

Théorie homotopique stable

Frédéric Déglise

— — —

Résumé

Il est assez difficile de dater les débuts de l'homotopie stable bien que ses origines remontent clairement au théorème de suspension de Freudenthal (1937) et à la construction des espaces d'Eilenberg-MacLane (1945). Toutefois les premières tentatives de définition d'une catégorie homotopique stable remontent aux années 1960 et n'ont cessées d'alimenter la topologie algébrique abstraite depuis lors, ¹ jusqu'aux phénomènes dits « chromatiques » qui alimentent de nombreux travaux à l'heure actuelle.

Le but de ce cours est de présenter les idées maitresses de la théorie homotopique stable. D'une part, on se concentrera sur des propriétés purement homotopique, comme le théorème de suspension de Freudenthal, ou l'application de Hopf. D'autre part, on présentera la construction de la catégorie homotopique stable, sous un angle concret avec la construction de Spanier-Whitehead et l'exemple des espaces d'Eilenberg-MacLane, et une présentation de la construction abstraite, avec une introduction aux techniques des catégories de modèles. La dernière partie du cours se concentrera sur l'étude des cohomologies généralisées, et en particulier la théorie de l'orientation. On présentera les exemples importants comme le cobordisme complexe, la K-théorie complexe et on élargira sur les débuts de la théorie dite de la « filtration chromatique ».

Plan du cours

1) Homotopie stable

- a) Introduction (rappels sur les groupes d'homotopie et CW-complexes)
- b) Théorème de suspension de Freudenthal
- c) Homotopie stable des sphères, application de Hopf

2) Spectres

- a) Définition de Spanier-Whitehead (dualité)
- b) Espaces d'Eilenberg-MacLane (+représentabilité de Brown)
- c) Construction moderne (spectres symétriques, catégories de modèles)
- d) Structure triangulée (suites fibres/cofibres), monoïdale (smash-produit)

3) Théorie de l'orientation

- a) Spectres en anneaux et cohomologie/homologie associées
- b) Suites spectrales (ex : Atiyah-Hirzebruch)
- c) théorie de l'orientation, classes caractéristiques
- d) lois de groupe formel

4) Tour d'horizon

- a) Cobordisme : définition de Thom, résultats de Quillen
- b) K-théorie : fibré vectoriel, théorème de Riemann-Roch
- c) Théories de Landweber, cohomologies elliptiques

1. On peut par exemple citer comme point de départ le petit article d'Adams : Adams, J.Frank. "Théorie de l'homotopie stable." Bulletin de la Société Mathématique de France 87 (1959) : 277-280