x$ , de sorte que les foncteurs  $\mathbf{L}h_x^*$  se factorisent par les foncteurs  $\mathbf{L}j_x^*$ . En particulier, si  $M \in \text{ob}(\text{ho}(\mathcal{M})(X))$  et  $\mathbf{L}j_x^*M = 0$  pour tout  $x \in X$ , alors  $\mathbf{L}h_x^*M = 0$  pour tout  $x \in X$  et la conservativité des  $\mathbf{L}h_x^*$  entraîne que  $M = 0$ . Du coup, les foncteurs  $\mathbf{L}j_x^*$ ,  $x \in X$ , forment une famille conservative. On peut supposer que  $X$  est intègre, car  $\text{ho}(\mathcal{M})$  est séparé ([CD12b, 2.1.9]). Soit  $M \in \text{ob}(\text{ho}(\mathcal{M})(X))$  tel que  $\mathbf{L}i_x^*M = 0$  pour tout  $x \in X$ . En particulier, si  $\eta \in X$  est le point générique, alors  $\mathbf{L}i_\eta^*M = \mathbf{L}j_\eta^*M = 0$ . Par continuité de  $\text{ho}(\mathcal{M})$ , il existe un ouvert dense  $j : U \hookrightarrow X$  tel que  $j^*M = 0$ . Soit  $i : Z := X - U \hookrightarrow X$  l'immersion fermée complémentaire induite réduite. Comme  $\text{ho}(\mathcal{M})$  vérifie la propriété de localisation, le couple  $(j^*, \mathbf{L}i^*)$  est conservatif. Il suffit donc de montrer que  $\mathbf{L}i^*M = 0$ . Par récurrence noethérienne, on se ramène au cas où  $\dim(X) = 0$ , où l'assertion est évidente.  $\square$

## 2.3 STRUCTURES DE POIDS

*Notation 2.3.0.* Dans ce numéro, on fixe les données suivantes :

- (i) un corps parfait  $\kappa$  et son spectre  $\mathbf{B} := \text{Spec}(\kappa)$ ;
- (ii) une  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte  $E_{\mathbf{B}} \in \text{ob}(\mathcal{C}\text{Alg}(\mathcal{P}\text{Sh}(\text{Sm}\text{Aff} \downarrow \mathbf{B}, \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{T}))))$ ; et
- (iii) un monoïde commutatif cofibrant  $\mathcal{E}_{\mathbf{B}} \in \text{ob}(\mathcal{C}\text{Alg}(\text{Sp}_{1_{\mathcal{T}}^{\mathcal{S}}}(\mathbf{B}, \mathcal{T})))$  qui représente  $E_{\mathbf{B}}$ .

On suppose que  $E_{\mathbf{B}}$  vérifie la condition suivante :

(W6) Pour tous  $X \in \text{ob}(\text{Sm}\text{Aff} \downarrow \mathbf{B})$ ,  $r, s \in \mathbf{Z}$ , si  $2r < s$ , alors  $\text{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{T})}(\mathbf{1}_{\mathcal{T}}, E_{\mathbf{B}}(X)(r)_E[s]) = 0$ .

Avec la notation de 2.2.13, cette condition équivaut à la suivante :

(W6') Pour tous  $X \in \text{ob}(\text{Sm}\text{Aff} \downarrow \mathbf{B})$ ,  $r, s \in \mathbf{Z}$ , si  $2r < s$ , alors  $\text{hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\text{abs},X})}(\mathcal{E}_{\text{abs},X}, \mathcal{E}_{\text{abs},X}(r)[s]) = 0$ .

*Résumé.* Dans ce numéro, on vérifie que, sous une certaine condition sur la  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte satisfaite, par exemple, par celle de 2.1.8, les catégories  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\text{abs},(-)})$  admettent une structure de poids compatible à celle sur  $\mathcal{DM}_{\mathbb{B}}(X)$  et aux six opérations de Grothendieck. Les preuves, essentiellement identiques à celles de D. Hébert pour la structure de poids sur  $\mathcal{DM}_{\mathbb{B}}(X)$  ([Héb11, 3.3, 3.7]), sont omises.

On rappelle la définition suivante.

**Définition 2.3.1** ([Bon10, 1.1.1]). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie triangulée. Une **structure de poids** sur  $\mathcal{C}$  est la donnée d'un couple  $(\mathcal{C}^{\leq_w 0}, \mathcal{C}^{\geq_w 0})$  de sous-catégories pleines de  $\mathcal{C}$  vérifiant les conditions suivantes :

- (i) Les sous-catégories  $\mathcal{C}^{\leq_w 0}$  et  $\mathcal{C}^{\geq_w 0}$  de  $\mathcal{C}$  sont stables par rétractes.
- (ii) La sous-catégorie  $\mathcal{C}^{\leq_w 0}$  (resp.  $\mathcal{C}^{\geq_w 0}$ ) est stable par l'endofoncteur  $(-)[-1]$  (resp.  $(-)[1]$ ).
- (iii) On a  $\mathcal{C}^{\leq_w 0} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{C}^{\geq_w 0})$ .
- (iv) Pour tout  $M \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , il existe un triangle distingué

$$A \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow A[1]$$

de  $\mathcal{C}$  tel que  $A \in \text{ob}(\mathcal{C}^{\leq_w 0})$  et  $B[-1] \in \text{ob}(\mathcal{C}^{\geq_w 0})$ .

On appelle **w-catégorie** une catégorie triangulée munie d'une structure de poids. On dira qu'un foncteur triangulée  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  entre **w-catégories** est **w-négatif** (resp. **w-positif**) si  $f$  envoie  $\mathcal{C}^{\leq_w 0}$  dans  $\mathcal{C}'^{\leq_w 0}$  (resp.  $\mathcal{C}^{\geq_w 0}$  dans  $\mathcal{C}'^{\geq_w 0}$ ).

**Théorème 2.3.2** ([Héb11, 3.3]). Soit  $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$ .

- (i) Il existe une unique structure de poids  $(\mathcal{D}^{\leq_w 0}(\mathcal{E}_{\text{abs},X}), \mathcal{D}^{\geq_w 0}(\mathcal{E}_{\text{abs},X}))$  sur  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\text{abs},X})$  telle que  $\mathbf{R}f_* \mathcal{E}_{\text{abs},Y}(r)[2r] \in \text{ob}(\mathcal{D}^{\leq_w 0}(\mathcal{E}_{\text{abs},X}))$  pour tous  $r \in \mathbf{Z}$ ,  $(f : Y \rightarrow X) \in \text{mor}(\mathcal{S})$  projectif avec  $Y$  régulier.
- (ii) La structure de poids de (i) en induit une sur  $\mathcal{D}_{\mathbb{X}_0}(\mathcal{E}_{\text{abs},X})$  par restriction.
- (iii) Le cœur  $\mathcal{D}_{\mathbb{X}_0}^{\leq_w 0}(\mathcal{E}_{\text{abs},X}) := \mathcal{D}_{\mathbb{X}_0}^{\leq_w 0}(\mathcal{E}_{\text{abs},X}) \cap \mathcal{D}_{\mathbb{X}_0}^{\geq_w 0}(\mathcal{E}_{\text{abs},X})$  est la plus petite sous-catégorie pleine de  $\mathcal{D}_{\mathbb{X}_0}(\mathcal{E}_{\text{abs},X})$  contenant les objets  $\mathbf{R}f_* \mathcal{E}_{\text{abs},Y}(r)[2r]$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ ,  $(f : Y \rightarrow X) \in \text{mor}(\mathcal{S})$  projectif avec  $Y$  régulier, stable par  $\mathcal{U}$ -petits coproduits finis et par rétractes.

*Démonstration.* La démonstration de [Héb11, 3.3] s'applique *mutatis mutandis*. En particulier, l'axiome (W6) de 2.3.0 remplace la condition  $K_n(\mathcal{S}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = 0$  pour  $n \in \mathbf{Z}_{<0}$  et  $\mathcal{S} \in \text{ob}(\mathcal{S})$  régulier rappelée dans [Héb11, §2, 7]. Grâce à notre hypothèse de projectivité, il n'est pas nécessaire d'établir l'analogie de [Héb11, 3.1].  $\square$

**Théorème 2.3.3** ([Héb11, 3.7]). Soit  $(f : X \rightarrow Y) \in \text{mor}(\mathcal{S})$ . On munit  $\mathcal{D}_{\mathbb{X}_0}(\mathcal{E}_{\text{abs},X})$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{X}_0}(\mathcal{E}_{\text{abs},Y})$  des structures de poids de 2.3.2.

- (i) Les foncteurs  $\mathbf{L}f^*$  et  $f_!$ , ainsi que  $\mathbf{L}f_{\#}$  lorsque  $f$  est lisse, sont **w-négatifs**.
- (ii) Les foncteurs  $\mathbf{R}f_*$  et  $f^!$ , ainsi que  $f^*$  lorsque  $f$  est lisse, sont **w-positifs**.
- (iii) Le bifoncteur  $\otimes_{\mathcal{E}}^{\mathbf{L}}$  (resp.  $\mathbf{R}\underline{\text{hom}}_{\mathcal{E}}$ ) est **w-négatif** (resp. **w-positif**).
- (iv) Pour tout  $r \in \mathbf{Z}$ , l'endofoncteur  $(-)(r)[2r]$  est **w-négatif** et **w-positif**.
- (v) L'involution de Verdier  $\mathbf{D}_X$  est **w-négative** et **w-positive**.

*Démonstration.* La preuve de [Héb11, 3.7] s'applique telle quelle.  $\square$

**Corollaire 2.3.4.** Soit  $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$ . Le foncteur  $\mathcal{E}_{\text{abs},X} \otimes_{\mathbb{H}_{\mathbb{B},X}}^{\mathbb{L}} (-) : \mathcal{DM}_{\mathbb{B},\kappa_0}(X) \rightarrow \mathcal{D}_{\kappa_0}(\mathcal{E}_{\text{abs},X})$  est  $\mathfrak{w}$ -négatif et  $\mathfrak{w}$ -positif par rapport aux structures de poids de [Héb11, 3.3] et 2.3.2.

*Démonstration.* Rappelons que  $\mathcal{E}_{\text{abs},X}$  est bien une  $\mathbb{H}_{\mathbb{B},X}$ -algèbre d'après 2.2.20. D'après [CD12b, 4.4.25], le morphisme de catégories motiviques  $\mathcal{E}_{\text{abs},(-)} \otimes_{\mathbb{H}_{\mathbb{B}}}^{\mathbb{L}} (-)$  commute aux six opérations de Grothendieck. Il suffit d'appliquer la remarque [Héb11, 3.5].  $\square$

### 3 COEFFICIENTS DE DE RHAM

*Notation 3.0.0.* Dans ce chapitre, on fixe les données suivantes :

- (i) un  $\mathcal{U}$ -corps  $\kappa$  de caractéristique nulle et son spectre  $\mathbf{B} := \text{Spec}(\kappa)$  ;
- (ii) pour tout  $\mathcal{U}$ -schéma  $S$ , la catégorie  $\text{Sch}^{\text{qproj}} \downarrow S$  des  $S$ -schémas quasi-projectifs et la catégorie  $\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow S$  des  $S$ -schémas quasi-projectifs, lisses ;
- (iii) pour tout  $S \in \text{ob}(\text{Sch}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$  régulier, le faisceau Zariski de  $\mathcal{O}_S$ -modules quasi-cohérent  $\mathcal{D}_{S/\kappa}$  défini dans, par exemple, [Bor87, VI, 1.2], et les catégories  $\mathcal{L}\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  et  $\mathcal{R}\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  des  $\mathcal{D}_{S/\kappa}$ -modules quasi-cohérents à gauche et à droite, respectivement.

*Résumé.* Dans le chapitre précédent, on a vérifié que les constructions de D.-C. Cisinski et F. Déglise [CD12b] fournissent un formalisme des six opérations de Grothendieck canoniquement associée à toute  $\mathcal{T}$ -théorie de Weil mixte. Dans les cas des cohomologies de Weil classiques, ces constructions sont précédées historiquement d'autres notions de coefficients constructibles, telles que les catégories  $\mathcal{D}_c^b(X(\mathbf{C})^{\text{an}}, \mathbf{Q})$ ,  $\mathcal{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$ ,  $\mathcal{D}_h^b(\mathcal{D}_{X/\mathbf{C}})$ ,  $\mathcal{D}^b(\mathcal{M}\mathcal{H}\mathcal{M}(X))$ , et il n'est pourtant pas évident du tout en général quel lien pourrait exister entre la nouvelle construction et son analogue classique. Dans [CD12b, 17.1.7], on trouve un foncteur de comparaison dans le cas de la cohomologie de Betti. Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas de la cohomologie de De Rham algébrique.

Dans §3.1, on rappelle quelques définitions de la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules holonomes et l'on raffine la théorie des six opérations dans ce contexte en la transposant au cadre des  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques. Dans §3.2, on rappelle quelques notions d'équivalence faible dues à L. Positselski et l'on étudie le comportement de la formule de Künneth en cohomologie de De Rham algébrique par rapport à ces équivalences faibles. Dans §3.3, on construit un foncteur de réalisation de  $\mathcal{S}\mathcal{H}_{X_0}(X)$  à valeurs dans  $\mathcal{D}_h^b(\mathcal{D}_{X/\kappa})$ , la catégorie dérivée bornée, holonome des  $\mathcal{D}_{X/\kappa}$ -modules quasi-cohérents pour  $X$  quasi-projectif, lisse sur  $\kappa$  un corps de caractéristique nulle. Si  $\mathcal{E}_{\text{dR}, X}$  est le spectre de Tate sur  $X$  associé à la cohomologie de De Rham algébrique, alors on vérifie que  $\mathcal{D}_{\kappa_0}(\mathcal{E}_{\text{dR}, X})$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{D}_h^b(\mathcal{D}_{X/\kappa})$ . Comme corollaire, on en déduit dans §3.4 une correspondance de Riemann-Hilbert.

#### 3.1 $\mathcal{D}$ -MODULES HOLONOMES

*Notation 3.1.0.* Dans ce numéro, on fixe un morphisme  $(f : T \rightarrow S) \in \text{mor}(\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$ .

**Définition 3.1.1.**

- (i) La  $(\infty, 1)$ -catégorie  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^\infty(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  des  $\mathcal{D}_{S/\kappa}$ -modules quasi-cohérents est celle associée à la catégorie avec équivalences faibles  $(\text{Cplx}(\mathcal{L}\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{D}_{S/\kappa})), \mathcal{Q}\text{Iso})$ , où  $\mathcal{Q}\text{Iso}$  désigne la classe des quasi-isomorphismes.
- (ii) On note  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b}, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  la sous- $(\infty, 1)$ -catégorie pleine de  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^\infty(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  engendrée par les complexes à cohomologie bornée. Elle est stable par  $(\infty, 1)$ -colimites finies et contient l'objet nul, de sorte qu'elle est stable.
- (iii) On note  $\mathcal{D}_h^{\text{b}, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) \subseteq \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b}, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  la sous- $(\infty, 1)$ -catégorie pleine engendrée par les complexes à cohomologie holonome ([Bor87, VI, 1.12]).
- (iv) On notera  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$ ,  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$ ,  $\mathcal{D}_h^{\text{b}}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  les catégories homotopiques des  $(\infty, 1)$ -catégories  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^\infty(\mathcal{D}_{S/\kappa})$ ,  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b}, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  et  $\mathcal{D}_h^{\text{b}, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$ , respectivement.

*Remarque 3.1.2.*

(i) D'après [Bek00, 3.13], la catégorie homotopique de cette  $(\infty, 1)$ -catégorie stable est localement  $\mathcal{U}$ -petite et il en résulte que  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  est aussi localement  $\mathcal{U}$ -petite.

(ii) La  $(\infty, 1)$ -catégorie  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  est équivalente à la  $(\infty, 1)$ -catégorie associée à la catégorie avec équivalences faibles  $(\text{Cplx}(\mathcal{R}\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{D}_{S/\kappa})), \mathcal{Q}\text{Iso})$  d'après [Bor87, VI, 3.3]. On fera l'abus de ne pas distinguer entre les deux.

**Définition 3.1.3.** D'après [Bor87, VI, 2.6],  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  est équivalente à la sous- $(\infty, 1)$ -catégorie pleine engendrée par les complexes bornés à composantes  $\mathcal{O}_S$ -plates. Les arguments de [Bor87, VI, §4] impliquent qu'il existe un  $(\infty, 1)$ -foncteur d'*image inverse exceptionnelle*  $f^! : \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{T/\kappa})$  qui préserve les  $(\infty, 1)$ -colimites finies et que, si  $(g : X \rightarrow T) \in \text{mor}(\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$ , alors il existe une équivalence naturelle  $g^! f^! \simeq (f g)^!$  de  $(\infty, 1)$ -foncteurs vérifiant une condition de cocycle à homotopie près<sup>13</sup>. Au niveau des catégories homotopiques et en oubliant les actions de  $\mathcal{D}_{S/\kappa}$  et de  $\mathcal{D}_{T/\kappa}$ ,  $f^!$  s'identifie à  $f^\dagger[\dim(T) - \dim(S)]$ , où  $f^\dagger$  désigne le foncteur d'image inverse de complexes de  $\mathcal{O}$ -modules quasi-cohérents. Signalons qu'ici et dans la suite on entend par  $\dim(T)$  et  $\dim(S)$  des fonctions localement constantes sur les  $\kappa$ -schémas lisses de type fini  $T$  et  $S$ , respectivement. D'après [Bor87, VII, 10.1(iii)],  $f^\dagger$  et  $f^!$  induisent des  $(\infty, 1)$ -foncteurs  $\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{T/\kappa})$ .

**Définition 3.1.4.** Le foncteur d'image directe dans la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules est le composé d'un foncteur dérivé droit et d'un foncteur dérivé gauche. Par conséquent, il n'est pas manifestement le dérivé au sens classique d'un foncteur défini au niveau des complexes de  $\mathcal{D}$ -modules. On peut néanmoins définir un  $(\infty, 1)$ -foncteur d'*image directe*

$$f_* : \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{T/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$$

en appliquant les raisonnements de [Bor87, VI, §5]. Effectivement, c'est l'un des grands avantages des  $(\infty, 1)$ -foncteurs par rapport aux foncteurs de Quillen. C'est un  $(\infty, 1)$ -foncteur exact et l'on déduit de [Bor87, VII, 10.1(ii)] que  $f_*$  induit un  $(\infty, 1)$ -foncteur exact  $\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{T/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  que l'on notera toujours  $f_*$ .

Il reste la question de l'existence d'une équivalence naturelle  $(f g)_* \simeq f_* g_*$  de  $(\infty, 1)$ -foncteurs vérifiant une condition de cocycle à homotopie près lorsque  $(g : X \rightarrow T) \in \text{mor}(\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$ . D'après [Bor87, VI, 6.4], une telle équivalence naturelle existe au niveau des catégories homotopiques, mais l'auteur ne sait pas en déduire une équivalence naturelle de  $(\infty, 1)$ -foncteurs. Pour répondre à cette question, signalons que cette compatibilité à la composition se simplifie si l'on travaille avec la  $(\infty, 1)$ -catégorie associée à la catégorie avec équivalences faibles  $(\text{Mod}(\Omega_{S/\kappa}^\cdot), \mathcal{W}_{\text{co}})$ , où  $\text{Mod}(\Omega_{S/\kappa}^\cdot)$  désigne la catégorie des  $\text{dg-}\Omega_{S/\kappa}^\cdot$ -modules quasi-cohérents et où  $\mathcal{W}_{\text{co}}$  désigne la classe des morphismes à cône cocyclique ([Pos11, 3.3]). On renvoie à [Pos11, B.2] et à [BD00, 7.2.10, 7.3.10] pour les détails, mais explicitons brièvement la situation. Comme on le rappellera dans 3.3.1, la  $(\infty, 1)$ -catégorie stable  $\mathcal{D}_{\text{co}}^{\infty}(\Omega_{X/\kappa}^\cdot)$  associée à  $(\text{Mod}(\Omega_{S/\kappa}^\cdot), \mathcal{W}_{\text{co}})$  est équivalente à  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  d'après un résultat de L. Positselski. Par ailleurs, A. Beilinson et V. Drinfel'd montrent que le morphisme  $f$  induit un  $(\infty, 1)$ -foncteur exact  $f_* : \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\infty}(\Omega_{T/\kappa}^\cdot) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\infty}(\Omega_{S/\kappa}^\cdot)$  qui induit un

13. On tient à ce que « à homotopie près » ne veut pas dire la même chose qu'« à homotopie cohérente près ». Autrement dit, il faut travailler plus pour montrer que cette construction fournit une fibration cartésienne de  $(\infty, 1)$ -catégories ([Lur09a, §2.4]). Cependant, on a bien un pseudo-foncteur  $\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa \rightarrow \text{Cat}$  associant au  $\kappa$ -schéma quasi-projectif lisse  $S$  la catégorie homotopique  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  de  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  et au morphisme  $f$  le foncteur induit  $f^! : \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{T/\kappa})$ .

foncteur isomorphe à  $f_* : \mathcal{D}_{\text{qcoh}}(\mathcal{D}_{T/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{qcoh}}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  sur les catégories homotopiques via l'équivalence de L. Positselski. Or le foncteur  $f_* : \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^\infty(\Omega_{T/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^\infty(\Omega_{S/\kappa})$  est le foncteur d'image directe d'un morphisme de sites dg-annelés, d'où la compatibilité à la composition voulue.

**Définition 3.1.5.** D'après [Bor87, VI, 3.6, 3.7], il existe une involution

$$\mathbf{D}_S : \mathcal{D}_h^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_h^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\text{op}},$$

dite *de Verdier*.

D'après [Bor87, VII, 10.2], le  $(\infty, 1)$ -foncteur composé, dit d'*image directe exceptionnelle* ou d'*image directe à support propre*,  $f_! := \mathbf{D}_S f_* \mathbf{D}_T : \mathcal{D}_h^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{T/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_h^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  est adjoint à gauche de  $f^!$  et il existe une  $(\infty, 1)$ -transformation naturelle  $f_! \rightarrow f_*$  qui est une équivalence lorsque  $f$  est propre.

Dualement, le  $(\infty, 1)$ -foncteur composé, dit d'*image inverse*,

$$f^* := \mathbf{D}_T f^! \mathbf{D}_S : \mathcal{D}_h^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_h^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{T/\kappa})$$

est adjoint à gauche de  $f_*$ . Si  $f$  est lisse de dimension relative pure  $d$ , alors il existe une équivalence naturelle  $f^*[-2d] \simeq f^!$  d'après [Bor87, VII, 9.14] et  $f^*$  est donc adjoint à droite de  $f_! := f_![2d]$ .

Comme  $f_*$  et  $f^!$  sont compatibles à la composition à homotopie près, il en est de même de leurs adjoints  $f^*$  et  $f_!$ .

**Définition 3.1.6.** D'après [Bor87, VI, 2.6, 3.4] et [Rob13, 3.2.2], le produit tensoriel  $\otimes_S^\dagger$  sur la catégorie des  $\mathcal{D}_{S/\kappa}$ -modules, c'est-à-dire le produit tensoriel des  $\mathcal{O}$ -modules sous-jacents, permet d'étendre  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  en une  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\otimes^\dagger}$ . On notera  $\mathbf{1}_S^\dagger$  l'unité de cette structure monoïdale. Concrètement, c'est le complexe donné par  $\mathcal{O}_S$  en degré 0.

Il nous sera commode de décaler le produit tensoriel  $\otimes_S^\dagger$  en posant  $K \otimes_S^\dagger L := (K \otimes_S^\dagger L)[- \dim(S)]$ . On note  $\mathbf{1}_S^\dagger := \mathbf{1}_S^\dagger[\dim(S)]$  l'unité de la structure monoïdale associée à  $\otimes_S^\dagger$  et  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\otimes^\dagger}$  la  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique associée à ce produit tensoriel décalé. L'intérêt de ce décalage est le suivant :  $f^\dagger$  induit un  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\otimes^\dagger} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{T/\kappa})^{\otimes^\dagger}$  et  $f^!$  induit un  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\otimes^\dagger} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{T/\kappa})^{\otimes^\dagger}$ . En effet,  $f^\dagger$  et  $\otimes^\dagger$  sont les foncteurs d'image inverse et de produit tensoriel de  $\mathcal{O}$ -modules, respectivement. On appelle  $\otimes^\dagger$  et  $\otimes^!$  les bifoncteurs de  $\dagger$ -*produit tensoriel* et de *produit tensoriel exceptionnel*, respectivement.

Pour tous  $S, S' \in \text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa$ , les produits tensoriels « internes » induisent les produits tensoriels *externes*

$$\boxtimes_{S,S'}^\dagger, \boxtimes_{S,S'}^! : \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) \times \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S'/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{(S \times_\kappa S')/\kappa})$$

définis par

$$K \boxtimes_S^\dagger L := \pi_S^\dagger K \otimes_{S \times_\kappa S'}^\dagger \pi_{S'}^\dagger L, \quad \text{et} \quad K \boxtimes_S^! L := \pi_S^! K \otimes_{S \times_\kappa S'}^! \pi_{S'}^! L,$$

où  $\pi_S : S \times_\kappa S' \rightarrow S$  et  $\pi_{S'} : S \times_\kappa S' \rightarrow S'$  désignent les projections canoniques. Si l'on note  $\Delta : S \hookrightarrow S \times_\kappa S$  l'immersion diagonale, alors on des équivalences naturelles

$$(3.1.6.1) \quad (-) \otimes_S^\dagger (-) \simeq \Delta^\dagger((-) \boxtimes_{S,S}^\dagger (-)) \quad \text{et} \quad (-) \otimes_S^! (-) \simeq \Delta^!((-) \boxtimes_{S,S}^! (-)),$$

parce que  $\Delta^\dagger$  est  $\Delta^!$  sont monoïdaux symétriques forts par rapport à  $\otimes_{S \times_\kappa S}^\dagger$  et  $\otimes_{S \times_\kappa S}^!$ , respectivement. Si  $M$  et  $N$  sont des modules cohérents sur  $\mathcal{D}_{S/\kappa}$  et  $\mathcal{D}_{S'/\kappa}$ , respectivement, alors le support singulier ([Bor87, VI, 1.9]) du  $\mathcal{D}_{(S \times_\kappa S')/\kappa}$ -module à gauche  $M \boxtimes_{S, S'}^\dagger N$  est le produit des supports singuliers de  $M$  et  $N$ . On en déduit que  $\boxtimes_{S, S'}^\dagger$  et  $\boxtimes_{S, S'}^!$  préservent les complexes bornés à cohomologie holonome. De plus, d'après [Bor87, VII, 10.1(iii)] et les équivalences naturelles de (3.1.6.1),  $\otimes_S^\dagger$  et  $\otimes_S^!$  préservent les complexes bornés à cohomologie holonome.

Le formalisme habituel des six opérations de Grothendieck comprend deux adjonctions  $f^* \dashv f_*$  et  $f_! \dashv f^!$  pour chaque morphisme de la catégorie des espaces ou des schémas  $S$  et une structure monoïdale symétrique fermée  $(\otimes_S, \underline{\text{hom}}_S, \mathbf{1}_S)$  telle que  $f^*$  soit monoïdal symétrique fort. Du coup, on ne peut pas demander qu'un foncteur de réalisation hypothétique  $\mathcal{SH}(S) \rightarrow \mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  soit monoïdal symétrique fort par rapport au produit tensoriel exceptionnel  $\otimes^!$  et qu'il commute à  $f^!$ . On est donc amené à définir une troisième  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\otimes^*}$  par rapport à laquelle le foncteur d'image inverse  $f^* : \mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{T/\kappa})$  sera monoïdal symétrique fort.

D'après [Lur12, 2.4.2.7], la  $(\infty, 1)$ -catégorie opposée  $\mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\text{op}}$  s'étend en une  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique  $(\mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\text{op}})^{\otimes^!}$  duale de  $\mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\otimes^!}$  et unique à équivalence près. L'involution de Verdier  $\mathbf{D}_S : \mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\text{op}}$  étant une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories, on peut étendre  $\mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  en une  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\otimes^*}$  telle que  $\mathbf{D}_S$  induise une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques  $\mathbf{D}_S : \mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\otimes^*} \rightarrow (\mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\text{op}})^{\otimes^!}$ . Cette structure de  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique est unique à équivalence près. On note  $\mathbf{1}_S^* := \mathbf{D}_S \mathbf{1}_S^! \cong \mathbf{1}_S^![-2 \dim(S)] \cong \mathbf{1}_S^\dagger[-\dim(S)]$  l'unité.

Pour vérifier que  $f^*$  est un  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort par rapport à  $\otimes^*$ , on remarque que

$$\begin{aligned} f^* K \otimes_T^* f^* L &= \mathbf{D}_T f^! \mathbf{D}_S(K) \otimes_T^* \mathbf{D}_T f^! \mathbf{D}_S(L) \\ &\cong \mathbf{D}_T(f^! \mathbf{D}_S(K) \otimes_T^! f^! \mathbf{D}_S(L)) \\ &\cong \mathbf{D}_T f^!(\mathbf{D}_S(K) \otimes_S^! \mathbf{D}_S(L)) \\ &\cong \mathbf{D}_T f^! \mathbf{D}_S(K \otimes_S^* L) \\ &= f^*(K \otimes_S^* L). \end{aligned}$$

La  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  est fermée, c'est-à-dire le  $(\infty, 1)$ -endofoncteur  $(-) \otimes_S^* K$  admet un adjoint à droite

$$\underline{\text{hom}}_S^*(K, -) := \mathbf{D}_S(K \otimes_S^! (-)) = \mathbf{D}_S(K \otimes_S^* \mathbf{D}_S(-))$$

pour tout objet  $K$ . Effectivement, d'après [Bor87, VII, 9.8], quels que soient  $K, L, M \in \text{ob}(\mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}))$ , si l'on note  $\pi_S : S \rightarrow \mathbf{B}$  le morphisme structural, alors on a

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})}(K, \mathbf{D}_S(L) \otimes_S^! M) &\cong \pi_{S*}(\mathbf{D}_S(K) \otimes_S^! \mathbf{D}_S(L) \otimes_S^! M) \\ &\cong \pi_{S*}(\mathbf{D}_S(K \otimes_S^* L) \otimes_S^! M) \\ &\cong \text{hom}_{\mathcal{D}_h^{b, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})}(K \otimes_S^* L, M) \end{aligned}$$

via l'identification de  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}(\mathcal{D}_{\mathbf{B}/\kappa})$  à  $\mathcal{D}(\text{Mod}(\kappa))$ . Il suffit de remarquer que deux  $(\infty, 1)$ -foncteurs  $\alpha^* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $\alpha_* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  entre  $(\infty, 1)$ -catégories stables qui préservent les

$(\infty, 1)$ -limites finies ou, de manière équivalente, les  $(\infty, 1)$ -colimites finies sont adjoints l'un de l'autre s'ils le sont au niveau des catégories homotopiques, car

$$\pi_n \operatorname{map}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \pi_0 \operatorname{map}_{\mathcal{C}}(\Sigma^n X, Y) = \operatorname{hom}_{\operatorname{ho}(\mathcal{C})}(\Sigma^n X, Y)$$

pour tous  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ ,  $X, Y \in \operatorname{ob}(\mathcal{C})$  lorsque  $\mathcal{C}$  est stable.

**Proposition 3.1.7.**

(i) Soient  $(g : X \rightarrow S) \in \operatorname{mor}(\mathcal{S}m^{\operatorname{qproj}} \downarrow \kappa)$  tel que  $X \times_S T$  soit régulier et

$$\begin{array}{ccc} X \times_S T & \xrightarrow{f'} & X \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ T & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

le carré cartésien associé dans  $\mathcal{S}$ . Alors il existe une équivalence naturelle canonique à homotopie près  $g^* f_* \rightarrow f'_* g'^*$  de  $(\infty, 1)$ -foncteurs  $\mathcal{D}_h^{\operatorname{b}, \infty}(\mathcal{D}_{T/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_h^{\operatorname{b}, \infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa})$ .

(ii) Pour tous  $K \in \operatorname{ob}(\mathcal{D}_h^{\operatorname{b}, \infty}(\mathcal{D}_{T/\kappa}))$ ,  $L \in \operatorname{ob}(\mathcal{D}_h^{\operatorname{b}, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}))$ , il existe des équivalences canoniques à homotopie près

$$f_*(K \otimes_T^! f^! L) \simeq f_* K \otimes_S^! L \quad \text{et} \quad f_! K \otimes_S^* L \simeq f_!(K \otimes_T^* f^* L).$$

(iii) Soient  $(i : Z \hookrightarrow S) \in \operatorname{mor}(\mathcal{S}m^{\operatorname{qproj}} \downarrow \kappa)$  une immersion fermée et  $j : U := S - Z \hookrightarrow S$  l'immersion ouverte complémentaire. Alors, pour tout  $K \in \operatorname{ob}(\mathcal{D}_h^{\operatorname{b}, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}))$ , les carrés

$$\begin{array}{ccc} j_! j^* K & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & i_* i^* K \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} i_* i^! K & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & j_* j^* K \end{array}$$

sont cartésiens ou, de manière équivalente, cocartésiens, où les flèches non nulles sont les unités est co-unités des  $(\infty, 1)$ -adjonctions.

*Démonstration.*

(i) Le morphisme  $\operatorname{ex}(g^*, f_*) : g^* f_* \rightarrow f'_* g'^*$  est l'adjoint du morphisme composé  $f_* \rightarrow f_* g'_* g'^* \simeq g_* f'_* g'^*$ . L'équivalence  $f_* g'_* \simeq g_* f'_*$  est unique à homotopie près d'après 3.1.4. Le carré cartésien de l'énoncé se factorise en deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} X \times_S T & \xrightarrow{i'} & X' \times_{\kappa} T & \xrightarrow{p'} & T \\ f' \downarrow & & f'' \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{i} & X' \times_{\kappa} S & \xrightarrow{p} & S, \end{array}$$

où  $g = pi$ ,  $i$  est une immersion fermée,  $X' \in \operatorname{ob}(\mathcal{S}m^{\operatorname{qproj}} \downarrow \kappa)$  et  $p$  est la projection canonique. En effet,  $g$  est quasi-projectif. D'après [SGA73, Exposé XII, 4.4] ou [CD12b, 1.1.7], à homotopie près, le morphisme naturel  $g^* f_* \rightarrow f'_* g'^*$  est compatible à la composition en  $g$ , c'est-à-dire on a un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} (pi)^* f_* & \xrightarrow{\operatorname{ex}(g^*, f_*)} & f'_*(p'i)^* \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ i^* p^* f_* & \xrightarrow{\operatorname{ex}(p^*, f_*)} i^* f''_* p'^* & \xrightarrow{\operatorname{ex}(i^*, f''_*)} f'_* i'^* p'^*. \end{array}$$

Par suite, il suffit de montrer que  $\text{ex}(p^*, f_*)$  et  $\text{ex}(i^*, f_*'')$  sont des équivalences. Le cas de la projection  $p$  est traité dans [HTT08, 1.7.3], où les auteurs traitent également du cas du morphisme de changement de base  $f_*' i^! \simeq i^! f_*''$ . On en déduit par dualité que  $\text{ex}(i^*, f_*'')$  est aussi une équivalence.

(ii) Les deux assertions sont équivalentes par dualité et la première résulte de [Bor87, VII, 9.9].

(iii) Les deux assertions sont équivalentes par dualité et la seconde résulte de [Bor87, VI, 8.3].  $\square$

*Remarque 3.1.8.* Certains auteurs prétendent que (i) et (ii) entraînent l'existence d'une équivalence naturelle canonique  $f_*' g^! \rightarrow g^! f_*$  de foncteurs  $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{T/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{X/\kappa})$  pour tout  $g \in \text{mor}(\mathcal{S})$ . Cependant, comme remarqué dans [HTT08, 1.7.6], la construction de cette équivalence « canonique » dépend *a priori* du choix d'une factorisation  $g = pi$  avec  $i$  une immersion fermée et  $p$  une projection canonique de la forme  $T' \times_{\kappa} S \rightarrow S$ ,  $T' \in \text{ob}(\mathcal{S}\text{m}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$ . En effet, on ne peut pas raisonner comme dans [SGA73, Exposé XII, 4.4] pour montrer que le morphisme de changement de base du composé  $g = pi$  est le composé des morphismes de changement de base par  $i$  et  $p$  parce que, dans la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules, le morphisme de changement de base par une immersion fermée  $i$  provient de l'adjonction  $i_* \dashv i^!$ , alors que le morphisme de changement de base par une projection  $p : T' \times_{\kappa} S \rightarrow S$  provient de l'adjonction  $p^! [2 \dim(T')] \dashv p_*$ . Comme le montre 3.1.7, si l'on se restreint aux complexes à cohomologie holonome, alors on obtient des morphismes de changement de base canoniques grâce au formalisme plus complet des six opérations de Grothendieck dans ce cadre, qui n'existe pas pour les complexes à cohomologie  $\mathcal{D}$ -cohérente.

**Proposition 3.1.9.** *Les foncteurs  $f_{\sharp}$  pour  $f$  lisse,  $f^*$ ,  $f_*$ ,  $\otimes_S^*$  et  $\underline{\text{hom}}_S^*$  font de  $\mathcal{D}_{\text{h}}^b(\mathcal{D}_{(-)/\kappa})$  une catégorie triangulée  $\mathcal{S}\text{m}$ -prémotivique sur  $\mathcal{S}\text{m}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa$  ([CD12b, 1.4.2]).*

*Démonstration.* D'après 3.1.5, les foncteurs triangulés  $f^*$  fournissent une structure de pseudo-foncteur  $\mathcal{S}\text{m}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa \rightarrow \text{Cat}$  à valeurs dans les catégories triangulées et  $f^*$  admet un adjoint à gauche  $f_{\sharp}$  lorsque  $f$  est lisse. La propriété de changement de base lisse ([CD12b, 1.1.9]) résulte de 3.1.7(i) par adjonction. On a donc une catégorie triangulée  $\mathcal{S}\text{m}$ -fibrée sur  $\mathcal{S}\text{m}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa$  ([CD12b, 1.1.10]). D'après 3.1.5,  $f^*$  admet un adjoint à droite  $f_*$ , de sorte que cette catégorie  $\mathcal{S}\text{m}$ -fibrée est complète ([CD12b, 1.1.12]). D'après 3.1.6 et 3.1.7(ii), il s'agit d'une catégorie triangulée monoïdale fermée  $\mathcal{S}\text{m}$ -fibrée ([CD12b, 1.1.27, 1.1.29]), c'est-à-dire une catégorie triangulée  $\mathcal{S}\text{m}$ -prémotivique.  $\square$

**Définition 3.1.10.** Rappelons que l'on note  $\text{Ind}(\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}))$  la  $(\infty, 1)$ -catégorie des ind-objets de  $\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  ([Lur09a, 5.3.5.1]). Elle est stable d'après [Lur12, 1.1.3.6] et localement  $\mathcal{U}$ -présentable d'après [Lur09a, 5.5.1.1]. D'après [BZN11, 3.5],  $\mathcal{D}_{\text{coh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  est idempotent-complète et il en est donc de même de la sous- $(\infty, 1)$ -catégorie pleine  $\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$  stable par rétractes. D'après [Lur09a, 5.4.2.4],  $\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) \subseteq \text{Ind}(\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}))$  est la sous- $(\infty, 1)$ -catégorie pleine engendrée par les objets  $\aleph_0$ -présentables. D'après [Lur09a, 5.3.5.10], les  $(\infty, 1)$ -adjonctions  $f^* \dashv f_*$  et  $f_{\sharp} \dashv f^!$  de 3.1.5 se prolongent en des  $(\infty, 1)$ -adjonctions entre  $\text{Ind}(\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{vb},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}))$  et  $\text{Ind}(\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{T/\kappa}))$ . De plus, les équivalences naturelles de 3.1.7 se prolongent aux ind- $(\infty, 1)$ -catégories.

D'après [Lur12, 6.3.1.13], on peut munir  $\text{Ind}(\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}))$  d'une structure de  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique  $\text{Ind}(\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}))^{\otimes^*}$  telle que le  $(\infty, 1)$ -foncteur canonique  $\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) \rightarrow \text{Ind}(\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}))$  se prolonge en un  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique

fort  $\mathcal{D}_h^{b,\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\otimes*} \rightarrow \text{Jnd} \left( \mathcal{D}_h^{b,\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) \right)^{\otimes*}$  et telle que le produit tensoriel  $\otimes_S^*$  préserve les  $\mathcal{U}$ -petites  $(\infty, 1)$ -colimites en chaque variable. De plus, cette  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique est fermée. On notera  $\underline{\text{hom}}_S^*$  le  $(\infty, 1)$ -bifoncteur de la structure fermée.

**Proposition 3.1.11.** *Les données  $\text{ho} \left( \text{Jnd} \left( \mathcal{D}_h^{b,\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) \right) \right)$ ,  $f_{\sharp}$  pour  $f$  lisse,  $f^*$ ,  $f_*$ ,  $f_!$ ,  $f^!$ ,  $\otimes_S^*$  et  $\underline{\text{hom}}_S^*$  forment une catégorie triangulée  $\text{Sm}$ -prémotivique sur  $\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa$ .*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de 3.1.9 et des remarques de 3.1.10.  $\square$

**Proposition 3.1.12.** *Soient  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ ,  $\{e_\alpha : U_\alpha \rightarrow X\}_{1 \leq \alpha \leq r} \subseteq \text{mor}(\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$  un recouvrement étale avec  $U_\alpha$  affine pour tout  $1 \leq \alpha \leq r$ ,  $e : U := \coprod_{1 \leq \alpha \leq r} U_\alpha \rightarrow X$  le morphisme induit par les  $e_\alpha$  et  $\mathbf{X}_\bullet$  le nerf de Čech de  $e$ . Alors le  $(\infty, 1)$ -foncteur canonique  $\mathcal{D}_h^{b,\infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa}) \rightarrow \lim \mathcal{D}_h^{b,\infty}(\mathcal{D}_{X_\bullet/\kappa})$  induit par  $e^! = e^*$  est une équivalence.<sup>14</sup>*

*Démonstration.* Tout d'abord, on remarque que les équivalences naturelles  $f^!g^! \simeq (fg)^!$  évoquées dans 3.1.3 vérifient une condition de cocycle à homotopie cohérente près lorsque les morphismes en question sont tous étales. Autrement dit, on dispose d'un  $(\infty, 1)$ -foncteur  $Y \mapsto \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{b,\infty}(\mathcal{D}_{Y/\kappa}) : \mathbf{N} \left( \mathcal{E}\text{t}^{\text{qproj}} \downarrow X \right)^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}^\infty$ , où  $\mathcal{E}\text{t}^{\text{qproj}} \downarrow X$  désigne la sous-catégorie pleine de  $\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow X$  engendrée par les  $X$ -schémas étales. Effectivement, pour tout morphisme étale  $f : Y \rightarrow X$ , le foncteur  $f^! : \text{Cplx} \left( \mathcal{L}\text{Mod}_{\text{qcoh}} \left( \mathcal{D}_{X/\kappa} \right) \right) \rightarrow \text{Cplx} \left( \mathcal{L}\text{Mod}_{\text{qcoh}} \left( \mathcal{D}_{Y/\kappa} \right) \right)$  est exact et se dérive trivialement. Par suite, la condition de cocycle résulte de ce que  $f^! = f^\dagger$  est l'image inverse des  $\mathcal{O}$ -modules sous-jacents. Le  $(\infty, 1)$ -foncteur  $\mathbf{N} \left( \mathcal{E}\text{t}^{\text{qproj}} \downarrow X \right)^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}^\infty$  voulu est l'image du pseudo-foncteur  $Y \mapsto \left( \text{Cplx} \left( \mathcal{L}\text{Mod}_{\text{qcoh}} \left( \mathcal{D}_{Y/\kappa} \right) \right), \mathcal{Q}\text{Iso} \right) : \left( \mathcal{E}\text{t}^{\text{qproj}} \downarrow X \right)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{W}\text{Cat}$  par le composé du foncteur de localisation simpliciale de Dwyer-Kan  $\mathcal{W}\text{Cat} \rightarrow \text{Set}_\Delta - \text{Cat}$  ([DK80, 2.1, 3.4]), où  $\mathcal{W}\text{Cat}$  désigne la 2-catégorie des catégories avec équivalences faibles, et avec le nerf simplicial  $N_\Delta : \text{Set}_\Delta - \text{Cat} \rightarrow \text{Set}_\Delta$  ([Lur09a, 1.1.5.5]). Bien entendu, il faudra éventuellement post-composer le foncteur de localisation de Dwyer-Kan avec une résolution fibrante dans la structure de modèles de Joyal sur  $\text{Set}_\Delta$  ([Lur09a, 2.2.5.1]) afin d'obtenir une quasi-catégorie, c'est-à-dire une  $(\infty, 1)$ -catégorie *stricto sensu*.

Rappelons que C. Simpson définit dans [Sim96] le **champ de De Rham**  $X_{\text{dR}} : \mathcal{C}\text{Alg}(\kappa) \rightarrow \text{Set}$  par  $X_{\text{dR}}(A) := \text{mor}_{\text{Sch} \downarrow \kappa} \left( \text{Spec}(A/\text{nil}(A)), X \right)$ , où  $\text{nil}(A)$  désigne le nilradical de  $A$ . Cette construction fournit un foncteur  $\text{Sch} \downarrow \kappa \rightarrow \mathcal{F}\text{un} \left( \mathcal{C}\text{Alg}(\kappa), \text{Set} \right)$ . On peut définir une catégorie abélienne  $\mathcal{Q}\text{Coh}(X_{\text{dR}})$  de faisceaux quasi-cohérents sur  $X_{\text{dR}}$  et, d'après [Lur09b, 0.4], il existe une équivalence  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{b,\infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa}) \simeq \mathcal{D}^{b,\infty}(\mathcal{Q}\text{Coh}(X_{\text{dR}}))$ . De plus, si  $g : X \rightarrow Y$  est un morphisme dans  $\text{Sch} \downarrow \kappa$ , alors le morphisme  $g_{\text{dR}} : X_{\text{dR}} \rightarrow Y_{\text{dR}}$  induit un  $(\infty, 1)$ -foncteur  $g_{\text{dR}}^! : \mathcal{D}^{b,\infty}(\mathcal{Q}\text{Coh}(Y_{\text{dR}})) \rightarrow \mathcal{D}^{b,\infty}(\mathcal{Q}\text{Coh}(X_{\text{dR}}))$  qui s'insère dans un diagramme commutatif de  $(\infty, 1)$ -catégories

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{b,\infty}(Y) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{D}^{b,\infty}(\mathcal{Q}\text{Coh}(Y_{\text{dR}})) \\ g^! \downarrow & & \downarrow g_{\text{dR}}^! \\ \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{b,\infty}(X) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{D}^{b,\infty}(\mathcal{Q}\text{Coh}(X_{\text{dR}})). \end{array}$$

On déduit de [GR11, 3.4.3] que  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{b,\infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa}) \simeq \lim \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{b,\infty}(\mathcal{D}_{X_\bullet/\kappa})$ . Le foncteur  $e^*$  préserve et détecte les complexes à cohomologie holonome et il en résulte que  $\mathcal{D}_h^{b,\infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa}) \simeq \lim \mathcal{D}_h^{b,\infty}(\mathcal{D}_{X_\bullet/\kappa})$ .  $\square$

14. On renvoie à [Lur09a, Chapter 4] pour la définition de la  $(\infty, 1)$ -limite d'un diagramme de  $(\infty, 1)$ -catégories.

## 3.2 FORMULE DE KÜNNETH

*Notation 3.2.0.* Dans ce numéro, sauf dans 3.2.1, on fixe un  $\kappa$ -schéma affine, lisse  $S \in \text{ob}(\text{Sm.Aff} \downarrow \kappa)$ . Pour tout  $X \in \text{ob}(\text{Sm} \downarrow \kappa)$ , on note  $\Omega_{X/\kappa}$  le complexe de De Rham de  $X$  sur  $\text{Spec}(\kappa)$ . Lorsque  $X = \text{Spec}(A)$ , on note  $\Omega_{A/\kappa}$  la complexe des sections globales de  $\Omega_{X/\kappa}$ .

On rappelle que, pour  $A \in \mathcal{C}\text{Alg}(\kappa)$ ,  $\Omega_{A/\kappa}$  est une algèbre commutative de la catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique  $\mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\kappa))$ . Cette catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique vérifie l'axiome du monoïde et [SS00, 4.1] fournit une structure de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique sur  $\text{Mod}(\Omega_{A/\kappa})$ . Sauf mention expresse du contraire,  $\text{Mod}(\Omega_{A/\kappa})$  est munie de cette structure de modèles. On note  $\mathcal{D}(\Omega_{A/\kappa})$  sa catégorie homotopique.

Si  $R$  est un  $\mathcal{U}$ -anneau commutatif,  $A = (A, d_A)$  une dg- $R$ -module et  $M = (M, d_M)$  un dg- $A$ -module, alors on notera  $A^\natural := \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} A^r$  et  $M^\natural := \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} M^r$  la  $R$ -algèbre graduée sous-jacente et le  $A^\natural$ -module gradué sous-jacent, respectivement.

**Définition 3.2.1.** Soient  $R$  un anneau commutatif, unitaire et  $A = (A, d_A)$  une dg- $R$ -algèbre dg-commutative.<sup>15</sup>

(i) On note  $\text{Mod}(A)$  la catégorie des dg- $A$ -modules, c'est-à-dire la catégorie des modules sur le monoïde commutatif  $A$  de la catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(R))$ . Évidemment,  $\text{Mod}(A)$  est une  $\mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(R))$ -catégorie.

(ii) On note  $Z^0(\text{Mod}(A))$  la catégorie dont les objets sont ceux de  $\text{Mod}(A)$  et les morphismes  $f : M \rightarrow N$  les éléments du complexe de  $R$ -modules  $\text{hom}_{\text{Mod}(A)}^{\mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(R))}(M, N)$  tels que  $d_{\text{hom}_{\text{Mod}(A)}^{\mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(R))}(M, N)} f = 0$ . C'est une catégorie abélienne de  $\mathcal{U}$ -Grothendieck.

(iii) On note  $H^0(\text{Mod}(A))$  la  $R$ -catégorie dont les objets sont ceux de  $\text{Mod}(A)$  et dont les  $R$ -modules de morphismes sont

$$\text{hom}_{H^0(\text{Mod}(A))}(M, N) := H^0 \left( \text{hom}_{\text{Mod}(A)}^{\mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(R))}(M, N) \right).$$

On dit que  $M \in \text{ob}(\text{Mod}(A))$  est **contractile** s'il est isomorphe à l'objet nul dans la catégorie  $H^0(\text{Mod}(A))$ . C'est une catégorie triangulée dans laquelle les  $\mathcal{U}$ -petites coproduits sont représentables.

(iv) Soit  $\mathcal{M} := [\dots \xrightarrow{a^{n-2}} M^{n-2} \xrightarrow{a^{n-1}} M^n \xrightarrow{a^n} M^{n+1} \xrightarrow{a^{n+1}} \dots]$  un complexe dans  $Z^0(\text{Mod}(A))$ . Alors on définit le dg- $A$ -module  $\oplus$ -**total**  $\text{tot}^\oplus(\mathcal{M})$  de la manière suivante : la composante de degré  $n \in \mathbb{Z}$  du  $R$ -module gradué sous-jacent est donné par

$$\text{tot}^\oplus(\mathcal{M})^n := \bigoplus_{r+s=n} M^{r,s},$$

la différentielle est induite par les morphismes

$$d_{\text{tot}^\oplus(\mathcal{M})} | M^{r,s} := a_r^s + (-1)^r d_{M^r}^s$$

et l'action de  $A$  est celle induite par l'action de  $A$  sur  $M^r$  pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ . On peut vérifier que ces conventions de signes font de  $\text{tot}^\oplus(\mathcal{M})$  un dg- $A$ -module. Cette construction est fonctorielle par rapport aux morphismes de complexes dans  $Z^0(\text{Mod}(A))$ . Dualement, le dg- $A$ -module  $\Pi$ -**total**  $\text{tot}^\Pi(\mathcal{M})$  est celui donné par

$$\text{tot}^\Pi(\mathcal{M})^n := \bigoplus_{r+s=n} M^{r,s}, \quad d_{\text{tot}^\Pi(\mathcal{M})} | M^{r,s} := a_r^s + (-1)^r d_{M^r}^s.$$

15. On suppose que  $A$  est dg-commutative afin d'éviter de parler de modules à gauche et à droite. Cette hypothèse n'est pas nécessaire.

(v) On dira qu'une dg-A-module à droite  $M$  est **absolument acyclique** s'il appartient à la sous-catégorie épaisse  $\text{acycl}^{\text{abs}}(A)$  de  $H^0(\mathcal{M}\text{od}(A))$  engendrée par les dg-A-modules  $\oplus$ -totaux des suites exactes courtes dans  $Z^0(\mathcal{M}\text{od}(A))$ .

(vi) On dira qu'un dg-A-module est **co-acyclique** (resp. **contra-acyclique**) s'il appartient à la plus petite sous-catégorie triangulée stable par  $\mathcal{U}$ -petits coproduits (resp.  $\mathcal{U}$ -petits produits)  $\text{acycl}^{\text{co}}(A)$  (resp.  $\text{acycl}^{\text{ctr}}(A)$ ) de  $H^0(\mathcal{M}\text{od}(A))$  engendrée par les dg-A-modules  $\oplus$ -totaux (resp.  $\Pi$ -totaux) des suites exactes courtes de  $Z^0(\mathcal{M}\text{od}(A))$ . De plus, on note  $\mathcal{W}_{\text{abs}}$  (resp.  $\mathcal{W}_{\text{co}}$ , resp.  $\mathcal{W}_{\text{ctr}}$ ) la classe des morphismes de  $Z^0(\mathcal{M}\text{od}(A))$  à cône absolument acyclique (resp. co-acyclique, resp. contra-acyclique). Ce sont des modifications de la définition classique de  $\text{acycl}(A)$ , la sous-catégorie pleine de  $H^0(\mathcal{M}\text{od}(A))$  engendré par les dg-A-modules acycliques.

(vii) On note  $\mathcal{D}_{\text{abs}}(A)$  (resp.  $\mathcal{D}_{\text{co}}(A)$ , resp.  $\mathcal{D}_{\text{ctr}}(A)$ ) la localisation de la catégorie triangulée  $H^0(\mathcal{M}\text{od}(A))$  par rapport à  $\mathcal{W}_{\text{abs}}$  (resp.  $\mathcal{W}_{\text{co}}$ , resp.  $\mathcal{W}_{\text{ctr}}$ ) et on l'appelle **catégorie dérivée absolue** (resp. **catégorie codérivée**, resp. **catégorie contradérivée**) de  $A$ . Il revient au même de quotienter  $H^0(\mathcal{M}\text{od}(A))$  par la sous-catégorie épaisse  $\text{acycl}^{\text{abs}}(A)$  (resp.  $\text{acycl}^{\text{co}}(A)$ , resp.  $\text{acycl}^{\text{ctr}}(A)$ ) et il en résulte que ces localisations sont des catégories triangulées.

(viii) On dira que  $M \in \text{ob}(\mathcal{M}\text{od}(A))$  est **plat** si  $M \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} (-)$  préserve la sous-catégorie pleine  $\text{acycl}(A)$ .

*Remarque 3.2.2.*

(i) Les définitions 3.2.1(v), (vi) et (vii) sont dues à L. Positselski [Pos11, 3.3]. On prendra garde que  $\mathcal{D}_{\text{abs}}(A)$ ,  $\mathcal{D}_{\text{co}}(A)$  et  $\mathcal{D}_{\text{ctr}}(A)$  ne sont pas localement  $\mathcal{U}$ -petites *a priori*. Dans certains cas, on peut munir  $Z^0(\mathcal{M}\text{od}(A))$  d'une structure de  $\mathcal{U}$ -modèles dont les équivalences faibles sont les morphismes à cône absolument acyclique, co-acyclique ou contra-acyclique, respectivement, mais en général ces constructions reposent sur des hypothèses de finitude sur la dg-R-algèbre  $A$ .

(ii) On s'intéressera aux dg- $\kappa$ -algèbres  $\Omega_{X/\kappa}$ , où  $X = \text{Spec}(B)$  est un  $\kappa$ -schéma affine, lisse de type fini. Dans ce cas, l'anneau gradué  $\Omega_{B/\kappa}^{\natural}$  sous-jacent à  $\Omega_{B/\kappa}$  est une B-algèbre de type fini : le B-module  $\Omega_{B/\kappa}^1$  est de type fini car B est une  $\kappa$ -algèbre de type fini et  $\Omega_{B/\kappa}^{\natural}$  est engendré par  $\Omega_{B/\kappa}^1$  en tant que B-algèbre. En particulier,  $\Omega_{B/\kappa}^{\natural}$  est un anneau gradué noethérien à gauche et à droite. D'après [Pos11, 8.3, Remark], il existe une structure de  $\mathcal{U}$ -modèles sur  $Z^0(\mathcal{M}\text{od}(\Omega_{B/\kappa}^{\natural}))$  dont les cofibrations sont les monomorphismes et dont les équivalences faibles sont les morphismes à cône co-acyclique.

(iii) Dualement, avec les notations de (ii), si de plus on suppose que  $\text{card}(\kappa) \leq \aleph_n$  avec  $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ , alors le fait que  $\Omega_{B/\kappa}^{\natural}$  soit un anneau gradué noethérien à droite et, en particulier, cohérent à droite entraîne qu'il existe une structure de  $\mathcal{U}$ -modèles sur  $Z^0(\mathcal{M}\text{od}(\Omega_{B/\kappa}^{\natural}))$  dont les cofibrations, les équivalences faibles et les fibrations sont les monomorphismes dont le  $\Omega_{B/\kappa}^{\natural}$ -module gradué sous-jacent au conoyau est projectif, les morphismes à cône contra-acyclique et les épimorphismes, respectivement, d'après [Pos11, 8.3, Remark].

(iv) Les sous-catégories  $\text{acycl}^{\text{co}}(A)$  et  $\text{acycl}^{\text{ctr}}(A)$  de  $H^0(\mathcal{M}\text{od}(A))$  sont contenues dans la sous-catégorie pleine  $\text{acycl}(A)$  engendrée par les dg-A-modules acycliques et elles contiennent  $\text{acycl}^{\text{abs}}(A)$ . En particulier, la catégorie dérivée  $\mathcal{D}(A) := H^0(\mathcal{M}\text{od}(A))/\text{acycl}(A)$  est une localisation de  $\mathcal{D}_{\text{co}}(A)$  et de  $\mathcal{D}_{\text{ctr}}(A)$  et ces dernières sont des localisations de  $\mathcal{D}_{\text{abs}}(A)$ .

**Lemme 3.2.3.** *Soit  $R$  un anneau commutatif et notons  $\mathcal{C}\text{Alg}(R)^{\geq 0}$  la catégorie des dg-R-algèbres commutatives, co-connectives, c'est-à-dire des dg-R-algèbres commutatives  $A = (A, d_A)$  telles que  $A^n = 0$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{<0}$ . Alors le foncteur  $A \mapsto \Omega_{A/R} : \mathcal{C}\text{Alg}(R) \rightarrow \mathcal{C}\text{Alg}(R)^{\geq 0}$  est*

adjoint à gauche du foncteur  $B = (B, d_B) \mapsto B^0$ . En particulier,  $A \mapsto \Omega_{A/R}^i$  préserve les colimites qui sont représentables dans  $\mathcal{CAlg}(R)$ .

*Démonstration.* Pour tous  $A \in \text{ob}(\mathcal{CAlg}(R))$ ,  $B = (B, d_B) \in \text{ob}(\mathcal{CAlg}(R)^{\geq 0})$ , on a un morphisme évident

$$\text{hom}_{\mathcal{CAlg}(R)^{\geq 0}}(\Omega_{A/R}^i, B) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{CAlg}(R)}(A, B^0).$$

Si  $f, g \in \text{hom}_{\mathcal{CAlg}(R)^{\geq 0}}(\Omega_{A/R}^i, B)$  induisent le même morphisme  $f^0 = g^0 : A = \Omega_{A/R}^0 \rightarrow B^0$ , alors

$$f^1(d_A(a)) = d_B(f^0(a)) = d_B(g^0(a)) = g^1(d_A(a))$$

pour tout  $a \in A$ . Comme l'anneau gradué sous-jacent à  $\Omega_{A/R}^i$  est engendré en tant que  $A$ -algèbre par les éléments de la forme  $d_A(a)$ ,  $a \in A$ , on a  $f = g$ . D'ailleurs, si l'on se donne  $f \in \text{hom}_{\mathcal{CAlg}(R)}(A, B^0)$ , alors  $f$  induit un morphisme de  $dg$ - $R$ -algèbres  $\tilde{f} : \Omega_{A/R}^i \rightarrow B$  uniquement déterminé par les conditions  $\tilde{f}^0 = f^0$  et  $\tilde{f}^1(d_A(a)) = d_B(\tilde{f}^0(a))$  pour tout  $a \in A$ .  $\square$

**Proposition 3.2.4.** Soient  $X = \text{Spec}(A) \in \text{ob}(\text{SmAff}\downarrow S)$  et  $R := \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ . Alors le  $\Omega_{R/\kappa}^{\natural}$ -module gradué  $\Omega_{A/\kappa}^{\natural}$  est plat à gauche et à droite.

*Démonstration.* On procède en trois étapes : le cas des  $S$ -schémas étales, celui des  $S$ -schémas de la forme  $A_S^r \rightarrow S$ ,  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  et le cas général. Soit  $(e : X \rightarrow S) \in \text{mor}(\text{SmAff}\downarrow S)$  un morphisme étale. Alors le morphisme canonique  $A \otimes_R \Omega_{R/\kappa}^1 \rightarrow \Omega_{A/\kappa}^1$  est un isomorphisme, d'où

$$\Omega_{A/\kappa}^r = \bigwedge_{\alpha=0}^r \Omega_{A/\kappa}^1 \simeq \bigwedge_{\alpha=0}^r (A \otimes_R \Omega_{R/\kappa}^1) \simeq A \otimes_R \bigwedge_{\alpha=0}^r \Omega_{R/\kappa}^1 = A \otimes_R \Omega_{R/\kappa}^r$$

pour tout  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  d'après [Mat89, Appendix C, (4)]. Du coup, on a un isomorphisme de  $\Omega_{R/\kappa}^{\natural}$ -modules gradués à droite  $\Omega_{A/\kappa}^{\natural} \simeq A \otimes_R \Omega_{R/\kappa}^{\natural}$  et ce dernier est plat, puisque  $A$  et  $R$ -plat. Le même argument montre que  $\Omega_{A/\kappa}^{\natural} \simeq \Omega_{R/\kappa}^{\natural} \otimes_R A$  est plat en tant que  $\Omega_{R/\kappa}^{\natural}$ -module gradué à gauche.

Si  $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  et que  $p : X := A_S^r \rightarrow S$  est la projection canonique, alors on a

$$\Omega_{R[t_1, \dots, t_r]/\kappa}^1 = \Omega_{(R \otimes_{\kappa} \kappa[t_1, \dots, t_r])/\kappa}^1 \cong (\Omega_{R/\kappa}^1 \otimes_{\kappa} \kappa[t_1, \dots, t_r]) \oplus (R \otimes_{\kappa} \Omega_{\kappa[t_1, \dots, t_r]/\kappa}^1)$$

d'après [Eis95, 16.5]. Par suite, on a

$$\Omega_{R[t_1, \dots, t_r]/\kappa}^{\natural} \cong \Omega_{R/\kappa}^{\natural} \otimes_{\kappa} \Omega_{\kappa[t_1, \dots, t_r]/\kappa}^{\natural} \quad \text{d'où} \quad \Omega_{R[t_1, \dots, t_r]/\kappa}^{\natural} \cong \Omega_{R/\kappa}^{\natural} \otimes_{\kappa} \Omega_{\kappa[t_1, \dots, t_r]/\kappa}^{\natural}$$

d'après [Mat89, Appendix C, Theorem C2]. Or  $\Omega_{\kappa[t_1, \dots, t_r]/\kappa}^{\natural}$  est évidemment un  $\kappa$ -module gradué plat à gauche et à droite.

Dans le cas général, le foncteur d'oubli  $\mathcal{LMod}(\Omega_{A/\kappa}^{\natural}) \rightarrow \text{Mod}(A)$  étant exact et conservatif, pour que  $\Omega_{A/\kappa}^{\natural}$  soit un  $\Omega_{R/\kappa}^{\natural}$ -module gradué à droite plat, il suffit que le foncteur  $\Omega_{A/\kappa}^{\natural} \otimes_{\Omega_{R/\kappa}^{\natural}} (-) : \mathcal{LMod}(\Omega_{R/\kappa}^{\natural}) \rightarrow \text{Mod}(A)$  soit exact. Localement sur  $X$  pour la topologie Zariski, le morphisme structural  $f : X \rightarrow S$  se factorise en  $pe$ , où  $e : Y \rightarrow A_S^r$  est un morphisme étale et  $p : A_S^r \rightarrow S$  la projection canonique. La formation des complexes de De Rham et des produits tensoriels étant compatibles à la localisation, l'assertion en résulte. Le même argument avec le foncteur  $(-) \otimes_{\Omega_{R/\kappa}^{\natural}} \Omega_{A/\kappa}^{\natural} : \mathcal{RMod}(\Omega_{R/\kappa}^{\natural}) \rightarrow \text{Mod}(A)$  montre que  $\Omega_{A/\kappa}^{\natural}$  est plat en tant que module à gauche.  $\square$

**Lemme 3.2.5.** Soient  $X = \text{Spec}(A), Y = \text{Spec}(B) \in \text{ob}(\text{SmAff} \downarrow S)$  et  $R := \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ .

- (i) Il existe un isomorphisme canonique  $\Omega_{A/\kappa} \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} \Omega_{B/\kappa} \xrightarrow{\simeq} \Omega_{(A \otimes_R B)/\kappa}$  dans  $\mathcal{CAlg}(\Omega_{R/\kappa})$ .
- (ii) Il existe un isomorphisme canonique  $\Omega_{A/\kappa} \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^L \Omega_{B/\kappa} \xrightarrow{\simeq} \Omega_{(A \otimes_R B)/\kappa}^L$  dans  $\mathcal{D}_{\text{co}}(\Omega_{R/\kappa})$ .

*Démonstration.*

(i) D'après 3.2.3, le foncteur  $C \mapsto \Omega_{C/\kappa} : \mathcal{CAlg}(\kappa) \rightarrow \mathcal{CAlg}(\kappa)^{\geq 0}$  préserve les colimites. Or  $A \otimes_R B$  est la somme amalgamée de  $A$  et  $B$  sur  $R$  dans  $\mathcal{CAlg}(\kappa)$ . De même,  $\Omega_{A/\kappa} \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} \Omega_{B/\kappa}$  est la somme amalgamée de  $\Omega_{A/\kappa}$  et  $\Omega_{B/\kappa}$  sur  $\Omega_{R/\kappa}$  dans  $\mathcal{CAlg}(\kappa)^{\geq 0}$ . Par conséquent, le morphisme canonique

$$\Omega_{A/\kappa} \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} \Omega_{B/\kappa} \rightarrow \Omega_{(A \otimes_R B)/\kappa}$$

est un isomorphisme de  $\Omega_{R/\kappa}$ -algèbres.

(ii) Précisons le sens de la notation  $\Omega_{A/\kappa} \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} \Omega_{B/\kappa}$ . L'existence de résolutions plates à cône co-acyclique est une question subtile et il ne semble pas vrai en général que tout  $\text{dg-}\Omega_{R/\kappa}$ -module admette une telle résolution. Pourtant, si  $M$  est un  $\text{dg-}\Omega_{R/\kappa}$ -module tel que  $M^{\natural}$  soit  $\Omega_{R/\kappa}^{\natural}$ -plat, alors les foncteurs  $M \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} (-)$  et  $(-) \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} M$  préservent  $\mathcal{W}_{\text{co}}$  et induisent donc des endofoncteurs de  $\mathcal{D}_{\text{co}}(\Omega_{R/\kappa})$  que l'on notera  $M \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^L (-)$  et  $(-) \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^L M$ , respectivement. D'après (i), il suffit de montrer que le morphisme canonique  $\Omega_{A/\kappa} \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^L \Omega_{B/\kappa} \rightarrow \Omega_{(A \otimes_R B)/\kappa}^L$  est un isomorphisme dans  $\mathcal{D}_{\text{co}}(\Omega_{R/\kappa})$ . D'après 3.2.4,  $\Omega_{A/\kappa}^{\natural}$  et  $\Omega_{B/\kappa}^{\natural}$  sont plats en tant que  $\Omega_{R/\kappa}^{\natural}$ -modules gradués.  $\square$

### 3.3 RÉALISATION DE DE RHAM

*Notation 3.3.0.* Dans ce numéro, on fixe un  $\kappa$ -schéma affine, lisse de type fini  $S = \text{Spec}(R) \in \text{ob}(\text{SmAff} \downarrow \kappa)$ . On note  $\mathcal{D}_{R/\kappa}$  les sections globales de  $\mathcal{D}_{S/\kappa}$ .

**Définition 3.3.1** ([Kap91], [BD00, 7.2.2], [Pos11, Appendix B.2]).

(i) On note  $\Omega : \mathcal{Cplx}(\mathcal{RMod}(\mathcal{D}_{R/\kappa})) \rightarrow \text{Mod}(\Omega_{R/\kappa})$  le foncteur

$$\underline{\text{hom}}_{\mathcal{D}_{R/\kappa}}(\Omega_{R/\kappa} \otimes_R \mathcal{D}_{R/\kappa}, -),$$

où  $\Omega_{R/\kappa} \otimes_R \mathcal{D}_{R/\kappa}$  est le complexe de De Rham du  $\mathcal{D}_{R/\kappa}$ -module à gauche  $\mathcal{D}_{R/\kappa}$ , muni des structures de  $\Omega_{R/\kappa}$ -module à gauche et de  $\mathcal{D}_{R/\kappa}$ -module à droite évidentes.

(ii) On note  $\mathcal{D} : \text{Mod}(\Omega_{R/\kappa}) \rightarrow \mathcal{Cplx}(\mathcal{RMod}(\mathcal{D}_{R/\kappa}))$  le foncteur  $(-) \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} (\Omega_{R/\kappa} \otimes_R \mathcal{D}_{R/\kappa})$ .

(iii) Il existe une adjonction évidente  $\mathcal{D} \dashv \Omega$ . D'après [Pos11, Appendix B.2],  $\mathcal{D}$  envoie  $\mathcal{W}_{\text{co}}$  dans  $\mathcal{QIso}$ ,  $\Omega$  envoie  $\mathcal{QIso}$  dans  $\mathcal{W}_{\text{co}}$  et les foncteurs induits  $\mathcal{D} : \mathcal{D}_{\text{co}}(\Omega_{R/\kappa}) \rightleftarrows \mathcal{D}(\mathcal{RMod}(\mathcal{D}_{R/\kappa})) : \Omega$  sont des équivalences.

(iv) On note  $\mathcal{D}_{\text{co}}^{\infty}(\Omega_{R/\kappa})$  (resp.  $\mathcal{D}^{\infty}(\mathcal{D}_{R/\kappa})$ ) la  $(\infty, 1)$ -catégorie associée à la catégorie avec équivalences faibles  $(\text{Mod}(\Omega_{R/\kappa}), \mathcal{W}_{\text{co}})$  (resp.  $(\mathcal{Cplx}(\mathcal{RMod}(\mathcal{D}_{R/\kappa})), \mathcal{QIso})$ ). On déduit de (iii) des équivalences mutuellement quasi-inverses de  $(\infty, 1)$ -catégories

$$\mathcal{D} : \mathcal{D}_{\text{co}}^{\infty}(\Omega_{R/\kappa}) \rightleftarrows \mathcal{D}^{\infty}(\mathcal{D}_{R/\kappa}) \cong \mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa}) : \Omega.$$

Notre hypothèse que  $S$  soit affine est inutile. Quitte à définir la catégorie des  $\text{dg-}\Omega_{S/\kappa}$ -modules quasi-cohérents, l'équivalence précédente se généralise au cas où  $S$  est quasi-projectif, lisse sur  $\kappa$ .

*Notation 3.3.2.*

(i) On munit  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{L}\text{Mod}(\mathcal{D}_{R/\kappa}))$  de la structure monoïdale symétrique associée au produit tensoriel  $\dagger$ -exceptionnel  $\otimes_R^\dagger$  déduite de 3.1.6 et l'on munit  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{R}\text{Mod}(\mathcal{D}_{R/\kappa}))$  de la structure monoïdale induite par l'équivalence naturelle  $(-)\otimes_R \omega_R : \mathcal{L}\text{Mod}(\mathcal{D}_{R/\kappa}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}\text{Mod}(\mathcal{D}_{R/\kappa})$ , où  $\omega_R$  désigne le  $R$ -module dualisant ([Bor87, 3.3]). On notera  $\otimes^\dagger$  le produit tensoriel associé à cette structure monoïdale symétrique sur  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{R}\text{Mod}(\mathcal{D}_{R/\kappa}))$ . L'unité est l'objet  $\omega_R$ , vu comme complexe concentré en degré 0. On remarque que cette structure monoïdale induit une  $(\infty, 1)$ -structure monoïdale symétrique canoniquement équivalente à la variante affine  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{R/\kappa})^{\otimes^\dagger}$  de la structure  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\otimes^\dagger}$  de 3.1.6.

(ii) On note  $\otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^\dagger$  le produit tensoriel décalé  $M \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^\dagger N := (M \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} N)[- \dim(S)]$  sur  $\text{Mod}(\Omega_{R/\kappa})$ .

(iii) On note  $\otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^!$  et  $\otimes_R^!$  les produits tensoriels décalés sur les catégories  $\text{Mod}(\Omega_{R/\kappa})$  et  $\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{R}\text{Mod}(\mathcal{D}_{R/\kappa}))$ , respectivement, donnés par

$$\begin{aligned} M \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^! N &:= (M \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^\dagger N)[- \dim(S)] = (M \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} N)[-2 \dim(S)] \\ \text{et } M \otimes_R^! N &:= (M \otimes_R^\dagger N)[- \dim(S)]. \end{aligned}$$

**Lemme 3.3.3.** *Le foncteur  $\Omega : \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{R}\text{Mod}(\mathcal{D}_{R/\kappa})) \rightarrow \text{Mod}(\Omega_{R/\kappa})$  est monoïdal symétrique fort par rapport aux structures monoïdales  $\otimes_R^\dagger$  et  $\otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^\dagger$ . De même,  $\Omega$  est monoïdal symétrique fort par rapport à  $\otimes_R^!$  et  $\otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^!$ . Par conséquent, son adjoint à gauche  $\mathcal{D}$  est comonoïdal faible par rapport à ces structures.*

*Démonstration.* Seule la première assertion nécessite une démonstration. On notera  $\Omega^\lambda : \mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{L}\text{Mod}(\mathcal{D}_{R/\kappa})) \rightarrow \text{Mod}(\Omega_{R/\kappa})$  le foncteur qui associe à un complexe de  $\mathcal{D}_{R/\kappa}$ -modules à gauche sont complexe de De Rham. Ce foncteur est monoïdal symétrique fort par rapport aux structures monoïdales  $\otimes_S^\dagger$  et  $\otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^\dagger$  ([BD00, 7.2.3(ii)]). Soient  $M, N \in \text{ob}(\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{R}\text{Mod}(\mathcal{D}_{R/\kappa})))$ . Alors  $\Omega(M) \cong \Omega^\lambda(\omega_R^{-1} \otimes_R M)[\dim(S)]$  et l'on trouve que

$$\begin{aligned} \Omega(M) \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^\dagger \Omega(N) &= \Omega(M) \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} \Omega(N)[- \dim(S)] \\ &\cong (\Omega^\lambda(\omega_R^{-1} \otimes_R M)[\dim(S)] \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} \Omega^\lambda(\omega_R^{-1} \otimes_R N)[\dim(S)])[- \dim(S)] \\ &\simeq \Omega^\lambda(\omega_R^{-1} \otimes_R (M \otimes^\dagger N))[\dim(S)] \\ &\cong \Omega(M \otimes^\dagger N). \end{aligned}$$

D'ailleurs,

$$\Omega(\omega_R) \cong \Omega^\lambda(\omega_R^{-1} \otimes_R \omega_R)[\dim(S)] \cong \Omega^\lambda(R)[\dim(S)] = \Omega_{R/\kappa}[\dim(S)].$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier la commutativité des diagrammes de cohérence.  $\square$

**Lemme 3.3.4.** *Soit  $M \in \text{ob}(\text{Mod}(\Omega_{R/\kappa}))$ . Si les composantes  $M^r$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ , sont  $R$ -plates et presque toutes nulles, alors le foncteur  $(-)\otimes_{\Omega_{R/\kappa}} M$  préserve la sous-catégorie  $\text{acycl}^{\text{co}}(\Omega_{R/\kappa})$ .*

*Démonstration.* On note  $\mathcal{D}_{R/\kappa}^\rho$  la structure de  $\mathcal{D}_{R/\kappa}$ -module à droite sur  $\mathcal{D}_{R/\kappa}$  induite par la multiplication. On peut supposer que  $M^r = 0$  pour  $r < 0$  et  $r > n$ . Le complexe de  $\mathcal{D}_{R/\kappa}$ -modules à droite  $\mathcal{D}(M)$  est le complexe

$$0 \rightarrow M^0 \otimes_R \mathcal{D}_{R/\kappa}^\rho \rightarrow M^1 \otimes_R \mathcal{D}_{R/\kappa}^\rho \rightarrow \cdots \rightarrow M^n \otimes_R \mathcal{D}_{R/\kappa}^\rho \rightarrow 0,$$

où la différentielle est le morphisme

$$\delta \mapsto d_M \delta : \text{Diff}_\kappa(\mathbb{R}, M^r) \rightarrow \text{Diff}_\kappa(\mathbb{R}, M^{r+1})$$

via l'identification  $N \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa} = \text{Diff}_\kappa(\mathbb{R}, N)$  pour tout  $\mathbb{R}$ -module  $N$ . Le  $\Omega_{\mathbb{R}/\kappa}$ -module  $\Omega \mathcal{D}(M)$  est le dg- $\Omega_{\mathbb{R}/\kappa}$ -module  $\oplus$ -total du complexe des  $\Omega(M^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho)$ . Si l'on note  $\Theta_{\mathbb{R}/\kappa}$  le module tangent de  $\mathbb{R}$  sur  $\kappa$ , dual de  $\Omega_{\mathbb{R}/\kappa}^1$ , la différentielle de  $\Omega(M^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho)$  est donnée en degré  $s \in \mathbf{Z}_{\leq 0}$  par le morphisme

$$(M^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho) \otimes_{\mathbb{R}} \bigwedge^{-s} \Theta_{\mathbb{R}/\kappa} \rightarrow (M^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho) \otimes_{\mathbb{R}} \bigwedge^{-s+1} \Theta_{\mathbb{R}/\kappa}$$

qui envoie  $m \otimes \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_s$  sur l'élément

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^s (-1)^{\alpha-1} m \xi_\alpha \otimes \xi_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\xi}_\alpha \wedge \cdots \wedge \xi_s \\ & + \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq s} (-1)^{\alpha+\beta} m \otimes [\xi_\alpha, \xi_\beta] \wedge \xi_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\xi}_\alpha \wedge \cdots \wedge \hat{\xi}_\beta \wedge \cdots \wedge \xi_s. \end{aligned}$$

Or le dg- $\Omega_{\mathbb{R}/\kappa}$ -module  $\oplus$ -total d'un complexe borné de dg- $\Omega_{\mathbb{R}/\kappa}$ -modules vérifie la conclusion de l'énoncé dès que chaque composante dudit complexe la vérifie. Il suffit de montrer que  $(-) \otimes_{\Omega_{\mathbb{R}/\kappa}} (\Omega(M^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho))$  préserve  $\text{acycl}^{\text{co}}(\Omega_{\mathbb{R}/\kappa})$ .

Le dg- $\Omega_{\mathbb{R}/\kappa}$ -module  $\Omega(M^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho)$  est isomorphe au complexe de De Rham décalé

$$\Omega_{\mathbb{R}/\kappa} \otimes_{\mathbb{R}} (\omega_{\mathbb{R}}^{-1} \otimes_{\mathbb{R}} (M^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho))[\dim(S)]$$

du  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}$ -module à gauche  $\omega_{\mathbb{R}}^{-1} \otimes_{\mathbb{R}} (M^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho)$ . Si  $N \in \text{ob}(\mathcal{M}\text{od}(\Omega_{\mathbb{R}/\kappa}))$ , alors

$$N \otimes_{\Omega_{\mathbb{R}/\kappa}} \Omega_{\mathbb{R}/\kappa} \otimes_{\mathbb{R}} (\omega_{\mathbb{R}}^{-1} \otimes_{\mathbb{R}} (M^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho)) \cong N \otimes_{\mathbb{R}} (\omega_{\mathbb{R}}^{-1} \otimes_{\mathbb{R}} (M^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho))$$

muni de la différentielle donnée en degré  $s$  par

$$n \otimes m \mapsto d_N(n) \otimes m + (-1)^s n \otimes \varphi(m),$$

où  $n \in N^s$ ,  $m \in \omega_{\mathbb{R}}^{-1} \otimes_{\mathbb{R}} (M \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho)$  et

$$\varphi : \omega_{\mathbb{R}}^{-1} \otimes_{\mathbb{R}} (M^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho) \rightarrow \Omega_{\mathbb{R}/\kappa}^1 \otimes_{\mathbb{R}} \omega_{\mathbb{R}}^{-1} \otimes_{\mathbb{R}} (M^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho)$$

est la connexion intégrable induite par la structure de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}$ -module à gauche. Comme  $\omega_{\mathbb{R}}^{-1}$ ,  $M^r$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho$  sont tous  $\mathbb{R}$ -plats, il en résulte que  $(-) \otimes_{\Omega_{\mathbb{R}/\kappa}} (\omega_{\mathbb{R}}^{-1} \otimes_{\mathbb{R}} (M^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathbb{R}/\kappa}^\rho))$  préserve les suites exactes courtes dans  $Z^0(\mathcal{M}\text{od}(\Omega_{\mathbb{R}/\kappa}))$ . Il préserve également les  $\mathcal{U}$ -petits coproduits, ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 3.3.5.** *Il existe un  $(\infty, 1)$ -foncteur monoidal symétrique fort*

$$\varrho_{\text{dR}, S}^* : N(\text{SmAff} \downarrow S)^\times \rightarrow \mathcal{D}_h^{\text{b}, \infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\otimes^*}$$

tel que  $\varrho_{\text{dR}}^*(X) \cong f_{\sharp} \mathbf{1}_X^*$  pour tout  $X \in \text{ob}(\text{SmAff} \downarrow S)$ .

*Démonstration.* On dispose d'un foncteur  $(\mathcal{S}mAff\downarrow S)^{op} \rightarrow \mathcal{M}od(\Omega_{R/\kappa})$  défini par

$$X = \text{Spec}(A) \mapsto \Omega_{A/\kappa}[2 \dim(S)].$$

D'après 3.2.5, il se prolonge en un foncteur monoïdal symétrique fort  $((\mathcal{S}mAff\downarrow S)^\times)^{op} \rightarrow \mathcal{M}od(\Omega_{R/\kappa})^{\otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^!}$ , où  $(\mathcal{S}mAff\downarrow S)^\times$  désigne la structure monoïdale symétrique associée au produit cartésien  $\times_S$  dans  $\mathcal{S}mAff\downarrow S$ . En effet, pour tous  $X = \text{Spec}(A), Y = \text{Spec}(B) \in \text{ob}(\mathcal{S}mAff\downarrow S)$ , on a

$$\begin{aligned} \Omega_{A/\kappa}[2 \dim(S)] \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^! \Omega_{B/\kappa}[2 \dim(S)] \\ &= (\Omega_{A/\kappa}[2 \dim(S)] \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} \Omega_{B/\kappa}[2 \dim(S)])[-2 \dim(S)] \\ &\cong \Omega_{(A \otimes_R B)/\kappa}[2 \dim(S)] \\ &= \Omega_{(A \otimes_R B)/\kappa}[2 \dim(S)]. \end{aligned}$$

Un foncteur monoïdal symétrique fort est également comonoïdal symétrique fort. En composant avec le foncteur comonoïdal faible

$$\mathcal{D} : \mathcal{M}od(\Omega_{R/\kappa})^{\otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^!} \rightarrow \mathcal{C}plx(\mathcal{R}Mod(\mathcal{D}_{R/\kappa}))^{\otimes^!}$$

(3.3.3), on obtient un foncteur comonoïdal faible

$$((\mathcal{S}mAff\downarrow S)^\times)^{op} \rightarrow \mathcal{C}plx(\mathcal{R}Mod(\mathcal{D}_{R/\kappa}))^{\otimes^!}$$

donné par  $X = \text{Spec}(A) \mapsto \mathcal{D}(\Omega_{A/\kappa})$ .

Le foncteur  $\mathcal{D}$  n'est pas comonoïdal symétrique fort, mais les morphismes structuraux

$$\mathcal{D}(\Omega_{R/\kappa}[2 \dim(S)]) \rightarrow \mathbf{1}_S^! \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(\Omega_{A/\kappa} \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^! \Omega_{B/\kappa}) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega_{A/\kappa}) \otimes_S^! \mathcal{D}(\Omega_{B/\kappa})$$

sont des quasi-isomorphismes pour tous  $X = \text{Spec}(A)$  et  $Y = \text{Spec}(B)$  dans  $\mathcal{S}mAff\downarrow S$ . En effet, la co-unité de l'adjonction  $\mathcal{D}(\Omega_{R/\kappa}[2 \dim(S)]) = \mathcal{D}(\Omega(\mathbf{1}_S^!)) \rightarrow \mathbf{1}_S^!$  est un quasi-isomorphisme d'après [BD00, 7.2.4]. La structure comonoïdale faible sur  $\mathcal{D}$  est le composé

$$\mathcal{D}(M \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^! N) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega \mathcal{D}(M) \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^! \Omega \mathcal{D}(N)) \rightarrow \mathcal{D} \Omega(\mathcal{D}(M) \otimes_R^! \mathcal{D}(N)) \rightarrow \mathcal{D}(M) \otimes_R^! \mathcal{D}(N)$$

des morphismes d'unité, de la structure monoïdale sur  $\Omega$  et de co-unité, respectivement. La flèche au milieu est un isomorphisme, car  $\Omega$  est monoïdal symétrique. La flèche à droite est un quasi-isomorphisme par [BD00, 7.2.4]. Le morphisme  $M \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^! N \rightarrow \Omega \mathcal{D}(M) \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^! \Omega \mathcal{D}(N)$  se factorise en

$$M \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^! N \rightarrow M \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} \Omega \mathcal{D}(N) \rightarrow \Omega \mathcal{D}(M) \otimes_{\Omega_{R/\kappa}} \Omega \mathcal{D}(N).$$

Or  $\Omega \mathcal{D}(\Omega_{A/\kappa}) \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^! (-)$  et  $(-) \otimes_{\Omega_{R/\kappa}}^! \Omega \mathcal{D}(\Omega_{B/\kappa})$  préservent  $\mathcal{W}_{co}$  d'après 3.3.4. Comme  $\mathcal{D}$  envoie  $\mathcal{W}_{co}$  dans  $\mathcal{Q}Iso$ , les morphismes de la structure comonoïdale sur le foncteur  $(\mathcal{S}mAff\downarrow S)^\times)^{op} \rightarrow \mathcal{C}plx(\mathcal{R}Mod(\mathcal{D}_{R/\kappa}))^{\otimes^!}$  sont des quasi-isomorphismes. De plus, ce foncteur comonoïdal faible est symétrique. On en déduit un foncteur monoïdal symétrique faible entre catégories monoïdales symétriques avec équivalences faibles  $((\mathcal{S}mAff\downarrow S)^\times, \mathcal{I}so) \rightarrow$

$((\mathcal{C}\text{plx}(\mathcal{R}\text{Mod}(\mathcal{D}_{R/\kappa}))^{\otimes^!})^{\text{op}}, \mathcal{Q}\text{Iso}^{\text{op}})$  dont les morphismes de la structure monoïdale appartiennent à  $\mathcal{Q}\text{Iso}^{\text{op}}$ . En passant aux  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques associées, on obtient un  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort

$$\varrho_{\text{dR}}^! : \mathbf{N}(\text{SmAff}\downarrow S)^\times \rightarrow (\mathcal{D}^\infty(\mathcal{D}_{R/\kappa})^{\otimes^!})^{\text{op}}.$$

On peut vérifier que  $(\mathcal{D}^\infty(\mathcal{D}_{R/\kappa})^{\otimes^!})^{\text{op}} \cong (\mathcal{D}^\infty(\mathcal{D}_{R/\kappa})^{\text{op}})^{\otimes^!}$ . Sous l'équivalence évidente entre  $\mathcal{D}^\infty(\mathcal{D}_{R/\kappa})$  et  $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^\infty(\mathcal{D}_{S/\kappa})$ , l'image essentielle du  $(\infty, 1)$ -foncteur

$$\mathbf{N}(\text{SmAff}\downarrow S) \rightarrow (\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^\infty(\mathcal{D}_{S/\kappa}))^{\text{op}}$$

sous-jacent à  $\varrho_{\text{dR}}^!$  est contenue dans la sous- $(\infty, 1)$ -catégorie pleine  $\mathcal{D}_h^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{S/\kappa})$ . Effectivement, d'après [BD00, 7.2.10],  $\mathcal{D}(\Omega_{A/\kappa}[2 \dim(S)]) \cong f_* \mathbf{1}_X^!$  pour tout  $X = \text{Spec}(A) \in \text{ob}(\text{SmAff}\downarrow S)$  et  $f_*$  préserve les complexes à cohomologie holonome. En composant  $\varrho_{\text{dR}}^! : \mathbf{N}(\text{SmAff}\downarrow S)^\times \rightarrow (\mathcal{D}_h^\infty(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\text{op}})^{\otimes^!}$  avec l'involution de Verdier

$$\mathbf{D}_S : (\mathcal{D}_h^\infty(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\text{op}})^{\otimes^!} \simeq \mathcal{D}_h^\infty(\mathcal{D}_{S/\kappa})^{\otimes^*}$$

(3.1.6), on obtient le  $(\infty, 1)$ -foncteur  $\varrho_{\text{dR},S}^*$  voulu. De plus, si  $(f : X \rightarrow S) \in \text{ob}(\text{SmAff}\downarrow S)$  et que l'on note  $d_f$  la dimension relative de  $f$ , alors on a

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{dR},S}^*(X) &= \mathbf{D}_S(\mathcal{D}(\Omega_{A/\kappa}[2 \dim(S)]) \\ &\cong \mathbf{D}_S(f_* \mathbf{1}_X^![-2d_f]) \\ &= f_! \mathbf{D}_X(\mathbf{1}_X^![-2d_f]) \\ &= f_! \mathbf{1}_X^*[2d_f] \\ &= f_{\#} \mathbf{1}_X^*. \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration. □

**Corollaire 3.3.6.** *Soit  $X \in \text{ob}(\text{Sm}^{\text{qproj}}\downarrow \kappa)$ . Alors il existe un  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort  $\varrho_{\text{dR},X}^* : \mathbf{N}(\text{SmAff}\downarrow X)^\times \rightarrow \mathcal{D}_h^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa})^{\otimes^*}$  uniquement déterminé, à équivalence près, par la condition suivante : pour tout immersion ouverte  $j : U \hookrightarrow X$  dans  $\text{Sm}\downarrow \kappa$  avec  $U \in \text{ob}(\text{SmAff}\downarrow \kappa)$ ,  $\varrho_{\text{dR},U}^*$  est équivalent au  $(\infty, 1)$ -foncteur de 3.3.5 et  $\varrho_{\text{dR},X}^* \cong \varrho_{\text{dR},U}^* j^*$ , où  $j^* : \mathbf{N}(\text{SmAff}\downarrow X) \rightarrow \mathbf{N}(\text{SmAff}\downarrow U)$  désigne le  $(\infty, 1)$ -foncteur donné par  $Y \mapsto Y \times_X U$ .*

*Démonstration.* Si  $X$  est affine, alors on définit  $\varrho_{\text{dR},X}^*$  par la construction de 3.3.5. En général, on choisit un recouvrement Zariski  $\{j_\alpha : U_\alpha \rightarrow X\}_{1 \leq \alpha \leq r}$  avec  $U_\alpha \in \text{ob}(\text{SmAff}\downarrow \kappa)$ . On note  $j : U := \coprod_{1 \leq \alpha \leq r} U_\alpha \rightarrow X$  le morphisme induit par les  $j_\alpha$  et  $X_\bullet$  le nerf de Čech de  $j$ . D'après 3.1.12, on a  $\mathcal{D}_h^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa}) \simeq \lim \mathcal{D}_h^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{X_\alpha/\kappa})$ . Pour toute immersion ouverte  $h : V \hookrightarrow W$  dans  $\text{SmAff}\downarrow \kappa$ , la construction de 3.3.5 est compatible à  $h^*$  en ce sens que l'on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N}(\text{SmAff}\downarrow W)^\times & \xrightarrow{\varrho_{\text{dR},W}^*} & \mathcal{D}_h^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{W/\kappa})^{\otimes^*} \\ \downarrow h^* & & \downarrow h^* \\ \mathbf{N}(\text{SmAff}\downarrow V)^\times & \xrightarrow{\varrho_{\text{dR},V}^*} & \mathcal{D}_h^{\text{b},\infty}(\mathcal{D}_{V/\kappa})^{\otimes^*} \end{array}$$

de  $(\infty, 1)$ -foncteurs monoïdaux symétriques forts. On conclut grâce à la propriété universelle de la  $(\infty, 1)$ -limite. □

*Notation 3.3.7.*

(i) Lorsque  $\mathcal{C}^\otimes$  et  $\mathcal{C}'^\otimes$  sont deux  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques localement  $\mathfrak{A}$ -présentables, on note  $\mathcal{F}\text{un}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  la  $(\infty, 1)$ -catégorie des  $(\infty, 1)$ -foncteurs  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ,  $\mathcal{F}\text{un}^\otimes(\mathcal{C}^\otimes, \mathcal{C}'^\otimes)$  la sous- $(\infty, 1)$ -catégorie pleine de  $\mathcal{F}\text{un}(\mathcal{C}^\otimes, \mathcal{C}'^\otimes)$  engendrée par les  $(\infty, 1)$ -foncteurs monoïdaux symétriques forts et  $\mathcal{F}\text{un}^{\otimes, \text{L}}(\mathcal{C}^\otimes, \mathcal{C}'^\otimes)$  celle engendrée par les  $(\infty, 1)$ -foncteurs monoïdaux symétriques forts qui préservent les  $\mathfrak{A}$ -petites  $(\infty, 1)$ -colimites. Comme  $\mathcal{C}^\otimes$  et  $\mathcal{C}'^\otimes$  sont localement  $\mathfrak{A}$ -présentables, cette dernière est la sous- $(\infty, 1)$ -catégorie pleine de  $\mathcal{F}\text{un}^\otimes(\mathcal{C}^\otimes, \mathcal{C}'^\otimes)$  engendrée par les  $(\infty, 1)$ -adjoints à gauche, d'où le « L ».

(ii) Pour tout  $\mathfrak{A}$ -schéma noethérien  $X$ , on note  $\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)^\otimes$  la  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique, stable et localement  $\mathfrak{A}$ -présentable construite dans [Rob13, §5.3] et  $\mathcal{S}\mathcal{H}(X)$  la  $(\infty, 1)$ -catégorie sous-jacente. Sa catégorie homotopique est la catégorie homotopique stable  $\mathcal{S}\mathcal{H}(X)$  de Morel-Voevodsky.

(iii) D'après [Ayo07b], pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathfrak{A}$ -schémas noethériens de dimension de Krull finie, on dispose d'une  $(\infty, 1)$ -adjonction  $f^* : \mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(Y) \rightleftarrows \mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X) : f_*$  et  $f^*$  est de plus monoïdal symétrique fort. En outre, si  $f$  est lisse, alors on a une  $(\infty, 1)$ -adjonction  $f_{\sharp} : \mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X) \rightleftarrows \mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(Y) : f^*$  et une formule de projection  $f_{\sharp}((-) \otimes_X f^*(-)) \simeq f_{\sharp}(-) \otimes_Y (-)$ . En effet, les  $(\infty, 1)$ -foncteurs  $f_{\sharp}$ ,  $f^*$  et  $f_*$  sont présentés par des foncteurs de Quillen. Bien entendu, ils induisent les foncteurs  $\mathbf{L}f_{\sharp}$ ,  $\mathbf{L}f^*$  et  $\mathbf{R}f_*$  sur les catégories homotopiques.

**Théorème 3.3.8** ([Rob13, 5.11]). *Soient  $X$  un  $\mathfrak{A}$ -schéma noethérien,  $\mathcal{C}^\otimes$  une  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique, stable, localement  $\mathfrak{A}$ -présentable. Le  $(\infty, 1)$ -foncteur*

$$\mathcal{F}\text{un}^{\text{L}, \otimes}(\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)^\otimes, \mathcal{C}^\otimes) \rightarrow \mathcal{F}\text{un}^\otimes(\mathbf{N}(\text{SmAff}\downarrow X)^\times, \mathcal{C}^\otimes)$$

déduit du  $(\infty, 1)$ -foncteur de Yoneda  $\mathbf{N}(\text{SmAff}\downarrow X)^\times \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)^\otimes$  est pleinement fidèle. Son image essentielle est la sous- $(\infty, 1)$ -catégorie pleine engendrée par les  $(\infty, 1)$ -foncteurs qui vérifient les propriétés de descente par rapport à la topologie Nisnevich, d'invariance par  $\mathbf{A}^1$ -homotopie et de  $\mathbf{P}^1$ -stabilité.

**Théorème 3.3.9.** *Soit  $X \in \text{ob}(\text{Sm}^{\text{qproj}}\downarrow \mathfrak{k})$ .*

(i) *À équivalence près, le  $(\infty, 1)$ -foncteur  $\varrho_{\text{dR}, X}^* : \mathbf{N}(\text{SmAff}\downarrow X)^\times \rightarrow \mathcal{D}_h^{\text{b}, \infty}(\mathcal{D}_{X/\mathfrak{k}})^\otimes^*$  de 3.3.6 induit un unique  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort*

$$\varrho_{\text{dR}}^* : \mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)^\otimes \rightarrow \text{Ind}\left(\mathcal{D}_h^{\text{b}, \infty}(\mathcal{D}_{X/\mathfrak{k}})\right)^\otimes^*$$

*qui préserve les  $\mathfrak{A}$ -petites  $(\infty, 1)$ -colimites. On l'appelle **réalisation de De Rham**.*

(ii) *Pour tout  $(f : X \rightarrow Y) \in \text{mor}(\text{Sm}^{\text{qproj}}\downarrow \mathfrak{k})$ , il existe une équivalence canonique*

$$f^* \varrho_{\text{dR}, Y}^* \simeq \varrho_{\text{dR}, X}^* f^*$$

*de  $(\infty, 1)$ -foncteurs.*

(iii) *Pour tout  $(f : X \rightarrow Y) \in \text{mor}(\text{Sm}^{\text{qproj}}\downarrow \mathfrak{k})$  lisse, il existe une équivalence canonique  $f_{\sharp} \varrho_{\text{dR}, X}^* \simeq \varrho_{\text{dR}, Y}^* f_{\sharp}$ .*

*Démonstration.*

(i) D'après 3.1.10,  $\text{Ind}\left(\mathcal{D}_h^{\text{b}, \infty}(\mathcal{D}_{X/\mathfrak{k}})\right)^\otimes^*$  est une  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique, stable, localement  $\mathfrak{A}$ -présentable. D'après 3.3.8, il reste à montrer que  $\varrho_{\text{dR}, X}^*$  vérifie les

propriétés de descente par rapport à la topologie Nisnevich, d'invariance par  $\mathbf{A}^1$ -homotopie et de  $\mathbf{P}^1$ -stabilité. L'argument de [CD12a, 3.1.3] montre que  $\varrho_{\mathrm{dR},X}^*$  vérifie la propriété de descente par rapport à la topologie étale et donc *a fortiori* par rapport à la topologie Nisnevich. Grâce à cette propriété de descente, il suffit de vérifier l'invariance par  $\mathbf{A}^1$ -homotopie dans le cas où  $X$  est affine. Si  $(f : Y \rightarrow X) \in \mathrm{ob}(\mathrm{SmAff}\downarrow X)$ , alors on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_\kappa^1 & \xleftarrow{g'} & \mathbf{A}_Y^1 \\ \pi_\kappa \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ \mathbf{B} & \xleftarrow{g} & Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \pi_X \\ \xrightarrow{f} X \end{array}$$

dans lequel le carré est cartésien et  $\pi_\kappa$  et  $g$  sont les projections canoniques. Alors  $\varrho_{\mathrm{dR},Y}^*(\mathbf{A}_Y^1) \cong \pi_{X\sharp} \mathbf{1}_{\mathbf{A}_Y^1}^*$  d'après 3.3.5. Par suite,

$$\pi_{X\sharp} \mathbf{1}_{\mathbf{A}_Y^1}^* \cong \pi_{X\sharp} g'^* \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^* \cong f_\sharp g^* \pi_{\kappa\sharp} \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^*$$

et l'on peut déduire de [Bor87, VII, 9.8] que  $\pi_{\kappa\sharp} \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^* \cong \mathbf{1}_{\mathrm{Spec}(\kappa)}^*$ . Effectivement, dans la catégorie homotopique  $\mathcal{D}_h^b(\mathcal{D}_B) \cong \mathcal{D}_{\mathbf{X}_0}^b(\mathrm{Mod}(\kappa))$ , on trouve

$$\begin{aligned} \pi_{\kappa\sharp} \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^* &= \pi_! \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^*[2] = \mathbf{D}_B \pi_{\kappa*} \mathbf{D}_{\mathbf{A}_\kappa^1}(\mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^*)[2] \cong \mathbf{D}_B \pi_{\kappa*} (\mathbf{D}_{\mathbf{A}_\kappa^1}(\mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^*) \otimes_{\mathbf{A}_\kappa^1}^{\dagger} \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^{\dagger})[2] \\ &\cong \mathbf{D}_\kappa \left( \mathrm{Rhom}_{\mathcal{D}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^1}^{\mathrm{Cplx}(\mathrm{Mod}(\kappa))} \left( \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^*, \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^{\dagger} \right) \right) \\ &= \mathbf{D}_B \left( \mathrm{Rhom}_{\mathcal{D}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^1}^{\mathrm{Cplx}(\mathrm{Mod}(\kappa))} \left( \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^*, \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^*[1] \right) [1] \right) [2] \\ &\cong \mathbf{D}_B \mathrm{Rhom}_{\mathcal{D}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^1}^{\mathrm{Cplx}(\mathrm{Mod}(\kappa))} \left( \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^*, \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^* \right). \end{aligned}$$

La cohomologie du complexe  $\mathrm{Rhom}_{\mathcal{D}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^1}^{\mathrm{Cplx}(\mathrm{Mod}(\kappa))} \left( \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^*, \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\kappa^1}^* \right)$  est la cohomologie de De Rham algébrique de  $\mathbf{A}_\kappa^1$ , donc nulle sauf en degré 0 et canoniquement isomorphe à  $\kappa$  en degré 0 ([Har75, Proposition 7.1]). La  $\mathbf{P}^1$ -stabilité se démontre de la même façon, se ramenant à  $\mathbf{B}$  à l'aide de la formule de projection.

(ii) L'équivalence  $f^* \varrho_{\mathrm{dR},Y}^* \xrightarrow{\sim} \varrho_{\mathrm{dR},X}^* f^*$  résulte de ce que  $f^* \varrho_{\mathrm{dR},Y}^*$  et  $\varrho_{\mathrm{dR},X}^* f^*$  induisent le même  $(\infty, 1)$ -foncteur

$$\mathrm{N}(\mathrm{SmAff}\downarrow Y)^\times \rightarrow \mathrm{Jnd} \left( \mathcal{D}_h^{b,\infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa}) \right)^{\otimes^*}$$

à équivalence près, puisque le  $(\infty, 1)$ -foncteur de 3.3.8 est pleinement fidèle.

(iii) L'assertion résulte de [CD12b, 1.2.13].  $\square$

L'auteur remercie M. Robalo de lui avoir signalé la preuve de la proposition suivante.

**Proposition 3.3.10.** *Soit  $f^* : \mathcal{C}^\otimes \rightarrow \mathcal{C}'^\otimes : f_*$  une  $(\infty, 1)$ -adjonction de  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques, localement  $\mathfrak{A}$ -présentables telle que  $f^*$  soit monoïdal symétrique fort. Alors elle se factorise de manière canonique en*

$$\mathcal{C}^\otimes \xrightleftharpoons[\nu]{(-) \otimes_{\mathcal{C}} f_* \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}} \mathrm{Mod}(f_* \mathbf{1}_{\mathcal{C}'})^\otimes \xrightleftharpoons[\tilde{f}_*]{\tilde{f}^*} \mathcal{C}'^\otimes,$$

où  $\otimes_{\mathcal{C}} f_* \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$  est le  $(\infty, 1)$ -foncteur «  $f_* \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$ -module libre »,  $\nu$  le  $(\infty, 1)$ -foncteur d'oubli et  $\tilde{f}^*$  et  $\tilde{f}_*$  les  $(\infty, 1)$ -foncteurs canoniques.

*Démonstration.* Le  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort  $f^*$  induit un  $(\infty, 1)$ -foncteur  $\mathcal{C}Alg(\mathcal{C}^\otimes) \rightarrow \mathcal{C}Alg(\mathcal{C}'^\otimes)$  et, en particulier,  $f^*f_*\mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$  admet une structure naturelle de monoïde commutatif de  $\mathcal{C}'^\otimes$ , d'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}^\otimes & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{C}'^\otimes & & \\ \downarrow (-) \otimes_{\mathcal{C}} f_* \mathbf{1}_{\mathcal{C}'} & & \downarrow (-) \otimes_{\mathcal{C}'} f^* f_* \mathbf{1}_{\mathcal{C}'} & \searrow (-) \otimes_{\mathcal{C}'} \mathbf{1}_{\mathcal{C}'} & \\ \text{Mod}(f_* \mathbf{1}_{\mathcal{C}'})^\otimes & \xrightarrow{f^*} & \text{Mod}(f^* f_* \mathbf{1}_{\mathcal{C}'})^\otimes & \xrightarrow{(-) \otimes_{f^* f_* \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}} \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}} & \text{Mod}(\mathbf{1}_{\mathcal{C}'})^\otimes \end{array}$$

de  $(\infty, 1)$ -adjoints à gauche monoïdaux symétriques forts, où  $\mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$  est munie de la structure de  $f^*f_*\mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$ -algèbre commutative induite par la co-unité  $f^*f_* \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}'}$ . Le  $(\infty, 1)$ -foncteur  $(-) \otimes_{\mathcal{C}'} \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$  est une équivalence et l'assertion en résulte.  $\square$

*Notation 3.3.11.* Soient  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \text{mor}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$  une catégorie de  $\mathfrak{U}$ -modèles monoïdale symétrique  $\mathfrak{U}$ -combinatoire vérifiant l'axiome du monoïde et  $A \in \text{ob}(\mathcal{C}Alg(\mathcal{C}))$  un monoïde commutatif cofibrant. On suppose que  $\mathcal{C}$  est additive et  $\mathbf{Q}$ -linéaire et que l'unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$  est cofibrante.

(i) On munit  $\mathcal{C}Alg(\mathcal{C})$  et  $\text{Mod}(A)$  des structures de  $\mathfrak{U}$ -modèles  $\mathfrak{U}$ -combinatoires de [CD12b, 7.1.8, 7.2.2]. On note  $\mathcal{C}^c \subseteq \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}Alg(\mathcal{C}^c) \subseteq \mathcal{C}Alg(\mathcal{C})$  et  $\text{Mod}(A)^c \subseteq \text{Mod}(A)$  les sous-catégories pleines engendrées par les objets cofibrants et l'on note  $\mathcal{W} \subseteq \text{mor}(\mathcal{C}^c)$ ,  $\mathcal{W}_{\text{calg}} \subseteq \text{mor}(\mathcal{C}Alg(\mathcal{C}^c))$  et  $\mathcal{W}_A \subseteq \text{mor}(\text{Mod}(A)^c)$  les classes des équivalences faibles.

(ii) Les  $(\infty, 1)$ -catégories  $N(\mathcal{C}^c)$ ,  $N(\mathcal{C}Alg(\mathcal{C}^c))$  et  $N(\text{Mod}(A)^c)$  admettent des localisations  $N(\mathcal{C}^c)[\mathcal{W}^{-1}]$ ,  $N(\mathcal{C}Alg(\mathcal{C}^c))[\mathcal{W}_{\text{calg}}^{-1}]$  et  $N(\text{Mod}(A)^c)[\mathcal{W}_A^{-1}]$ , respectivement, dont les catégories homotopiques s'identifient aux catégories homotopiques de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}Alg(\mathcal{C})$  et  $\text{Mod}(A)$ , respectivement. On note  $\lambda$ ,  $\lambda_{\text{calg}}$  et  $\lambda_A$  les  $(\infty, 1)$ -foncteurs de localisations associés. Comme  $\mathcal{C}$  et  $\text{Mod}(A)$  sont des catégories de modèles monoïdaux symétriques, on peut étendre ces localisations en des  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques munies de  $(\infty, 1)$ -foncteurs de localisations monoïdaux symétriques forts

$$\lambda : N(\mathcal{C}^c)^\otimes \rightarrow N(\mathcal{C}^c)[\mathcal{W}^{-1}]^\otimes \quad \text{et} \quad \lambda_A : N(\text{Mod}(A)^c)^\otimes \rightarrow N(\text{Mod}(A)^c)[\mathcal{W}_A^{-1}]^\otimes.$$

En particulier,  $\lambda$  induit un  $(\infty, 1)$ -foncteur  $\lambda : \mathcal{C}Alg(N(\mathcal{C}^c)) \rightarrow \mathcal{C}Alg(N(\mathcal{C}^c)[\mathcal{W}^{-1}])$ . D'après [CD12b, 7.1.6]  $\mathcal{C}$  est « *freely powered* » ([Lur12, 4.4.4.2]), de sorte que le  $(\infty, 1)$ -foncteur canonique

$$\gamma : N(\mathcal{C}Alg(\mathcal{C}^c))[\mathcal{W}_{\text{calg}}^{-1}] \rightarrow \mathcal{C}Alg(N(\mathcal{C}^c)[\mathcal{W}^{-1}])$$

est une équivalence d'après [Lur12, 4.4.4.7].

**Lemme 3.3.12.** *Les notations et les hypothèses sont celles de 3.3.11. Il existe une équivalence canonique de  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques*

$$\gamma_A : \text{Mod}(\gamma(A))^\otimes \simeq N(\text{Mod}(A)^c)[\mathcal{W}_A^{-1}]^\otimes.$$

*Démonstration.* L'adjoint à gauche de la  $(\infty, 1)$ -adjonction canonique

$$N(\mathcal{C}^c)[\mathcal{W}^{-1}]^\otimes \rightleftarrows N(\text{Mod}(A)^c)[\mathcal{W}_A^{-1}]^\otimes$$

est monoïdal symétrique fort et  $\gamma(A)$  est l'image de l'objet  $\lambda_A(A)$  par l'adjoint à droite dans  $\mathcal{C}Alg(N(\mathcal{C}^c)[\mathcal{W}^{-1}])$ . D'après 3.3.10, on obtient une  $(\infty, 1)$ -adjonction

$$\gamma_A : \text{Mod}(\gamma(A))^\otimes \rightleftarrows N(\text{Mod}(A)^c)[\mathcal{W}_A^{-1}]^\otimes : \delta_A$$

telle que  $\gamma_A$  soit monoïdal symétrique fort. D'après [Lur12, 2.1.3.8], pour que  $\gamma_A$  soit une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques, il faut et il suffit que le  $(\infty, 1)$ -foncteur sous-jacent  $\gamma_A : \text{Mod}(\gamma(A)) \rightarrow \text{N}(\text{Mod}(A)^c) [\mathcal{W}_A^{-1}]$  est une équivalence. Il revient au même de montrer que  $\delta_A : \text{Mod}(\gamma(A)) \rightarrow \text{N}(\text{Mod}(A)^c) [\mathcal{W}_A^{-1}]$  en est une. Le diagramme de  $(\infty, 1)$ -foncteurs

$$\begin{array}{ccc}
\text{Mod}(\gamma(A)) & \xleftarrow{\delta_A} & \text{N}(\text{Mod}(A)^c) [\mathcal{W}_A^{-1}] \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{L}\text{Mod}(\gamma(A)) & \xleftarrow{\quad} & \text{N}(\mathcal{L}\text{Mod}(A)^c) [\mathcal{W}_A^{-1}] \\
\uparrow & & \uparrow \\
{}_{\gamma(A)}\mathcal{B}\text{Mod}_{\gamma(1_{\mathcal{C}})} & \xleftarrow{\quad} & \text{N}({}_A\mathcal{B}\text{Mod}_{1_{\mathcal{C}}}) [\mathcal{W}_{A,1_{\mathcal{C}}}^{-1}]
\end{array}$$

est commutatif, où  ${}_R\mathcal{B}\text{Mod}_S$  désigne la catégorie ou la  $(\infty, 1)$ -catégorie, selon le cas, des  $(R, S)$ -bimodules,  $\mathcal{W}_{R,S}$  est la classe des morphismes de  $(R, S)$ -bimodules dont le morphisme de  $\mathcal{C}$  sous-jacent est dans  $\mathcal{W}$ , les flèches verticales sont les  $(\infty, 1)$ -foncteurs d'oubli et les flèches horizontales sont les  $(\infty, 1)$ -foncteurs canoniques. Les flèches verticales sont des équivalences d'après [Lur12, 4.3.2.8, 4.4.1.6]. Il reste à appliquer [Lur12, 4.3.3.17] afin de conclure que la flèche horizontale inférieure est une équivalence.  $\square$

*Notation 3.3.13.* Comme expliqué dans [CD12b, 5.3.35, 5.3.36], il existe des adjonctions de catégories triangulées  $\mathcal{S}\text{m}$ -prémotiviques

$$\mathcal{S}\mathcal{H}(-) \rightleftarrows \mathcal{D}_{A^1}(-) \rightleftarrows \mathcal{D}_{A^1, \mathcal{Q}}(-)$$

induisant une équivalence naturelle  $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}(-) \simeq \mathcal{D}_{A^1, \mathcal{Q}}(-)$ , où  $\mathcal{D}_{A^1}(-) := \mathcal{D}_{A^1, \mathcal{Z}}(-)$  est la catégorie triangulée  $\mathcal{S}\text{m}$ -prémotivique définie dans [CD12b, 5.3.31], où  $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}(S)$  désigne la localisation de Verdier de  $\mathcal{S}\mathcal{H}(S)$  par la sous-catégorie localisante engendrée par les objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables de torsion pour tout  $S \in \text{ob}(\text{Sch}^{\text{ft}} \downarrow \kappa)$ . On en déduit un  $(\infty, 1)$ -adjoint à gauche monoïdal symétrique fort  $\mathcal{S}\mathcal{H}^{\infty}(S)^{\otimes} \rightarrow \mathcal{D}_{A^1, \mathcal{Q}}^{\infty}(S)^{\otimes}$  que l'on notera  $(-)_{\mathcal{Q}}$ , où  $\mathcal{D}_{A^1, \mathcal{Q}}^{\infty}(S)^{\otimes}$  est la  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique associée à la catégorie de  $\aleph$ -modèles monoïdale symétrique,  $\aleph$ -combinatoire, stable utilisée dans la construction de  $\mathcal{D}_{A^1}(X)$ .

**Lemme 3.3.14.** *Pour tout  $X \in \text{ob}(\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$ , le  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort  $(-)_{\mathcal{Q}} : \text{Mod}(\mathcal{Q}_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)^{\otimes} \rightarrow \text{Mod}((\mathcal{Q}_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathcal{Q}})^{\otimes}$  est une équivalence.*

*Démonstration.* D'après [Lur12, 2.1.3.8], il suffit de montrer que le  $(\infty, 1)$ -foncteur sous-jacent  $(-)_{\mathcal{Q}} : \text{Mod}(\mathcal{Q}_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*) \rightarrow \text{Mod}((\mathcal{Q}_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathcal{Q}})$  est une équivalence. Les objets de la forme  $(\mathcal{Q}_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*) \otimes_X \mathbf{y}_{\text{Set}_{\Delta, X}}(Y)(r)$ ,  $Y \in \text{ob}(\text{SmAff} \downarrow X)$ ,  $r \in \mathbf{Z}_{\leq 0}$ , engendrent  $\text{Mod}(\mathcal{Q}_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)$  par  $\aleph$ -petites  $(\infty, 1)$ -colimites et l'image de la famille des objets de cette forme par le  $(\infty, 1)$ -foncteur  $(-)_{\mathcal{Q}}$  engendre  $\text{Mod}((\mathcal{Q}_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathcal{Q}})$  par  $\aleph$ -petites  $(\infty, 1)$ -colimites. Comme le  $(\infty, 1)$ -foncteur  $(-)_{\mathcal{Q}}$  préserve les  $(\infty, 1)$ -colimites, il est essentiellement surjectif.

Montrons que  $(-)_{\mathcal{Q}}$  est pleinement fidèle. Comme  $\mathcal{S}\mathcal{H}^{\infty}(X)$  et  $\mathcal{D}_{A^1, \mathcal{Q}}^{\infty}(X)$  sont stables, il en est de même de  $\text{Mod}(\mathcal{Q}_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)$  et  $\text{Mod}((\mathcal{Q}_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathcal{Q}})$ . Il suffit donc de montrer que, pour tous  $M, N \in \text{ob}(\text{Mod}(\mathcal{Q}_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*))$ ,  $(-)_{\mathcal{Q}}$  induit un isomorphisme

$$\alpha_{M, N} : \pi_0 \text{map}_{\text{Mod}(\mathcal{Q}_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)}(M, N) \rightarrow \pi_0 \text{map}_{\text{Mod}((\mathcal{Q}_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathcal{Q}})}(M_{\mathcal{Q}}, N_{\mathcal{Q}}).$$

D'après [Rob13, Remark 5.13] et [Ayo07b, 4.5.67], les objets de la forme  $\mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y)(r)$ ,  $Y \in \text{ob}(\text{SmAff} \downarrow X)$ ,  $r \in \mathbf{Z}_{\leq 0}$ , forment une famille génératrice d'objets  $\aleph_0$ -présentables dans  $\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(S)$ . Il en est de même de la famille des objets de la forme  $\mathbf{y}_{\mathbf{Q}, X}(Y)(r)$  dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{A}^1, \mathbf{Q}}^\infty(X)$  d'après [CD12b, 6.2.2(ii)]. Du coup, grâce à 3.3.12 et [CD12b, 1.3.21], il suffit de montrer que  $\alpha_{M, N}$  est inversible pour  $M = \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \otimes_X \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y)(r)$  et  $N = \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \otimes_X \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y')(r')$ . On a  $(\mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y)(r))_{\mathbf{Q}} \cong \mathbf{y}_{\mathbf{Q}, X}(Y)(r)$ ,

$$\begin{aligned} & \pi_0 \text{map}_{\text{Mod}(\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)} \left( \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \otimes_X \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y)(r), \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \otimes_X \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y')(r') \right) \\ & \cong \pi_0 \text{map}_{\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)} \left( \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y)(r), \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \otimes_X \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y')(r') \right) \\ & \pi_0 \text{map}_{\text{Mod}((\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathbf{Q}})} \left( (\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \otimes_X \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y)(r))_{\mathbf{Q}}, (\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \otimes_X \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y')(r'))_{\mathbf{Q}} \right) \\ & \cong \pi_0 \text{map}_{\text{Mod}((\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathbf{Q}})} \left( (\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathbf{Q}} \otimes_X \mathbf{y}_{\mathbf{Q}, X}(Y)(r), (\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathbf{Q}} \otimes_X \mathbf{y}_{\mathbf{Q}, X}(Y')(r') \right) \\ & \cong \pi_0 \text{map}_{\mathcal{D}_{\mathbf{A}^1, \mathbf{Q}}^\infty(X)} \left( \mathbf{y}_{\mathbf{Q}, X}(Y)(r), (\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathbf{Q}} \otimes_X \mathbf{y}_{\mathbf{Q}, X}(Y')(r') \right) \end{aligned}$$

et ces équivalences sont compatibles à  $\alpha_{M, N}$ . On est amené à montrer que

$$\begin{array}{c} \pi_0 \text{map}_{\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)} \left( \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y)(r), \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \otimes_X \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y')(r') \right) \\ \downarrow \beta_{M, N} \\ \pi_0 \text{map}_{\mathcal{D}_{\mathbf{A}^1, \mathbf{Q}}^\infty(X)} \left( \mathbf{y}_{\mathbf{Q}, X}(Y)(r), (\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathbf{Q}} \otimes_X \mathbf{y}_{\mathbf{Q}, X}(Y')(r') \right) \end{array}$$

est inversible. On a remarqué dans 3.3.13 que  $\mathcal{D}_{\mathbf{A}^1, \mathbf{Q}}^\infty(X)$  est la localisation de Verdier de  $\mathcal{S}\mathcal{H}(X)$  par rapport à la sous-catégorie localisante  $\mathcal{S}$  engendrée par les objets homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables de torsion. D'après [Kra10, 4.8.1], il suffit de montrer que  $\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \otimes_X \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y')(r')$  appartient à l'orthogonale à droite  $\mathcal{S}^\perp$  de  $\mathcal{S}$ , c'est-à-dire que

$$0 = \pi_0 \text{map}_{\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)} \left( S, \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \otimes_X \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y')(r') \right)$$

pour tout  $S \in \mathcal{S}$ . Tout objet de  $\mathcal{S}$  est une  $\aleph$ -petite  $(\infty, 1)$ -colimite filtrante de la forme  $S = \text{colim}_{\alpha \in A} S_\alpha$ , avec  $S_\alpha$  un objet  $\aleph_0$ -présentable de torsion pour tout  $\alpha$ . On trouve alors

$$\begin{aligned} & \pi_0 \text{map}_{\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)} \left( S, \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \otimes_X \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y')(r') \right) \\ & \cong \pi_0 \lim_{\alpha \in A} \text{map}_{\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)} \left( S_\alpha, \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \otimes_X \mathbf{y}_{\text{Set}_\Delta, X}(Y')(r') \right) \end{aligned}$$

et il suffit de montrer que  $0 \cong \text{map}_{\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)} \left( S_\alpha, \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \right)$  pour tout  $\alpha \in A$ . D'après le théorème de Whitehead, il suffit de montrer que  $0 = \pi_0 \text{map}_{\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)} \left( S, \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \right)$  pour tout objet  $\aleph_0$ -présentable de torsion  $S$ , car  $\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)$  est stable.

Si  $M$  est un  $\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*$ -module, alors  $\pi_0 \text{map}_{\text{Mod}(\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)} (M, M)$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre. Effectivement, par adjonction,  $\pi_0 \text{map}_{\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)} \left( \mathbf{1}_X, \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \right)$  s'identifie à  $\kappa = H_{\text{dR}}^0(X/\kappa)$ , où  $H_{\text{dR}}^r(X/\kappa)$  désigne le  $r$ -ième  $\kappa$ -espace vectoriel de cohomologie de De Rham algébrique de  $X$  sur  $\kappa$ . Par suite, le morphisme canonique  $\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \rightarrow \underline{\text{hom}}_{\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*} (M, M)$  induit un morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} \kappa & \cong \pi_0 \text{map}_{\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)} \left( \mathbf{1}_X, \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \right) = \pi_0 \text{map}_{\text{Mod}(\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)} \left( \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*, \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^* \right) \\ & \rightarrow \pi_0 \text{map}_{\text{Mod}(\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)} \left( \varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*, \underline{\text{hom}}_{\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*} (M, M) \right) = \pi_0 \text{map}_{\text{Mod}(\varrho_{\text{dR}, X^*} \mathbf{1}_X^*)} (M, M). \end{aligned}$$

Par conséquent, si  $S \in \text{ob}(\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X))$ ,  $n \in \mathbf{Z}_{>0}$  et que  $n(\text{id}_S) = 0 \in \pi_0 \text{map}_{\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)}(S, S)$ , alors

$$0 = \frac{1}{n} f(n(\text{id}_S)) = \frac{n}{n} f(\text{id}_S) = f \in \pi_0 \text{map}_{\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)}(S, M)$$

pour tout  $f \in \pi_0 \text{map}_{\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)}(S, M)$ . Cela achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 3.3.15.** *Pour tout  $X \in \text{ob}(\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$ , il existe un objet  $\mathcal{E}_{\text{dR},X}$  de la catégorie  $\mathcal{C}\text{Alg}(\text{Sp}_{1_\kappa(1)}^\mathbb{C}(X, \text{Mod}(\kappa)))$  tel que le  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort  $\varrho_{\text{dR},X}^*$  de 3.3.9 se factorise de manière canonique par le  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort  $(-) \otimes_X \mathcal{E}_{\text{dR},X} : \mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)^\otimes \rightarrow \mathcal{D}^\infty(\mathcal{E}_{\text{dR},X})^\otimes$ , où  $\mathcal{D}^\infty(\mathcal{E}_{\text{dR},X})^\otimes$  est la  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{N}(\text{Mod}(\mathcal{E}_{\text{dR},X}^c)) [\mathcal{W}_{\mathcal{E}_{\text{dR},X}}^{-1}]^\otimes$  avec la notation de 3.3.11.*

*Démonstration.* D'après 3.3.10,  $\varrho_{\text{dR},X}^*$  se factorise de manière canonique par le  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort canonique  $\mathcal{S}\mathcal{H}^\infty(X)^\otimes \rightarrow \text{Mod}(\varrho_{\text{dR},X*} \mathbf{1}_X^*)^\otimes$ . D'après 3.3.14, on obtient une factorisation à travers  $\text{Mod}((\varrho_{\text{dR},X*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathbf{Q}})^\otimes$ . D'après 3.3.11(ii), on peut rectifier  $(\varrho_{\text{dR},X*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathbf{Q}}$  par un monoïde commutatif cofibrant  $\mathcal{E}_{\text{dR},X}$  de  $\text{Sp}_{1_{\mathbf{Q}}(1)}^\mathbb{C}(X, \text{Mod}(\mathbf{Q}))$ . En effet, on peut vérifier que les  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques de 1.6.3 avec  $\mathcal{T} = \text{Mod}(\mathbf{Q})$  sont équivalentes à  $\mathcal{D}_{A^1, \mathbf{Q}}(X)^\otimes$ . D'après 3.3.12, on a une équivalence canonique  $\text{Mod}((\varrho_{\text{dR},X*} \mathbf{1}_X^*)_{\mathbf{Q}}) \simeq \mathcal{N}(\text{Mod}(\mathcal{E}_{\text{dR},X}^c)) [\mathcal{W}_{\mathcal{E}_{\text{dR},X}}^{-1}]$ .  $\square$

**Définition 3.3.16.**

(i) Pour tout  $X \in \text{ob}(\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$ , on appelle **spectre de De Rham** le monoïde commutatif  $\mathcal{E}_{\text{dR}}$  de 3.3.14. Ce spectre n'est pas unique, mais la  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{D}^\infty(\mathcal{E}_{\text{dR},X})^\otimes$  est déterminée à équivalence près par la propriété universelle de 3.3.15. D'ailleurs, comme  $f_{\sharp} \varrho_{\text{dR},X}^* \simeq \varrho_{\text{dR},Y}^* f_{\sharp}$  pour  $(f : X \rightarrow Y) \in \text{mor}(\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$  lisse (3.3.9(iii)),  $f^* \varrho_{\text{dR},Y*} \mathbf{1}_Y^* \simeq \varrho_{\text{dR},X*} f^* \mathbf{1}_Y^*$  et l'on peut choisir les  $\mathcal{E}_{\text{dR},X}$  de telle manière qu'ils forment un monoïde commutatif homotopiquement cartésien de  $\text{Sp}_{1_{\mathbf{Q}}(1)}^\mathbb{C}((-), \text{Mod}(\mathbf{Q}))$ . Pour être un peu plus exact, il faut remarquer que les  $(\infty, 1)$ -adjonctions  $\varrho_{\text{dR},X}^* \dashv \varrho_{\text{dR},X*}$  et  $f^* \dashv f_*$  induisent des adjonctions entre  $(\infty, 1)$ -catégories des monoïdes commutatifs, parce que les  $(\infty, 1)$ -adjoints à gauche sont monoïdaux symétriques forts. On peut ensuite vérifier que les morphismes d'unité des deux  $(\infty, 1)$ -adjonctions induisent des morphismes de monoïdes commutatifs lorsqu'ils sont évalués sur des monoïdes commutatifs. Si  $\mathcal{E}_{\text{dR},\mathbf{B}}$  est cofibrant, alors les  $\mathcal{E}_{\text{dR},X} := \pi_X^* \mathcal{E}_{\text{dR},\mathbf{B}}$  forment un monoïde commutatif cartésien et homotopiquement cartésien, où  $(\pi : X \rightarrow \mathbf{B}) \in \text{ob}(\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$ .

(ii) Étant donné un spectre de De Rham  $\mathcal{E}_{\text{dR},X}$  sur  $X \in \text{ob}(\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$ , on notera  $\chi_{\text{dR},X}^* : \mathcal{D}^\infty(\mathcal{E}_{\text{dR},X})^\otimes \rightarrow \text{Jnd}(\mathcal{D}_h^{\text{b},\infty}(\mathcal{Z}_X))^\otimes$  le  $(\infty, 1)$ -foncteur monoïdal symétrique fort canonique et on l'appellera  $(\infty, 1)$ -foncteur de **comparaison de De Rham**.

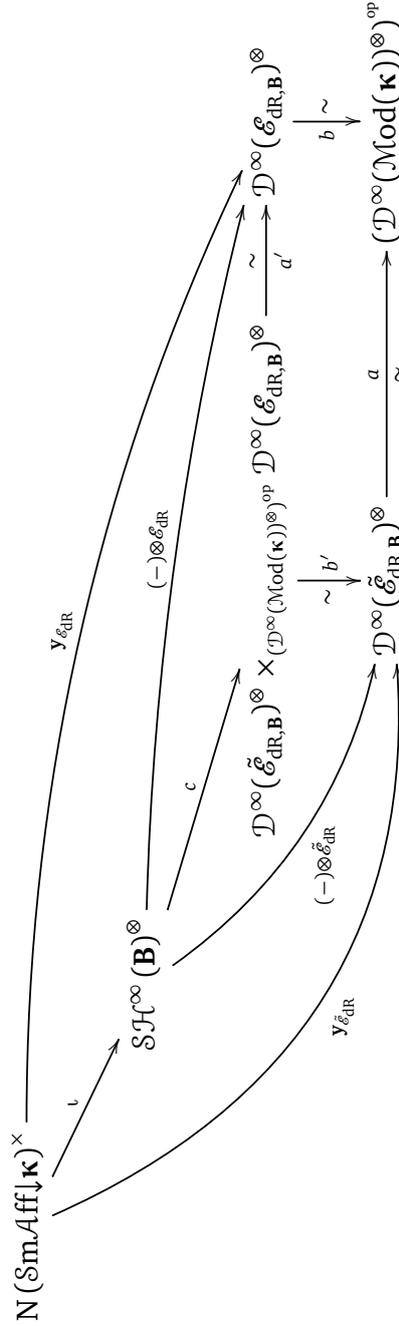
(iii) On note  $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{dR},\mathbf{B}} \in \text{ob}(\text{Sp}_{1_\kappa(1)}^\mathbb{C}(\mathbf{B}, \text{Mod}(\kappa)))$  un monoïde commutatif cofibrant qui représente la  $\text{Mod}(\kappa)$ -théorie de Weil mixte  $E_{\text{dR},\mathbf{B}}$  donnée par  $X = \text{Spec}(A) \mapsto \Omega_{A/\kappa} : \text{Sm}\text{Aff} \downarrow \kappa \rightarrow \mathcal{C}\text{Alg}(\text{Cplx}(\text{Mod}(\kappa)))$  ([CD12a, 3.1.5]). Pour tout  $(\pi_X : X \rightarrow \mathbf{B}) \in \text{ob}(\text{Sch} \downarrow \kappa)$ , on pose  $\mathcal{E}_{\text{dR},X} := \pi_X^* \tilde{\mathcal{E}}_{\text{dR},\mathbf{B}}$ . On rappelle que, comme  $f^*$  est un foncteur de Quillen à gauche, les  $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{dR},X}$  forment un monoïde commutatif cartésien et homotopiquement cartésien de la catégorie fibrée  $\text{Sp}_{1_\kappa(1)}^\mathbb{C}((-), \text{Mod}(\kappa))$ . De plus, les catégories homotopiques  $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{E}}_{\text{dR},X})$  des catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdales symétriques  $\text{Mod}(\tilde{\mathcal{E}}_{\text{dR},X})$  forment une catégorie motivique. Enfin, on note  $\mathcal{D}^\infty(\tilde{\mathcal{E}}_{\text{dR},X})^\otimes$  la  $(\infty, 1)$ -catégorie monoïdale symétrique associée à la catégorie de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdale symétrique  $\text{Mod}(\tilde{\mathcal{E}}_{\text{dR},X})$ .

**Proposition 3.3.17.** *Soit  $X \in \text{ob}(\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$ . Il existe une équivalence faible  $\mathcal{E}_{\text{dR},X} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\text{dR},X}$  dans  $\mathcal{C}\text{Alg}(\text{Sp}_{\mathbf{1}_\kappa(1)}^\otimes(X, \text{Mod}(\kappa)))$ .*

*Démonstration.* Par définition,  $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{dR},X}$  est un monoïde commutatif cartésien et homotopiquement cartésien, de sorte que l'on a une équivalence faible de monoïdes commutatifs  $\pi_X^* \tilde{\mathcal{E}}_{\text{dR},\mathbf{B}} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{E}}_{\text{dR},X}$ . De même, comme on l'a remarqué dans 3.3.16(i), on peut supposer que  $\mathcal{E}_{\text{dR},X}$  est aussi un monoïde commutatif cartésien et homotopiquement cartésien. Ainsi, il suffit de traiter du cas  $X = \mathbf{B}$ .

D'après 2.2.7, on a une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques  $a : \mathcal{D}^\infty(\tilde{\mathcal{E}}_{\text{dR},\mathbf{B}})^\otimes \xrightarrow{\sim} (\mathcal{D}^\infty(\text{Mod}(\kappa))^\otimes)^{\text{op}}$ . Le même argument montre qu'il existe une équivalence  $b : \mathcal{D}^\infty(\mathcal{E}_{\text{dR},\mathbf{B}})^\otimes \xrightarrow{\sim} (\mathcal{D}^\infty(\text{Mod}(\kappa))^\otimes)^{\text{op}}$ . En effet,  $\mathcal{SH}_Q(\mathbf{B})^\otimes$  et donc  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\text{dR},\mathbf{B}})$  sont engendrées en tant que catégories triangulées par les objets simultanément homotopiquement  $\aleph_0$ -présentables et homotopiquement fortement dualisables. Les catégories  $\text{Mod}(\tilde{\mathcal{E}}_{\text{dR},\mathbf{B}})$  et  $\text{Mod}(\mathcal{E}_{\text{dR},\mathbf{B}})$  admettent des structures de  $\mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\kappa))_{\text{inj}}$ -catégories de  $\mathcal{U}$ -modèles monoïdales symétriques. Le foncteur  $\mathbf{R}\text{hom}_{\mathcal{E}_{\text{dR},\mathbf{B}}}^{\mathcal{C}\text{plx}(\text{Mod}(\kappa))}(-, \mathcal{E}_{\text{dR},\mathbf{B}}) : \mathcal{D}(\mathcal{E}_{\text{dR},\mathbf{B}}) \rightarrow \mathcal{D}(\text{Mod}(\kappa))^{\text{op}}$  est monoïdal symétrique fort d'après la formule de Künneth et la stratégie de [CD12a, 2.6.2] montre qu'il est donc pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

On considère le diagramme essentiellement commutatif



de  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques. Le carré est cartésien et les flèches diagonales sont les flèches canoniques. En particulier,  $c$  est la flèche induite par la propriété universelle du  $(\infty, 1)$ -produit fibré. On rappelle que la  $(\infty, 1)$ -catégorie des  $(\infty, 1)$ -catégories monoïdales symétriques, localement  $\mathcal{U}$ -présentables est stable par  $\mathcal{U}$ -petites  $(\infty, 1)$ -limites ([Lur09a, 5.5.3.13], [Lur12, 3.2.2.4]). La flèche  $c$  existe parce que les deux composés  $a((-) \otimes \tilde{\mathcal{E}}_{dR,B})$  et  $b((-) \otimes \mathcal{E}_{dR,B})$  sont canoniquement équivalents. Pour le voir, d'après 3.3.8, il suffit de noter que les deux composés  $a y_{\tilde{\mathcal{E}}_{dR}}$  et  $b y_{\mathcal{E}_{dR}}$  sont équivalents, ce qui est vrai essentiellement par la construction de  $\rho_{dR,B}^*$  donnée dans 3.3.5. Toutes les  $(\infty, 1)$ -catégories du diagramme sont localement  $\mathcal{U}$ -présentables et toutes les flèches sont des  $(\infty, 1)$ -adjoints à gauche, car elles préservent les  $\mathcal{U}$ -petites  $(\infty, 1)$ -colimites. On note  $a_*$ ,  $a'_*$ ,  $b_*$ ,  $b'_*$  et  $c_*$  les  $(\infty, 1)$ -adjoints à droite de  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$  et  $c$ , respectivement.

Comme les flèches du carré cartésien sont des équivalences monoïdales symétriques, il en est ainsi de  $a_*$ ,  $a'_*$ ,  $b_*$ ,  $b'_*$  et  $c_*$ . Par suite, on a des équivalences de monoïdes commutatifs

$a'_* \tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{dR},\mathbf{B}} \cong \mathbf{1} \cong b'_* \mathcal{E}_{\mathrm{dR},\mathbf{B}}$ , où  $\mathbf{1}$  désigne l'unité de  $\mathcal{D}^\infty(\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{dR},\mathbf{B}})^\otimes \times_{(\mathcal{D}^\infty(\mathrm{Mod}(\kappa))^\otimes)^{\mathrm{op}}} \mathcal{D}^\infty(\mathcal{E}_{\mathrm{dR},\mathbf{B}})^\otimes$ , d'où les équivalences de monoïdes commutatifs

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{dR},\mathbf{B}} \cong c_* a'_* \tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{dR},\mathbf{B}} \cong c_* b'_* \mathcal{E}_{\mathrm{dR},\mathbf{B}} \cong \mathcal{E}_{\mathrm{dR},\mathbf{B}}$$

de  $\mathcal{SH}^\infty(\mathbf{B})^\otimes$ . On en déduit une équivalence de monoïdes commutatifs de  $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1, \mathbf{Q}}^\infty(\mathbf{B})^\otimes$  et, quitte à rectifier cette équivalence en appliquant [Lur12, 4.4.4.7], on obtient une équivalence  $\mathcal{E}_{\mathrm{dR},\mathbf{B}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{dR},\mathbf{B}}$  de monoïdes commutatifs stricts de  $\mathrm{Sp}_{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(1)}^\mathbb{S}(\mathbf{B}, \mathrm{Mod}(\mathbf{Q}))$ .  $\square$

**Proposition 3.3.18.** *Les  $(\infty, 1)$ -foncteurs  $\chi_{\mathrm{dR}, X}^*$ ,  $X \in \mathrm{ob}(\mathrm{Sm}^{\mathrm{qproj}} \downarrow \kappa)$  induisent un morphisme de catégories triangulées  $\mathrm{Sm}$ -prémotiviques  $\chi_{\mathrm{dR}}^* : \mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathrm{dR},(-)}) \rightarrow \mathrm{ho}(\mathrm{Jnd}(\mathcal{D}_h^{\mathrm{b},\infty}(\mathcal{D}_{(-)/\kappa}))$ ). En particulier, le morphisme d'échange*

$$f^* \chi_{\mathrm{dR}, Y}^* \rightarrow \chi_{\mathrm{dR}, X}^* f^*$$

est une équivalence de  $(\infty, 1)$ -foncteurs  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathrm{dR}, Y}) \rightarrow \mathrm{Jnd}(\mathcal{D}_h^{\mathrm{b},\infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa}))$  pour tout  $(f : X \rightarrow Y) \in \mathrm{mor}(\mathrm{Sm}^{\mathrm{qproj}} \downarrow \kappa)$  et il en est de même du morphisme

$$f_{\#} \chi_{\mathrm{dR}, X}^* \rightarrow \chi_{\mathrm{dR}, Y}^* f_{\#}$$

lorsque  $f$  est lisse.

*Démonstration.* Cela résulte de 3.3.9, 3.3.15 et [CD12b, 1.2.13].  $\square$

**Lemme 3.3.19.** *Soit  $(f : X \rightarrow Y) \in \mathrm{mor}(\mathrm{Sm}^{\mathrm{qproj}} \downarrow \kappa)$  un morphisme projectif. Le morphisme d'échange  $\chi_{\mathrm{dR}, Y}^* f_* \rightarrow f_* \chi_{\mathrm{dR}, X}^*$  est une équivalence de  $(\infty, 1)$ -foncteurs.*

*Démonstration.* On choisit une factorisation  $f = pi$  avec  $i : X \hookrightarrow \mathbf{P}_Y^r$  une immersion fermée et  $p : \mathbf{P}_Y^r \rightarrow Y$  un fibré projectif trivial. D'après [Ayo07a, 1.2.5], on dispose d'un diagramme essentiellement commutatif

$$\begin{array}{ccc} \chi_{\mathrm{dR}, Y}^* f_* & \xrightarrow{\quad} & f_* \chi_{\mathrm{dR}, X}^* \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \chi_{\mathrm{dR}, Y}^* p_* i_* & \xrightarrow{\quad} & p_* \chi_{\mathrm{dR}, \mathbf{P}_Y^r}^* i_* \xrightarrow{\quad} p_* i_* \chi_{\mathrm{dR}, X}^* \end{array}$$

et il suffit de traiter des cas  $f = p$  et  $f = i$ . Le cas  $f = i$  résulte de ce que  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\mathrm{dR},(-)})$  et  $\mathrm{ho}(\mathcal{D}_h^{\mathrm{b},\infty}(\mathcal{D}_{(-)/\kappa}))$  vérifient la propriété de localisation par rapport aux immersions fermées dans  $\mathrm{Sm}^{\mathrm{qproj}} \downarrow \kappa$  ([CD12b, 2.3.11, 7.2.17], 3.1.7(iii), 3.3.18). Si  $f = p$ , alors on obtient un carré essentiellement commutatif

$$\begin{array}{ccc} \chi_{\mathrm{dR}, Y}^* p_! & \longleftarrow & p_! \chi_{\mathrm{dR}, \mathbf{P}_Y^r}^* \\ \alpha_p \downarrow & & \downarrow \alpha_p \\ \chi_{\mathrm{dR}, Y}^* p_* & \longrightarrow & p_* \chi_{\mathrm{dR}, \mathbf{P}_Y^r}^* \end{array}$$

où  $\alpha : p_! \rightarrow p_*$  est le morphisme canonique et la flèche horizontale supérieure est le morphisme d'échange canonique (cf. [Ayo10, 3.12]). Or les  $\alpha_p$  sont des équivalences car  $p$  est projectif et la flèche horizontale supérieure est aussi une équivalence car  $p_! \cong p_{\#}(-d)[-2r] \cong p_{\#}[-2r]$  d'après [CD12a, 2.1.6] et le morphisme d'échange  $p_{\#} \chi_{\mathrm{dR}, \mathbf{P}_Y^r}^* \rightarrow \chi_{\mathrm{dR}, Y}^* p_{\#}$  est une équivalence d'après 3.3.18.  $\square$

**Théorème 3.3.20.** *Pour tout  $X \in \text{ob}(\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$ , le  $(\infty, 1)$ -foncteur  $\chi_{\text{dR}, X}^* : \mathcal{D}_{\mathfrak{N}_0}^\infty(\mathcal{E}_{\text{dR}, X}) \rightarrow \mathcal{D}_h^{\text{b}, \infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa})$  est pleinement fidèle.*

*Démonstration.* D'après [CD12b, 4.4.3] et [CD12a, 2.1.6], les objets homotopiquement  $\mathfrak{N}_0$ -présentables de la forme  $\mathbf{R}f_* \mathcal{E}_{\text{dR}, Y}$ ,  $f : Y \rightarrow X$  projectif,  $Y$  régulier, engendrent la catégorie triangulée  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\text{dR}, X})$ . De plus,  $\chi_{\text{dR}, X}^* f_* \mathcal{E}_{\text{dR}, Y}$  est homotopiquement  $\mathfrak{N}_0$ -présentable. Par conséquent,  $\chi_{\text{dR}, X}^*$  préservent les objets homotopiquement  $\mathfrak{N}_0$ -présentables d'après le théorème de Thomason [Nee01, 4.4.9]. On prétend que l'unité  $M \rightarrow \chi_{\text{dR}, X}^* \chi_{\text{dR}, X}^* M$  est une équivalence pour tout  $M \in \text{ob}(\mathcal{D}_{\mathfrak{N}_0}^\infty(\mathcal{E}_{\text{dR}, X}))$ . Cette propriété étant stable par  $(\infty, 1)$ -limites finies et par rétractes, il suffit de montrer qu'elle est satisfaite pour  $M$  de la forme  $f_* \mathcal{E}_{\text{dR}, Y}$ ,  $(f : Y \rightarrow X) \in \text{mor}(\text{Sm}^{\text{qproj}} \downarrow \kappa)$  projectif. D'après [Ayo07a, 1.2.5], on a un carré essentiellement commutatif

$$\begin{array}{ccc} f_* \mathcal{E}_{\text{dR}, Y} & \longrightarrow & \chi_{\text{dR}, X}^* \chi_{\text{dR}, X}^* f_* \mathcal{E}_{\text{dR}, Y} \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ f_* \chi_{\text{dR}, Y}^* \chi_{\text{dR}, Y}^* \mathcal{E}_{\text{dR}, Y} & \xrightarrow{\sim} & \chi_{\text{dR}, X}^* f_* \chi_{\text{dR}, Y}^* \mathcal{E}_{\text{dR}, Y} \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est une équivalence d'après 3.3.19 et la flèche horizontale inférieure est une équivalence d'après 3.3.18. La flèche verticale de gauche en est une parce que  $\mathcal{E}_{\text{dR}, Y} \xrightarrow{\sim} \chi_{\text{dR}, Y}^* \chi_{\text{dR}, Y}^* \mathcal{E}_{\text{dR}, Y} \cong \chi_{\text{dR}, Y}^* \mathbf{1}_Y^*$  d'après 3.3.17.  $\square$

*Remarque 3.3.21.* L'auteur ne sait pas montrer que  $\chi_{\text{dR}, X}^*$  commute à  $f_*$  pour  $f$  un morphisme quelconque de  $\kappa$ -schémas quasi-projectifs, lisses. Au vu de 3.3.19, la stratégie serait de montrer qu'il commutait à  $i^!$  pour  $i$  une immersion fermée et d'appliquer la propriété de localisation (3.1.7(iii)). En revanche, il paraît que cette méthode nous amène à considérer des schémas singuliers. Bien entendu, on peut facilement se ramener au cas où ces schémas singuliers sont des diviseurs à croisements normaux dans un schéma régulier, mais il faut quand même étendre le formalisme des six opérations sur les  $(\infty, 1)$ -catégories  $\mathcal{D}_h^{\text{b}, \infty}(\mathcal{D}_{X/\kappa})$  au cas où  $X$  est un tel diviseur à croisements normaux.

### 3.4 CORRESPONDANCE DE RIEMANN-HILBERT

*Notation 3.4.0.* Soit  $(\pi_X : X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{C})) \in \text{ob}(\text{Sch}^{\text{qproj}} \downarrow \mathbf{C})$ .

(i) On pose  $\mathbf{B} := \text{Spec}(\mathbf{C})$ .

(ii) On note  $\mathcal{E}_{\text{dR}, \mathbf{B}} \in \text{ob}(\mathcal{C}\text{Alg}(\text{Sp}_{1_{\mathbf{C}}(1)}^\mathfrak{S}(X, \text{Mod}(\mathbf{C})))$ ) un monoïde commutatif cofibrant qui représente la  $\text{Mod}(\mathbf{C})$ -théorie de Weil mixte  $E_{\text{dR}}$  associée à la cohomologie de De Rham algébrique ([CD12a, 3.1.5]) et  $\mathcal{E}_{\text{dR}, X} := \pi_X^* \mathcal{E}_{\text{dR}, \mathbf{B}}$  son image inverse sur  $X$ .

(iii) On note  $\mathcal{E}_{\text{Betti}, \mathbf{B}} \in \text{ob}(\mathcal{C}\text{Alg}(\text{Sp}_{1_{\mathbf{Q}}(1)}^\mathfrak{S}(X, \text{Mod}(\mathbf{Q})))$ ) un monoïde commutatif cofibrant qui représente l'image de l'unité par l'adjoint à droite du foncteur de réalisation de Betti

$$\mathcal{S}\mathcal{H}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{B}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{B}(\mathbf{C})^{\text{an}}, \mathbf{Q})$$

de [Ayo10, 2.1], où  $\mathcal{D}(X(\mathbf{C})^{\text{an}}, \mathbf{Q})$  désigne la catégorie dérivée des faisceaux analytiques de  $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels sur  $X$ . Un tel monoïde commutatif strict existe d'après [Lur12, 4.4.4.7]. En particulier,  $\mathcal{E}_{\text{Betti}, \text{Spec}(\mathbf{C})}$  représente la cohomologie de Betti des  $\mathbf{C}$ -schémas quasi-projectifs, lisses d'après [Ayo10, 2.5]. On note  $\mathcal{E}_{\text{Betti}, X} := \pi_X^* \mathcal{E}_{\text{Betti}, \mathbf{B}}$  son image inverse sur  $X$ .

(iv) Si  $X$  est régulier, alors on note  $\Omega_{X(\mathbf{C})^{\text{an}}}$  le complexe de De Rham analytique. Il s'agit d'un faisceau de dg- $\mathbf{C}$ -algèbres sur  $X(\mathbf{C})^{\text{an}}$ . On en déduit un préfaisceau de dg- $\mathbf{C}$ -algèbres sur  $\text{SmAff}\downarrow\mathbf{C}$  donné par  $E_{\text{dR,an}}(X) := \Gamma(X(\mathbf{C})^{\text{an}}, \Omega_{X(\mathbf{C})^{\text{an}}})$ . D'après [CD12b, 17.2.22],  $E_{\text{dR,an}}$  est une  $\text{Mod}(\mathbf{C})$ -théorie de Weil mixte et il existe un morphisme canonique  $E_{\text{dR,B}} \rightarrow E_{\text{dR,an,B}}$  qui est un quasi-isomorphisme localement pour la topologie Nisnevich.

(v) On note  $\mathcal{E}_{\text{dR,an,B}} \in \text{ob} \left( \mathcal{C}\text{Alg} \left( \text{Sp}_{1_{\mathbf{C}}(1)}^{\mathfrak{S}}(\mathbf{B}, \text{Mod}(\mathbf{C})) \right) \right)$  un monoïde commutatif cofibrant qui représente  $E_{\text{dR,an}}$  et  $\mathcal{E}_{\text{dR,an,X}} := \pi_X^* \mathcal{E}_{\text{dR,an,B}}$  son image inverse sur  $X$ . On déduit de [CD12b, 17.2.22] une équivalence faible  $\mathcal{E}_{\text{dR,X}} \simeq \mathcal{E}_{\text{dR,an,X}}$  de monoïdes commutatifs.

(vi) On note  $\mathcal{E}_{\text{Betti,X}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \in \text{ob} \left( \mathcal{C}\text{Alg} \left( \text{Sp}_{1_{\mathbf{C}}(1)}^{\mathfrak{S}}(X, \text{Mod}(\mathbf{C})) \right) \right)$  l'image de  $\mathcal{E}_{\text{Betti,B}}$  par le foncteur  $(-)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$  (1.6.11). Comme remarqué dans [CD12b, 17.2.22], on a aussi une équivalence faible de monoïdes commutatifs  $\mathcal{E}_{\text{Betti,X}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \simeq \mathcal{E}_{\text{dR,an,X}}$ .

(vii) On note  $\mathcal{D}_{\text{gm}}(X(\mathbf{C})^{\text{an}}, \mathbf{C})$  la sous-catégorie triangulée épaisse de  $\mathcal{D}(X(\mathbf{C})^{\text{an}}, \mathbf{C})$  engendrée par les objets de la forme  $\mathbf{R}(f)_*^{\text{an}} \mathbf{C}_{Y(\mathbf{C})^{\text{an}}}$ , où  $(f : Y \rightarrow X) \in \text{mor}(\text{Sm}^{\text{qproj}}\downarrow\mathbf{C})$ . De même, on note  $\mathcal{D}_{\text{gm}}(\mathcal{D}_{X/\mathbf{C}})$  la sous-catégorie triangulée épaisse de  $\mathcal{D}_{\text{h}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{X/\mathbf{C}})$  engendrée par les objets de la forme  $f_* \mathbf{1}_Y^*$ ,  $(f : Y \rightarrow X) \in \text{mor}(\text{Sm}^{\text{qproj}}\downarrow\mathbf{C})$ . Ces sous-catégories sont stables par les six opérations de Grothendieck. En effet, pour  $\mathcal{D}_{\text{gm}}(X(\mathbf{C})^{\text{an}}, \mathbf{C})$ , il suffit d'appliquer [CD12b, 4.2.29]. Pour  $\mathcal{D}_{\text{gm}}(\mathcal{D}_{X/\mathbf{C}})$ , on n'est pas dans la situation de [CD12b, 4.4.25], parce que  $\mathcal{D}_{\text{gm}}(\mathcal{D}_{X/\kappa})$  n'est définie que pour  $X$  régulier et la condition [CD12b, 2.0(b)] n'est donc pas satisfaite. Néanmoins, on peut imiter la démonstration de [CD12b, 4.4.25].

**Théorème 3.4.1.** *Soit  $X \in \text{ob}(\text{Sm}^{\text{qproj}}\downarrow\mathbf{C})$ . Il existe une équivalence de catégories triangulées, monoïdales symétriques*

$$\chi_{\text{RH}}^* : (\mathcal{D}_{\text{gm}}(X(\mathbf{C})^{\text{an}}, \mathbf{C}), \otimes_{\mathbf{C}}) \simeq (\mathcal{D}_{\text{gm}}(\mathcal{D}_{X/\mathbf{C}}), \otimes_X^*).$$

Si  $(f : X \rightarrow Y) \in \text{mor}(\text{Sm}^{\text{qproj}}\downarrow\mathbf{C})$ , alors  $\chi_{\text{RH}}^*$  commute à  $f^*$ , à  $f_{\#}$  pour  $f$  lisse et à  $f_*$  pour  $f$  projectif.

*Démonstration.* On a des équivalences faibles  $\mathcal{E}_{\text{Betti,X}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \simeq \mathcal{E}_{\text{dR,an,X}}$  et  $\mathcal{E}_{\text{dR,an,X}} \simeq \mathcal{E}_{\text{dR,X}}$  dans  $\mathcal{C}\text{Alg} \left( \text{Sp}_{1_{\mathbf{C}}(1)}^{\mathfrak{S}}(X, \text{Mod}(\mathbf{C})) \right)$ . On en déduit une équivalence de catégories triangulées, monoïdales symétriques  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\text{Betti,X}}) \cong \mathcal{D}(\mathcal{E}_{\text{dR,X}})$ . On conclut en appliquant [CD12b, (17.1.7.6)], 3.3.18, 3.3.19 et 3.3.20.  $\square$

*Remarque 3.4.2.* Si, au lieu de considérer la théorie classique des  $\mathcal{D}$ -modules holonomes, on préfère les catégories  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\text{dR,X}})$ , alors l'analogie de 3.4.1 reste vrai. En fait, tautologiquement, cette correspondance de Riemann-Hilbert est vraie également sur les  $\mathbf{C}$ -schémas singuliers et elle commute à toutes les six opérations de Grothendieck.

## BIBLIOGRAPHIE

- [AR94] Jiří ADÁMEK et Jiří ROSICKÝ : *Locally presentable and accessible categories*, volume 189 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Art62] Michael ARTIN : *Grothendieck Topologies : Notes on a Seminar, Spring, 1962*. Harvard University, Department of Mathematics, 1962.
- [Ayo07a] Joseph AYOUB : Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. I. *Astérisque*, (314):x+466 pp. (2008), 2007.
- [Ayo07b] Joseph AYOUB : Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. II. *Astérisque*, (315):vi+364 pp. (2008), 2007.
- [Ayo10] Joseph AYOUB : Note sur les opérations de Grothendieck et la réalisation de Betti. *J. Inst. Math. Jussieu*, 9(2):225–263, 2010.
- [Ayo11] Joseph AYOUB : La réalisation étale et les opérations de Grothendieck. <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0989/>, January 2011.
- [Bar10] Clark BARWICK : On left and right model categories and left and right Bousfield localizations. *Homology, Homotopy and Applications*, 12(2):245–320, 2010.
- [BD00] Alexander A. BEĪLINSON et Vladimir DRINFEL'D : Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves. <http://www.math.uchicago.edu/~mitya/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf>, February 2000.
- [BeĪ86] Alexander A. BEĪLINSON : Notes on absolute Hodge cohomology. In *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colorado, 1983)*, volume 55 de *Contemporary Mathematics*, pages 35–68. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [BeĪ87] Alexander A. BEĪLINSON : Height pairing between algebraic cycles. In *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985)*, volume 67 de *Contemp. Math.*, pages 1–24. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [Bek00] Tibor BEKE : Sheafifiable homotopy model categories. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 129(3):447–475, 2000.
- [Bla01] Benjamin A. BLANDER : Local projective model structures on simplicial presheaves. *K-Theory*, 24(3):283–301, 2001.
- [Bon10] Mikhail V. BONDARKO : Weight structures vs.  $t$ -structures ; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general). *J. K-Theory*, 6(3):387–504, 2010.
- [Bor87] Armand BOREL : *Algebraic D-modules*. Perspectives in mathematics. Academic Press, 1987.
- [Bor94] Francis BORCEUX : *Handbook of categorical algebra. 2*, volume 51 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Categories and structures.
- [Bro73] Kenneth S. BROWN : Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 186:419–458, 1973.
- [BZN11] David BEN-ZVI et David NADLER : The character theory of a complex group. <http://arxiv.org/abs/0904.1247>, 2011.

- [Car12] Daniel CARO : The formalism of Grothendieck’s six operations in  $p$ -adic cohomologies. <http://arXiv.org/abs/1209.4020>, 2012.
- [CD09] Denis-Charles CISINSKI et Frédéric DÉGLISE : Local and stable homological algebra in Grothendieck abelian categories. *Homology, Homotopy and Applications*, 11(1): 219–260, 2009.
- [CD12a] Denis-Charles CISINSKI et Frédéric DÉGLISE : Mixed Weil cohomologies. *Advances in Mathematics*, 230(1):55–130, 2012.
- [CD12b] Denis-Charles CISINSKI et Frédéric DÉGLISE : Triangulated categories of mixed motives, 2012. <http://arxiv.org/abs/0912.2110>.
- [Cis10] Denis-Charles CISINSKI : Catégories dérivables. *Bull. Soc. Math. France*, 138(3): 317–393, 2010.
- [Del70] Pierre DELIGNE : *Équations différentielles à points singuliers réguliers*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [Del71] Pierre DELIGNE : Théorie de Hodge. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (40):5–57, 1971.
- [Del90] Pierre DELIGNE : Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 de *Progr. Math.*, pages 111–195. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [DHI04] Daniel DUGGER, Sharon HOLLANDER et Daniel C. ISAKSEN : Hypercovers and simplicial presheaves. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 136(1):9–51, 2004.
- [DK80] W. G. DWYER et D. M. KAN : Calculating simplicial localizations. *J. Pure Appl. Algebra*, 18(1):17–35, 1980.
- [DM89] Pierre DELIGNE et James S. MILNE : In *Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties*, numéro n° 900 de Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1989.
- [DRØ03] Bjørn Ian DUNDAS, Oliver RÖNDIGS et Paul Arne ØSTVÆR : Motivic functors. *Doc. Math.*, 8:489–525 (electronic), 2003.
- [Eis95] David EISENBUD : *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995.
- [GR11] Dennis GAITSGORY et Nick ROZENBLYUM : Crystals and D-modules. <http://arxiv.org/abs/1111.2087>, 2011.
- [Har75] Robin HARTSHORNE : On the De Rham Cohomology of Algebraic Varieties. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 45(1):6–99, 1975.
- [Héb11] David HÉBERT : Structure de poids à la Bondarko sur les motifs de Beilinson. *Compos. Math.*, 147(5):1447–1462, 2011.
- [Hir03] Philip S. HIRSCHHORN : *Model categories and their localizations*, volume 99 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Hov99] Mark HOVEY : *Model categories*, volume 63 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [Hov01] Mark HOVEY : Spectra and symmetric spectra in general model categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 165(1):63–127, 2001.
- [Hov04] Mark HOVEY : Homotopy theory of comodules over a Hopf algebroid. In *Homotopy theory : relations with algebraic geometry, group cohomology, and algebraic K-theory*, volume 346 de *Contemp. Math.*, pages 261–304. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

- [HTT08] Ryoshi Hotta, Kiyoshi Takeuchi et Toshiyuki Tanisaki : *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, volume 236 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008. Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi.
- [Hub93] Annette Huber : Calculation of derived functors via Ind-categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 90(1):39–48, 1993.
- [Hub00] Annette Huber : Realization of Voevodsky’s motives. *J. Algebraic Geom.*, 9(4):755–799, 2000.
- [Hub04] Annette Huber : Corrigendum to : “Realization of Voevodsky’s motives” [*J. Algebraic Geom.* 9 (2000), no. 4, 755–799 ; mr1775312]. *J. Algebraic Geom.*, 13(1):195–207, 2004.
- [Jar86] J. F. Jardine : Simplicial objects in a Grothendieck topos. In *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*, volume 55 de *Contemp. Math.*, pages 193–239. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [Jar00] J. F. Jardine : Motivic symmetric spectra. *Doc. Math.*, 5:445–553 (electronic), 2000.
- [Kap91] Mikhail Kapranov : On DG-modules over the de Rham complex and the vanishing cycles functor. In Spencer Bloch, Igor Dolgachev et William Fulton, éditeurs : *Algebraic Geometry*, volume 1479 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 57–86. Springer, 1991. 10.1007/BFb0086264.
- [Kel05] Gregory Maxwell Kelly : Basic concepts of enriched category theory. *Repr. Theory Appl. Categ.*, (10):vi+137, 2005. Reprint of the 1982 original [Cambridge Univ. Press, Cambridge ; MR0651714].
- [Kra10] Henning Krause : Localization theory for triangulated categories. In *Triangulated categories*, volume 375 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 161–235. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [Lev98] Marc Levine : *Mixed motives*, volume 57 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [Lur09a] Jacob Lurie : *Higher topos theory*, volume 170 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
- [Lur09b] Jacob Lurie : Notes on crystals and algebraic  $\mathcal{D}$ -modules. [http://www.math.harvard.edu/~gaitsgde/grad\\_2009/SeminarNotes/Nov17-19\(Crystals\).pdf](http://www.math.harvard.edu/~gaitsgde/grad_2009/SeminarNotes/Nov17-19(Crystals).pdf), November 2009.
- [Lur12] Jacob Lurie : Higher Algebra. <http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/higheralgebra.pdf>, August 2012.
- [LV06] Wendy Lowen et Michel Van den Bergh : Deformation theory of abelian categories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(12):5441–5483 (electronic), 2006.
- [LW12] Florence LeComte et Nathalie Wachs : Réalisations de Hodge des motifs de Voevodsky. <http://arxiv.org/abs/0911.5611>, 2012.
- [Mat89] Hideyuki Matsumura : *Commutative ring theory*, volume 8 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second édition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

- [Mor04] Fabien MOREL : An introduction to  $A^1$ -homotopy theory. In *Contemporary developments in algebraic K-theory*, ICTP Lect. Notes, XV, pages 357–441 (electronic). Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004.
- [MV99] Fabien MOREL et Vladimir VOEVODSKY :  $A^1$ -homotopy theory of schemes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (90):45–143 (2001), 1999.
- [Nee01] Amnon NEEMAN : *Triangulated categories*, volume 148 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [Oor64] Frans OORT : Yoneda extensions in abelian categories. *Math. Ann.*, 153:227–235, 1964.
- [Pos11] Leonid POSITSSELSKI : Two kinds of derived categories, Koszul duality, and comodule-contramodule correspondence. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 212(996): vi+133, 2011.
- [PS08] Chris A. M. PETERS et Joseph H. M. STEENBRINK : *Mixed Hodge structures*, volume 52 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [Rio05] Joël RIOU : Dualité de Spanier-Whitehead en géométrie algébrique. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 340(6):431–436, 2005.
- [Rio07] Joël RIOU : Catégorie homotopique stable d’un site suspendu avec intervalle. *Bull. Soc. Math. France*, 135(4):495–547, 2007.
- [Rob13] Marco ROBALO : Noncommutative Motives I : A Universal Characterization of the Motivic Stable Homotopy Theory of Schemes, January 2013. <http://arxiv.org/pdf/1206.3645.pdf>.
- [Sai90] Morihiko SAITO : Mixed Hodge modules. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 26(2):221–333, 1990.
- [Ser55] Jean-Pierre SERRE : Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. of Math. (2)*, 61:197–278, 1955.
- [SGA72] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1 : Théorie des topos*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.
- [SGA73] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305. Springer-Verlag, Berlin, 1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat.
- [Sim96] Carlos SIMPSON : Homotopy over the complex numbers and generalized de Rham cohomology. In *Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994)*, volume 179 de *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 229–263. Dekker, New York, 1996.
- [SR72] Neantro SAAVEDRA RIVANO : *Catégories Tannakiennes*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 265. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [SS00] Stefan SCHWEDE et Brooke E. SHIPLEY : Algebras and modules in monoidal model categories. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 80(2):491–511, 2000.

- [SV00] Andrei SUSLIN et Vladimir VOEVODSKY : Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients. In *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, volume 548 de *NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 117–189. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

## INDEX

- absolument acyclique, 104
- axiome du monoïde, 29
  
- carré Nisnevich-distingué, 33
- catégorie
  - accessible, 28
  - bitensorisée, 22
  - co-dérivée, 104
  - contra-dérivée, 104
  - cotensorisée, 22
  - de coefficients, 19
  - de Grothendieck, 14
  - de modèles
    - combinatoire, 28
    - enrichie, 28
    - parfaite, 69
    - tractable, 28
  - dérivée
    - absolue, 104
    - enrichie, 20
  - localement présentable, 28
  - sous-jacente à une catégorie enrichie, 20
  - tannakienne, 14
  - tensorisée, 22
- classe
  - admissible, 33
  - d'hyper-recouvrements dense, 41
- co-acyclique, 104
- comparaison de De Rham, 116
- contra-acyclique, 104
  
- $\mathcal{D}$ -module
  - holonome, 96
  - quasi-cohérent, 96
- dg-module
  - $\Pi$ -total, 103
  - $\oplus$ -total, 103
  - plat, 104
  
- équivalence faible
  - génératrice
    - $\mathbf{A}^1$ -locale, 51
    - Nisnevich-locale, 33
- Ext-dimension, 14
  
- fibre
  - d'un faisceau Nisnevich en un point, 45
- foncteur
  - de Quillen enrichi, 28
  - enrichi, 20
  - fibre, 19
- fortement dualisable, 13
  
- image directe
  - de  $\mathcal{D}$ -modules, 97
  - exceptionnelle
    - de  $\mathcal{D}$ -modules, 98
- image inverse
  - de  $\mathcal{D}$ -modules, 98
  - exceptionnelle
    - de  $\mathcal{D}$ -modules, 97
- involution de Verdier
  - pour les  $\mathcal{D}$ -modules, 98
  
- Nisnevich-cofinale, 49
  
- objet
  - de Tate, 70, 76
  - géométrique, 87
- $\Omega^\infty$ -spectre, 64
- faible, 64
  
- plongement de Yoneda enrichi, 21
- produit tensoriel
  - de  $\mathcal{D}$ -modules, 99
  - exceptionnel
    - de  $\mathcal{D}$ -modules, 98
  - externe
    - de  $\mathcal{D}$ -modules, 98
  
- réalisation
  - de De Rham, 111
  
- site
  - morphisme de sites, 45
  - pré-morphisme de sites, 45
  - pseudo-morphisme de sites, 45
- spectre symétrique, 55
  - de cohomologie absolue, 87
  - de Tate, 70
  - de De Rham, 116
- stratification récursive, 93
- structure

de modèles  
   injective, 29  
   injective  $\mathbf{A}^1$ -Nisnevich-locale, 51  
   injective de Beke, 14  
   injective Nisnevich-locale, 34  
   injective niveau par niveau, 58  
   injective stable, 63  
   projective, 29  
   projective  $\mathbf{A}^1$ -Nisnevich-locale, 51  
   projective Nisnevich-locale, 34  
   projective niveau par niveau, 57  
   projective stable, 62  
   de poids, 94  
   suite symétrique, 54  
   théorie de Weil mixte, 76  
    $\mathcal{V}$ -catégorie, *voir* catégorie enrichie  
     de modèles, *voir* catégorie de modèles  
     enrichie  
    $\mathcal{V}$ -foncteur, *voir* foncteur enrichi  
     de Quillen, *voir* foncteur de Quillen  
     enrichi

## Réalisations tannakiennes des motifs mixtes triangulés

### Résumé

On généralise la notion d'une théorie de Weil mixte, due à D.-C. Cisinski et F. Déglise ([CD12a]), afin d'obtenir un formalisme de réalisations tannakiennes des motifs mixtes triangulés au sens de V. Voevodsky sur un schéma de type fini sur un corps parfait. On l'applique à la construction d'un foncteur de réalisation de Hodge mixte rationnelle. Sur un schéma  $X$ , quasi-projectif, lisse sur un corps de caractéristique nulle  $\kappa$ , on obtient un foncteur de réalisation de De Rham à valeurs dans la catégorie dérivée des  $\mathcal{D}_{X/\kappa}$ -modules holonomes. Cela permet d'en déduire une correspondance de Riemann-Hilbert purement algébrique.

## Tannakian realizations of triangulated mixed motives

### Abstract

We generalize the notion of a mixed Weil theory, introduced by D.-C. Cisinski and F. Déglise in [CD12a], in order to obtain a formalism of Tannakian realization functors on V. Voevodsky's triangulated mixed motives over schemes of finite type over a perfect field. We apply this formalism to the construction of a rational mixed Hodge realization functor. For a scheme  $X$ , smooth, quasi-projective over a characteristic zero field  $\kappa$ , we obtain a de Rham realization functor with values in the derived category of holonomic  $\mathcal{D}_{X/\kappa}$ -modules. This allows us to deduce a purely algebraic Riemann-Hilbert correspondence.