Vérité mathématique

Frédéric Déglise

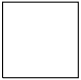
10 mars 2015

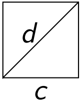
Racines carrées

Un des premiers problèmes mathématiques, la mesure des distances :

Géométrie	géo=terre métrie=mesure

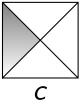
Carrés et diagonales,



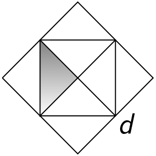


Problème : connaître la diagonale d en fonction du côté c ?

aire notée a



aire : $4a$ ou c^2



aire : $8a$ ou d^2

donc : $d^2 = 2.c^2 \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{2}.c}$

Premières traces historiques de $\sqrt{2}$

Tablette YBC7289, ~ -1700 *av. J.C., Mésopotamie (empire babylonien)*

Premières traces historiques de $\sqrt{2}$

Tablette YBC7289, ~ -1700 av. J.C., Mésopotamie (empire babylonien)
Écriture cunéiforme, numération sexagésimale

Système sexagésimal= *base 60*
chiffres de 1 à 59
en combinant les symboles :

- L'unité : 𒁹
- La dizaine : 𒌋

Sur la diagonale du carré, on lit :

$$1, 24, 51, 10$$

$$\text{diagonale} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$$
$$= 1,41421\mathbf{296}\ldots$$

$$\color{red}{\sqrt{2} = 1,41421\mathbf{356}\ldots}$$

Histoire de la pensée dans la Grèce antique

-640 à -525	École milesienne	Thalès	*Théorème de Thalès* Le principe de l'univers (*arche*) est l'eau
-585 à -400	École pythagoricienne	Pythagore	*Théorème de Pythagore* Les Nombres sont le principe de l'univers
Vème av. JC	École éléatique pré-socratiques sophistes	Zenon Anaxagore Protagoras	*paradoxe Achille-tortue* *Quadrature du cercle* La joute publique
-469 à -399		Socrate	La maïeutique
-428 à -348		Platon	*Les 5 solides platoniciens* La Philosophie
-384 à -322		Aristote	*La logique* La Philosophie
IIIème av. JC		Euclide	*Les Éléments*

Les Éléments, Euclide, IIIème siècle av. JC

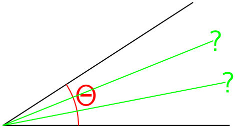
- Somme du savoir mathématique accumulé dans la grèce antique
- 13 livres : Géométrie, Algèbre, Arithmétique, Calculs de surfaces, d'aires,...
- 5 axiomes, 5 principes logiques, 130 définitions, 465 propositions et leur démonstration
- des milliers de copies manuscrites, rééditions, commentaires (du Ier au XXème siècle)

$\Rightarrow$ la science mathématique est née, avec son exigence d'**irréfutabilité**, léguée de manière **intelligible** aux générations futures.

Les 3 problèmes de l'Antiquité

Il s'agit de trouver des constructions géométriques en utilisant seulement une règle non graduée (droites) et un compas (cercles) :

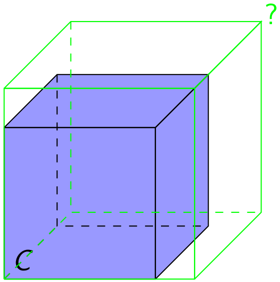
- **La trisection de l'angle** : diviser un angle Θ donné en trois angles égaux ?



Les 3 problèmes de l'Antiquité

Il s'agit de trouver des constructions géométriques en utilisant seulement une règle non graduée (droites) et un compas (cercles) :

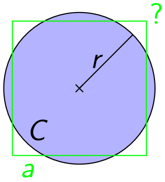
- **La duplication du cube** : étant donné un cube C, construire un nouveau cube dont l'aire est exactement le double de celle de C ?



Les 3 problèmes de l'Antiquité

Il s'agit de trouver des constructions géométriques en utilisant seulement une règle non graduée (droites) et un compas (cercles) :

- **La quadrature du cercle** : étant donné un cercle C, construire un carré dont l'aire est exactement égale à celle de C ?



Problème attribué à Anaxagore (Vème siècle av. JC)

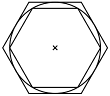
Traduction algébrique de la quadrature du cercle

Surface disque de rayon r : $\pi.r^2$ Surface d'un carré de côté a : a^2

$$a^2 = \pi.r^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{\pi}.r.$$

Les 3 problèmes de l'Antiquité

1. Trisection de l'angle
2. Duplication du cube
3. Quadrature du cercle

- solutions approchées :
  - Egyptiens : **Papyrus de Rhind**, XVIème av. JC,
    (diamètre du cercle 9 correspond à un carré de côté 8 : $\pi \simeq 3,016...$)
    (diamètre du cercle 9 correspond à un carré de côté 8 : $\pi \simeq 3,016...$)
  - Grecs : **méthode d'exhaustion**, Eudoxe (Vème avJC), Archimède
    (IIIème avJC) :  $\frac{220}{71} = 3,098... \leq \pi \leq 3,142... = \frac{22}{7}$
- solutions exactes : dites **mécaniques** (avec d'autres instruments que la règle et le compas), Hippias d'Elis (Vème av. JC), Dinostrate (IVème av. JC) : quadratrice.

Les 3 problèmes de l'Antiquité

1. Trisection de l'angle
2. Duplication du cube
3. Quadrature du cercle

L'intérêt de ces problèmes est la recherche d'une solution exacte suivant des règles imposées : *méthode hypothético-déductive*.
Débarrassé des considérations pratiques, on s'intéresse maintenant à la recherche de la vérité pour elle-même.

L'épopée des quadrateurs

- Apogée politique Grèce antique : Alexandre le Grand (-356 à -323)
- Destruction de la bibliothèque d'Alexandrie (entre -48 et +642)
- Epopée vers la quadrature du cercle : reprise Xème siècle (?)

Definition

Un quadrateur est une personne qui cherche à démontrer que la quadrature du cercle est possible à la règle et au compas.

L'épopée des quadrateurs, bref historique

- **al-Haytham**, mathématicien arabe (965-1039) : promet un traité sur la quadrature du cercle. Jamais publié.
- **Francon de Liège** (1015/1020 - $\sim$ 1083) : *De quadratura circuli*. Conclusion : $\pi = \frac{22}{7} = 3.1428...$ faux à la 3ème décimale
- **Nicolas de Cues** (1401-1464), théologien allemand. Pense démontrer la quadrature du cercle par une appoximation assez fine. Réfuté par Regiomontanus
- **Grégoire de Saint-Vincent** (1584-1667), *Opus geometricum quadraturae circuli*, 1000 pages, 4 quadratures du cercle ! Réfuté par Huygens
- **Hobbes** (1588-1679), philosophe anglais, *De corpore*. Réfuté par Wallis (mathématicien anglais), violente controverse !

L'épopée des quadrateurs censurée

XVIIIème siècle : le dénombrement devient impossible !

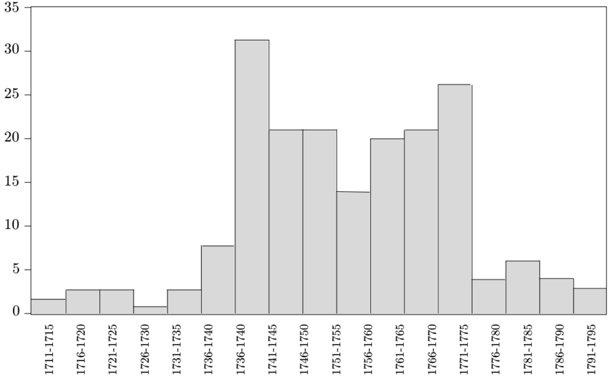


FIGURE : Mémoires sur la quadrature du cercle recensés par l'Académie [1]

L'Académie des sciences publie un procès-verbal pour refuser d'examiner les mémoires sur la quadrature du cercle (1775) !

1. Source, Marie Jacob, ≪ Interdire la quadrature du cercle... ≫

L'épopée des quadrateurs : fin

Définition

Un nombre est constructible s'il est la longueur d'un segment fabriqué à la règle et au compas à partir d'un segment de longueur 1.

Exemple

Tous les nombres entiers, rationnels, $\sqrt{2}$,...

Reformulation du problème de la quadrature du cercle

π est-il un nombre constructible ?

Théorème (Wantzel, 1837)

Tout nombre constructible peut-être obtenu à partir de 1 *par une succession des opérations suivantes : addition, soustraction, multiplication, division, racine carré (de nombres positifs).*

L'épopée des quadrateurs : fin

Reformulation du problème de la quadrature du cercle

π est-il un nombre constructible ?

Théorème (Wantzel, 1837)

Tout nombre constructible peut-être obtenu à partir de 1 *par une succession des opérations suivantes : addition, soustraction, multiplication, division, racine carré (de nombres positifs).*

En particulier, tout nombre constructible x est solution d'un polynôme à coefficients entiers :

$$a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots + a_n.x^n = 0$$

Théorème (Lindeman, 1882)

π *n'est solution d'aucun polynôme à coefficients entiers : on dit qu'il est* *__transcendant__*.

L'épopée des quadrateurs : fin

Conclusion

La quadrature du cercle est impossible, et on sait maintenant le démontrer (après plus de vingt siècles de recherche !).

Mathématiques

La vérité est restée voilée à l'humanité pendant plus de vingt siècles !
Il n'y a pas de discipline intellectuelle qui soit plus intransigeante pour l'homme : *propédeutique* de l'Académie de Platon.

Définition

Une conjecture est un énoncé que l'on pense vrai sans pouvoir le démontrer.

Exemple

Conjecture de Goldbach (1742) : tout nombre pair au moins égal à 4 est somme de deux nombres premiers.

A propos des conjectures

L'**hypothèse de Riemann** (1859) est une des conjectures les plus célèbres à l'heure actuelle.
L'institut Clay offre 1 million de dollars pour sa résolution !

Définition

Une conjecture est un énoncé que l'on pense vrai sans pouvoir le démontrer.

Exemple

Conjecture de Goldbach (1742) : tout nombre pair au moins égal à 4 est somme de deux nombres premiers.

A propos des conjectures

Citation d'André Weil, grand mathématicien du XXème siècle (membre fondateur du groupe Bourbaki) :

> *Quand j'étais jeune, j'espérais démontrer l'hypothèse de Riemann. Quand je suis devenu un peu plus vieux, j'ai encore eu l'espoir de pouvoir lire et comprendre une démonstration de l'hypothèse de Riemann. Maintenant, je me contenterais bien d'apprendre qu'il en existe une démonstration.*

Sophie Germain

Née le 1er avril 1776 à Paris, morte le 27 juin 1831.

Se prend de passion pour les mathématiques à l'age de 13 ans.

Ses parents tentent de la dissuader de son étude : ce métier est réservé aux hommes.

À 18-19 ans, elle commence à utiliser un pseudonyme masculin, Antoine Le Blanc, pour se procurer les cours de l'école Polytechnique (créée en 1794).

Sous ce pseudonyme, elle entretient une correspondance avec Lagrange et Gauss.

Même si Lagrange et Gauss la soutiendront lorsqu'ils apprendront sa véritable identité, elle ne put jamais devenir professeur, métier réservé aux hommes.

Conjecture (Fermat, $\sim$ 1641)

Considérons un entier $n \geq 3$.
Alors, il n'existe pas de nombres x, y, z entiers non nuls tels que :

$$x^n + y^n = z^n.$$

Remarque

Cette affirmation est tout à fait fausse pour $n = 2$ (indice : *triplets pythagoriciens*).

Entre 1804 et 1823, Sophie Germain obtient un résultat en direction de la conjecture de Fermat.

Théorème (Germain)

Pour certains nombres premiers $p > 2$ (par exemple tous ceux inférieurs à 100), la relation :

$$x^p + y^p = z^p$$

pour trois nombres entiers x, y, z entraine que l'un au moins de ces nombres est divisible par p^2.

Mais Sophie Germain ne s'arrêtera pas là : **grand plan** pour prouver la conjecture de Fermat malgré l'isolement où elle se trouve (manuscrits).

Épilogue

Mais Sophie Germain ne s'arrêtera pas là : **grand plan** pour prouver la conjecture de Fermat malgré l'isolement où elle se trouve (manuscrits). Elle ne le mènera jamais à terme.

Face aux défis insurmontables des mathématiques : les mathématiciens font **œuvre d'imagination**.
Les grandes conjectures jouent le rôle d'un **phare**.
Paradoxe : pour arriver à la vérité mathématique, les mathématiciens s'en remettent à leur croyance en une (ou plusieurs) conjectures.
Avec la perspective de mourir avant de connaitre toute la vérité sur ces conjectures !

1995

Le **théorème de Wiles** prouve la conjecture de Fermat :
Pour tout $p > 2$, il n'existe pas d'entiers (x, y, z) non nuls tels que :

$$x^p + y^p = z^p. \qquad (*)$$

La preuve repose sur un raisonnement par l'*absurde* : supposant qu'il existe des entiers (x, y, z) fautifs, on leur associe un objet mathématique (une *courbe elliptique*) et on montre qu'elle satisfait deux propriétés contradictoires.

- 1969 : La courbe elliptique associée à (x, y, z) fautifs vérifiant $(*)$ est construite par Hellegouarch.
- 1986 : Frey formule le principe de raisonnement à partir de la courbe elliptique d'Hellegouarch qui mènerait à une contradiction.
- 1986 : Ribet prouve la première propriété de cette courbe (suivant une conjecture de Serre).
- 1995 : Wiles prouve la deuxième propriété de cette courbe (bien plus difficile) et achève la contradiction.

Théorème (Gödel, 1931)

Quels que soient les axiomes choisis par les mathématiciens, s'ils impliquent l'existence des nombres entiers, il existe au moins une affirmation qui ne peut ni être prouvée, ni être contredite par ces axiomes.