Table des matières

Cours I. Catégorie homotopique et groupes fondamentaux 1
I.1. Topologie algébrique : cheminement historique 1
I.2. Constructions topologiques/catégoriques 3
I.2.a. Espaces 3
I.2.b. Espaces pointés 5
I.3. Groupes d'homotopie 7
I.3.a. Relation d'homotopie 7
I.3.b. Groupe fondamental 9
I.3.c. Groupes d'homotopie supérieurs 13
Références 13

COURS I
CATÉGORIE HOMOTOPIQUE ET GROUPES FONDAMENTAUX

I.1. Topologie algébrique : cheminement historique

***I.1.1* (Le formule d'Euler)**. — Á l'origine de la topologie algébrique se trouve une célébrissime formule due à Euler.

Plaçons nous dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Un *demi-espace* dans $\mathbb{R}^3$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$ délimité par un sous-espace plan orienté : un vecteur $\vec{v} = (a, b, c)$ dans $\mathbb{R}^3$ défini un unique plan qui lui est tangent, et donc un sous-espace

$$E(\vec{v}) = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz \geq 0\}.$$

On défini un *polyèdre* P comme un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^3$ qui est une intersection finie de demi-espaces.

Un plan qui délimite le polyèdre est appelé une *face*, un segment qui se trouve à l'intersection de deux faces distinctes est appelé une *arête* et un point qui se trouve à l'intersection de deux arêtes distinctes s'appelle un *sommet.* On note f (resp. a, s) le nombre de faces (resp. arêtes, sommets) du polyèdre P.

***Théorème I.1.2* (Euler)**. — *Avec les notations ci-dessus, si le polyèdre P est convexe, on a la relation suivante :*

$$s - a + f = 2.$$

Ce théorème est énoncé dans [**Eul58b**] et démontré dans [**Eul58a**], tout cela en 1752. Plusieurs commentaires historiques s'imposent :

1. Euler n'utilise pas le mot *convexe.* Il utilise plutôt (en latin) une expression que l'on pourrait traduire par “polyèdre contenu dans des plans”. Ce n'est pas un fait anecdotique car l'énoncé est faux sans l'hypothèse de convexité, comme on va le voir dans la suite de cette histoire mathématique.
2. L'analyse de la démonstration d'Euler montre une erreur, assez subtile, dans la preuve d'Euler. Euler propose une induction qui permet de se ramener au cas simple d'un tétraèdre, mais il ne montre pas que les étapes de réduction donne toujours un polyèdre convexe, ce qui n'est pas vrai en général (voir [**San07**, Part I, Sec. 3, p. 16]).

***I.1.3* (Contre-exemples).** — Au cours du XIXème siècle, la formule d'Euler va passionner plusieurs mathématiciens et devenir un sujet d'étude classique. Ainsi, Lhuilier en 1813 va produire des exemples de polyèdres non convexes pour lesquels la formule d'Euler n'est pas vraie. Il va par ailleurs trouver le moyen de corriger la formule, en considérant le “nombre de trous” d'un polyèdre P, que l'on notera g.

***Théorème I.1.4* (L'huilier).** — *Si le polyèdre P est connexe, on a la relation suivante :*

$$s - a + f = 2 - 2g.$$

Ainsi, lorsque le polyèdre P peut “être percé de part en part” par un seul trou (en langage moderne : il est homéomorphe à un tore), la formule devient $s - a + f = 0$.

***I.1.5* (L'Analysis situs).** — Dans la formule d'Euler et de L'huilier, il est clair que les informations telles que l'aire du polyèdre ou de ses faces, leur position dans l'espace, n'entrent pas en jeu. Á la suite de Leibnitz et Euler, on avait baptisé l'étude de ce genre de problème l'*analysis situs*.

La formule d'Euler est le théorème qui va vraiment fonder cette branche, et permettre son développement – bien qu'Euler lui-même n'ait pas considéré sa formule comme dépendant de l'analysis situs !

Au XIXème siècle, les nombreux auteurs s'étant penchés sur cette question ont bien conscience qu'un polyèdre peut être déformé (les faces peuvent être étirés, etc...) sans changer les données du problème. Legendre notamment propose une démonstration de la formule en projetant le polyèdre convexe sur la surface d'une sphère : il s'affranchit ainsi du modèle affine utilisé dans les hypothèses de la formule (1894, cf. [**Leg94**]).

***I.1.6* (Riemann).** — Les raisonnements destinés à prouver la formule d'Euler, et sa généralisation, vont trouver un écho et une amplification historique dans la thèse de Riemann (1851), ou celui-ci introduit les *surfaces de Riemann* (1) dans son étude des intégrales abéliennes et des fonctions complexes multivaluées. Il va notamment définir le *genre* d'une surface de Riemann qui n'est autre que la généralisation du “nombre de trous” dans un polyèdre considéré par L'huilier. (2)

Suivant Riemann, le genre d'une surface de Riemann est le nombre maximal de sections que l'on peut faire de la surface, suivant un courbe fermée, de manière qu'elle reste connexe.

L'histoire nous apprend que Riemann envisageait une généralisation de la définition du genre, en dimension supérieure, mais il mourut avant d'achever cette tache. Il en parla avec Betti lors d'un séjour en Italie, et ce dernier publia les fruits de cette discussion définissant ce qu'on appelle maintenant les nombres de Betti (1871).

***I.1.7* (L'analysis situs de Poincaré).** — Á la fin du XIXème siècle, Poincaré va définitivement consacrer l'analysis situs comme une branche à part entière des mathématiques grâce à son article “analysis situs” publié en 1895 auquel il apportera cinq suppléments, apportant des compléments et corrections.

On ne peut résumer l'article de Poincaré en quelques lignes tant les idées qui y sont introduites devaient se révéler riches et fécondes. En un mot, l'article de Poincaré fonde la notion d'homologie singulière (3), définit les nombres de Betti et le groupe fondamental d'un espace. Il montre le théorème de dualité sur les nombres de Betti et produit divers exemples d'espaces de dimension 3 (en particulier pour montrer qu'ils ne sont pas caractérisés par leurs nombres de Betti).

---

1. *i.e.* les variétés analytiques complexes compactes orientées connexes ;
2. Rappelons au passage que le directeur de thèse de Riemann était Gauss qui était parfaitement au courant des recherches de son temps sur la formule d'Euler.
3. même si les groupes d'homologie tels qu'on les connaît maintenant n'apparaissent pas : Poincaré ne s'intéresse qu'à leur rang

En un mot il fonde ce que nous appelons maintenant le *topologie algébrique* pour laquelle on peut dégager les caractéristiques suivantes :

– on cherche à déterminer les espaces topologiques à l'aide d'invariants de nature algébrique : nombres (nombres de Betti), groupes (groupe fondamental, groupes d'homologie) ; plus tard : anneaux, représentations d'un groupe, objets d'une catégorie abélienne !
– on parle d'invariants car ces objets algébriques associés aux espaces topologiques doivent être invariant par "déformation continue" (*i.e.* homotopie, mot introduit par Poincaré) ;
– dans le but de définir ces invariants, on approxime un espace par une donnée de nature combinatoire : l'espace est construit à partir d'objets géométriques simples que l'on recolle (triangles pour les surfaces, on parle de triangulation, puis complexe simplicial en dimension supérieure, et CW-complexes depuis Whitehead).

Nous allons retrouver chacune de ces caractéristiques fondamentales dans ce cours !

Remarque I.1.8. — A noter que Listing, élève de Gauss (comme Riemann), avait introduit le mot *topologie* en 1836 pour désigner l'étude des "figures géométriques du point de vue le qualité" (cf. [**Pon74**, p. 118]), analogue de ce qu'on appelait alors l'*analysis situs*.

Au début du XXème siècle, il semble que la terminologie "topologie combinatoire" était utilisée notament à la suite des travaux de Poincaré, et la terminologie topologie algébrique est apparue plus tardivement au milieu du XXème siècle, en particulier après qu'Emmy Noether ait proposé de définir des *groupes* d'homologie singulière plutôt que de regarder leur rang (1925).

I.2. Constructions topologiques/catégoriques

I.2.a. Espaces. —

I.2.1. — On notera $\mathscr{T}op$ la catégorie des espaces topologiques : les objets sont les ensembles munis d'une topologie, que nous appellerons simplement *espaces* et les morphismes sont les applications continues – on dira parfois flèche pour morphisme entre espaces topologiques.

Rappelons que la notion centrale de la théorie des catégories est celle de *problème universel*. L'exemple fondamental de problème universel est le suivant :

Définition I.2.2. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Un objet X de $\mathscr{C}$ est initial (resp. final) si pour tout objet Y de $\mathscr{C}$ il existe une unique flèche $X \to Y$ (resp. $Y \to X$). On dit que X est solution du problème universel :

$$X \dashrightarrow D \qquad \text{resp.} \qquad D \dashrightarrow X$$

Si un objet initial (resp. final) existe dans $\mathscr{C}$ il est unique à isomorphisme unique près.

Remarque I.2.3. — Tous les problèmes universels se ramènent à un problème d'existence d'objet initial. Ou de manière équivalente d'objet final : Un objet X est final dans $\mathscr{C}$ si et seulement si il est initial dans la catégorie opposé $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ – obtenue en inversant le sens des les flèches de $\mathscr{C}$.

Exemple I.2.4. — Dans $\mathscr{T}op$, l'espace vide $\varnothing$ est initial et l'espace réduit à un point $*$ est initial.

I.2.5. — Voici les constructions, présentées sous forme de problèmes universels, que nous utiliserons dans les espaces topologiques :

produit de X et Y | somme de X et Y | quotient de $Z \xrightarrow{f} X$

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[d, dashed] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
& X \times Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr] \arrow[ddr] & & Y \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
& X \sqcup Y \arrow[d, dashed] & \\
& D &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr] & & \\
Z \arrow[ur, "f"] \arrow[dr] & & X/A \arrow[r, dashed] & D \\
& * \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Le quotient d'un morphisme $f : Z \to X$ sera la plupart du temps utilisé dans le cas où f est l'inclusion d'un sous-espace Z de X. La construction revient à contracter la partie Z de X en un seul point (image du morphisme canonique $* \to X/Z$).

Remarque I.2.6. — Ces problèmes universels ont un sens dans n'importe quelle catégorie. Un bon exercice est de montrer qu'ils admettent une solution dans la catégorie $\mathscr{T}op$ en construisant un espace topologique explicite.

Quelques exercices faciles pour se familiariser avec le langage des catégories :

Exercice 1. —
- $X/\varnothing = X \sqcup *$ (l'égalité signifie ici : il existe un isomorphisme et un seul entre ces objets).
- Utiliser les propriétés universelles pour montrer que $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$. Montrer de même : $(X \sqcup Y) \sqcup Z = X \sqcup (Y \sqcup Z)$.

***I.2.7* (Espace des fonctions).** — Soit X et Y deux espaces. On définit sur l'ensemble $\mathrm{Hom}(X, Y)$ des flèches de X vers Y une topologie en prenant pour base d'ouverts les sous-ensembles de la forme :

$$\mathcal{U}(K, V) = \{f : X \to Y \mid f(K) \subset V\}, K \subset X \text{compact}, \ V \subset Y \text{ouvert}.$$

Cette topologie est appelée la *topologie compacte ouverte*. On note l'espace correspondant Y^X (ou encore $\mathrm{map}(X, Y)$ que l'on rencontre fréquemment dans la littérature anglophone, accompagné du nom *mapping space*).

Cet espace est caractérisé par la propriété suivante : pour tout espace D, il existe un isomorphisme, fonctoriel en X, Y et D :

$$\mathrm{Hom}(X \times D, Y) \xrightarrow{(*)} \mathrm{Hom}(D, Y^X).$$

Dans le langage des catégories, ayant fixé X, on dit que le foncteur $(Y \mapsto Y^X)$ est adjoint à droite du foncteur $(D \mapsto X \times D)$.

Nous reviendrons sur la notion de foncteurs adjoints. Voici un exercice pour se familiariser avec celle-ci.

Exercice 2. — Avec les notations du paragraphe précédent montrer que le morphisme (*) donne lieu à des flèches de la forme :

$$D \xrightarrow{\mathrm{coev}} (X \times D)^X, X \times Y^X \xrightarrow{\mathrm{ev}} Y.$$

Montrer réciproquement que des flèches ev et coev définissent la flèche $(*)$ ainsi qu'une flèche en sens opposée $(**)$.

Trouver des conditions nécessaires et suffisantes portant sur ev et coev pour que $(*)$ et $(**)$ soient des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

I.2.b. Espaces pointés. —

I.2.8. — En topologie algébrique, il est plus naturel de travailler avec des espaces munis de points base, soit un couple (X, x) où X est un espace et x un élément de X, encore appelé un *espace pointé*.

On notera souvent abusivement un tel espace pointé par X et pour désigner le point distingué x, on parlera du *point base* de l'espace pointé X. Par ailleurs, on notera souvent abusivement $*$ le point base d'un espace pointé X.

Un morphisme entre espaces pointés Xet Y est un morphisme $f : X \to Y$ qui envoie le point base de X sur le point base de X. On note $\mathscr{T}op_*$ la catégorie des espaces pointés. Les morphismes de $\mathscr{T}op_*$ sont parfois appelés *morphismes pointés.*

Un des faits triviaux mais essentiels dans la catégorie des espaces pointés est que l'objet final est égal à l'objet initial, soit l'espace $*$ tautologiquement pointé.

Exemple I.2.9. — Se donner un point base revient à se donner une flèche entre espaces non pointés $* \to X$! Il est donc clair d'après la propriété universelle du quotient d'un morphisme $Z \to X$ que l'espace quotient X/Z est canoniquement pointé.

Ainsi, $X/\varnothing = X \sqcup *$ est un espace pointé, obtenu tautologiquement à partir de X en ajoutant un point base disjoint de X. On notera cet espace pointé X_+.

Exercice 3. — Le foncteur $\mathscr{T}op \to \mathscr{T}op_*, X \mapsto X_+$ est adjoint à droite du foncteur d'oubli du point base $\mathscr{T}op_* \to \mathscr{T}op, (X, x) \mapsto X$.

Exercice 4. — Si Z est un sous-espace d'un espace X, montrer qu'il existe un isomorphisme canonique de A-modules :

$$H_*(X, Z; A) \to \tilde{H}_*(X/Z, A)$$

où le membre de gauche désigne l'homologie singulière de la paire (X, Z) à coefficients dans A.

I.2.10. — Les constructions qu'on a faites pour les espaces ont un sens pour les espaces pointés.

produit de X et Y	*wedge-somme X et Y*	*quotient de $Z \to X$*
$X \times Y$	$X \vee Y$	X/Z
propriété universelle du produit dans $\mathscr{T}op_*$	propriété universelle de la somme dans $\mathscr{T}op_*$	propriété universelle du quotient dans $\mathscr{T}op_*$.

La somme des espaces pointées se définie concrètement en termes des opérations sur les espaces (non pointés) comme suit :

$$(X, x) \vee (Y, y) = (X \sqcup Y)/\{x, y\}.$$

En topologie, on n'utilise assez peu le produit d'espaces pointés et on lui préfère la variante suivante, qui en est un quotient, et qu'on appelle le *smash-produit*, de deux espaces pointés X et Y :

$$X \wedge Y = X \times Y/(* \times Y \cup X \times *), (X, x) \vee (Y, y) = (X \sqcup Y)/\{x, y\}.$$

En effet que cet espace quotient est canoniquement muni d'un point base d'après l'exemple I.2.9.

Le quotient $(X, x)/(Z, z)$ d'un morphisme d'espaces pointés est simplement obtenu en considérant le quotient X/Z des espaces non pointés associés, muni de son point base canonique.

Exercice 5. — Montrer que pour deux espaces pointés X et Y, l'espace non pointé $X \vee Y$ est un sous-espace de $X \times Y$ et que $X \wedge Y = X \times Y/X \vee Y$, en tant qu'espace pointé.

***I.2.11* (Espace de fonctions).** — Si X et Y sont deux espaces pointés. L'ensemble $\mathrm{Hom}_*(X, Y)$ des morphismes pointés est un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(X, Y)$, morphismes non pointés. La topologie compacte ouverte sur ce dernier induit donc une topologie sur $\mathrm{Hom}_*(X, Y)$. On munira cet espace du point base donné par la fonction constante $f_0 : X \to Y$ dont la valeur est le point base de Y.

On le note simplement Y^X (ou encore $\mathrm{map}_*(X,Y)$). On vérifie facilement la propriété suivante, analogue du cas non pointé : pour tout espace pointé D, on obtient un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_*(X \wedge D, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_*(D, Y^X)$$

qui se traduit encore en termes de foncteurs adjoints.

Soit S^1 le cercle unité, vu par exemple comme l'espace des nombres complexes de module 1 pointé par le nombre complexe 1. Voici une définition fondamentale pour ce cours :

Définition I.2.12. — Soit X un espace pointé. On définit la *suspension* de X comme l'espace pointé :

$$\Sigma X := S^1 \wedge X.$$

On définit l'espace des *lacets* de X comme l'espace pointé :

$$\Omega X := X^{S^1} = \mathrm{map}(S^1, X).$$

On déduit donc du paragraphe précédent un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_*(\Sigma X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_*(X, \Omega Y). \tag{I.1}$$

Le foncteur Σ est adjoint à gauche du foncteur Ω.

I.2.13. — Soit $I = [0,1]$ l'intervalle réel. Il est évident que $S^1 = I/\{0,1\}$.

Si X est un espace, on en déduit :

$$S^1 \times X = (I \times X)/(\{0\} \times X \cup \{1\} \times X).$$

On appelle cet espace la *suspension libre* de X. Il est obtenu à partir du cylindre de base X en identifiant les face $\{0\} \times X$ et $\{1\} \times X$ à un point. Si (X,x) est un espace pointé, on en déduit :

$$S^1 \wedge (X,x) = S^1 \times X/(* \times X \cup S^1 \times x).$$

Autrement dit, la suspension ΣX de X est obtenue à partir du cylindre de base X en identifiant les sous-espaces $\{0\} \times X$, $\{1\} \times X$ et $I \times x$ à un point, qui est le point base.

Exemple I.2.14. — Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la sphère S^n comme l'espace :

$$S^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i x_i^2 = 1 \right\}$$

pointé par le point $(1, 0, \dots 0)$. Notons en particulier que $S^0 = \{-1, 1\}$ pointé par 1. Il est clair que pour tout espace pointé X, $S^0 \wedge X = X$.

Pour tout entier $n \geq 0$, on obtient un homéomorphisme d'espaces pointés :

$$\Sigma S^n = S^1 \wedge S^n \to S^{n+1}$$

à partir par exemple de la description donnée dans le paragraphe précédent de la suspension d'un espace.

En particulier, pout tout entier $n \geq 0$,

$$\Sigma^n X = S^n \wedge X, \qquad \Omega^n X = X^{S^n},$$

le dernier espace de fonctions étant pris dans les espaces pointés.

I.2.15. — Soit X un espace. On note I l'intervalle $[0,1]$ vu comme sous-espace de $\mathbb{R}$ – on utilisera aussi la notation $\Delta^1 = I$; Δ^1 est alors appelé le *simplexe standard* de dimension 1.

Suivant la terminologie classique, un *chemin* dans X est un morphisme :

$$\sigma : I \to X.$$

On dit encore que σ est un chemin de $\sigma(0)$ (*l'origine*) à $\sigma(1)$ (*la fin*). L'espace X^I est encore appelé l'*espace des chemins* de X.

Un *lacet* dans X est un chemin γ tel que $\gamma(0)=\gamma(1)$. Autrement dit, un morphisme :

$$\gamma : S^1 \to X.$$

L'espace X^{S^1} est appelé l'*espace des lacets non pointés* de X.

Ces notions sont plus souvent utilisées pour les espaces pointés. Si (X,x) est un espace pointé, un chemin pointé (resp. lacet, sous-entendu pointé) est un morphisme

$$\sigma : (I,0) \to (X,x), \text{ resp. } \gamma : (S^1,*) \to (X,x).$$

Autrement dit, l'origine d'un chemin pointé de X est toujours le point base de X.

Cette terminologie coïncide avec celle de la définition précédente. On définit par ailleurs l'*espace des chemins* (sous-entendu pointé) de l'espace pointé X :

$$PX = (X,x)^{(I,0)}.$$

Exercice 6. — Pour un espace X, nous noterons simplement $H_*(X,A)$ le groupe d'homologie singulière à coefficients dans un groupe abélien A quelconque.

Si X est un espace pointé, on définit l'homologie réduite $\tilde{H}_*(X,A)$ de X à coefficients dans A comme le conoyau du morphisme canonique :

$$H_*(*,A) \xrightarrow{i_*} H_*(X,A)$$

induit par l'inclusion $i : * \to X$ du point base de X.

1. Montrer que l'homologie réduite ne dépend pas du point base choisi.
2. Montrer que pour tout espace pointé X et tout entier $n \geq 0$, il existe des isomorphismes canoniques :

$$H_n(\Sigma X,A) \simeq H_{n-1}(X,A),$$
$$H_n(\Omega X,A) \simeq H_{n+1}(X,A).$$

I.3. Groupes d'homotopie

I.3.a. Relation d'homotopie. —

Définition I.3.1. — Soient X, Y deux espaces et $f,g : X \to Y$ deux morphismes.

Une *homotopie* de f vers g est un morphisme :

$$F : X \times I \to Y$$

tel que $F(-,0)=f$ et $F(-,1)=g$. On dit encore que f et g sont *homotopes* et on écrit :

$$f \underset{\text{htp}}{\sim} g.$$

Si X et Y sont pointés et f,g sont des morphismes pointés, on utilise la même définition en demandant de plus que pour tout $t \in [0,1]$, le morphisme $F(-,t)$ est pointé : $F(*,t)=*$.

Le lemme suivant est évident et laissé en exercice :

Lemme I.3.2. — *La relation d'homotopie sur les morphismes de $\mathscr{T}op$ (resp. $\mathscr{T}op_*$) est une relation d'équivalence. Elle satisfait de plus aux compatibilités suivantes, étant donnés deux morphismes $f,g : X \to Y$ d'espaces :*

1. *pour tout $h : Y \to Z$, $f \underset{\text{htp}}{\sim} g \Rightarrow (f \circ h) \underset{\text{htp}}{\sim} (g \circ h)$.*
2. *pour tout $h : T \to X$, $f \underset{\text{htp}}{\sim} g \Rightarrow (h \circ f) \underset{\text{htp}}{\sim} (h \circ g)$.*
3. *pour tout espace Z, $f \underset{\text{htp}}{\sim} g \Rightarrow (Z \times f) \underset{\text{htp}}{\sim} (Z \times g)$.*
4. *pour tout espace Z, $f \underset{\text{htp}}{\sim} g \Rightarrow f^Z \underset{\text{htp}}{\sim} g^Z : X^Z \to Y^Z$ et $Z^f \underset{\text{htp}}{\sim} g^Z : Z^Y \to Z^X$.*

Les mêmes assertions sont vraies pour les espaces pointés et de plus :

1. *pour espace pointé Z, $f \underset{\text{htp}}{\sim} g \Rightarrow (Z \wedge f) \underset{\text{htp}}{\sim} (Z \wedge g)$.*
2. *pour espace pointé Z,*

Définition I.3.3. — Pour deux espaces (resp. espaces pointés) X et Y, on note $[X, Y]$ (resp. $[X, Y]_*$) l'ensemble des classes de morphismes de X vers Y pour la relation d'équivalence $\underset{\text{htp}}{\sim}$.

Une telle classe est appelée une *classe d'homotopie.*

I.3.4. — Soit X un espace pointé. On pose :

$$\pi_0(X) = [S^0, X].$$

Se donner un morphisme pointé $f : S^0 = (\{0, 1\}, 0) \to (X, *)$ revient à se donner un point de X, l'image de 1. Se donner une homotopie de $f, g : S^0 \to X$ revient à se donner une chemin de $f(1)$ vers $g(1)$.

Ainsi, l'ensemble $\pi_0(X)$ n'est autre que l'ensemble des composantes connexes par arc de X. C'est un ensemble pointé, pointé par la composante connexe par arc du point base.

Exemple I.3.5. — On dit qu'un espace X est *contractile* si il est non vide et si le morphisme $Id_X : X \to X$ est homotope à un morphisme constant, *i.e.* de la forme $X \to * \to X$. Autrement dit, il existe une homotopie $F : X \times I \to X$ telle que pour tout point $x \in X$, $F(x, 0) = *$ et $F(x, 1) = 0$.

Cette notion ne dépend pas du choix du point base. Plus généralement, on dit qu'un espace X est contractile s'il est non vide et contractile pour un choix arbitraire de point base.

On vérifie facilement :
- Pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{R}^n$ est contractile.
- Pour tout $n \geq 0$, on définit D^n le *disque unité de dimension* n comme le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ suivant :
$$D^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i x_i^2 \leq 1 \right\}.$$
Alors D^n est contractile.
- Plus généralement, toute partie convexe de $\mathbb{R}^n$ est constractile.

Remarque I.3.6. — Notons au passage les faits topologiques triviaux suivant : S^{n-1} est un sous-espace de D^n qu'on appelle le *bord* de D^n.

L'espace quotient D^n/S^{n-1} est homéomorphe à S^n.

Rappelons plus généralement, que les espaces D^n sont les briques de bases de construction des CW-complexes (cf. rappels à venir).

I.3.7. — Soit X, Y, Z des espaces. Considérons des morphismes $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$.

Le lemme précédent montre que la classe d'homotopie $[g \circ f] \in [X, Z]$ ne dépend que des classes d'homotopie $[f]$ et $[g]$.

On peut donc définir une composition :

$$[X, Y] \times [Y, Z] \to [X, Z].$$

Ces considérations sont également valables pour les espaces et morphismes pointés.

Définition I.3.8. — On définit la *catégorie homotopique* $\mathscr{H}$ (resp. *catégorie homotopique pointée* $\mathscr{H}_*$) comme la catégorie dont les objets sont les CW-complexes (resp. CW-complexes pointés) et les morphismes sont les classes d'homotopie de morphismes (resp. morphismes pointés) munies de la composition définie ci-dessus.

On considèrera plus souvent la version pointée de la catégorie homotopique (en particulier pour définir la catégorie homotopique stable).

Dans la catégorie $\mathscr{H}_*$, les isomorphismes sont particulièrement importants.

Définition I.3.9. — Si $f : X \to Y$ est un morphisme d'espace pointé, on dit que f est une *équivalence d'homotopie* s'il existe un morphisme $g : Y \to X$ tel que $f \circ g \underset{\text{htp}}{\sim} 1_Y$ et $g \circ f \underset{\text{htp}}{\sim} 1_X$. Il revient au même de demander que la classe d'homotopie $[f]$ de f est un isomorphisme dans $\mathscr{H}_*$.

Le *type d'homotopie* d'un espace pointé X est la classe d'isomorphisme de X dans la catégorie $\mathscr{H}_*$. On dit aussi que deux espaces pointés X et Y ont *même type d'homotopie* si X est isomorphe à Y dans $\mathscr{H}_*$.

Exemple I.3.10. — Un espace pointé X est contractile si et seulement si l'application canonique $X \to *$ (ou ce qui revient au même $* \to X$) est une équivalence d'homotopie.

Autrement dit, X a le type d'homotopie du point $*$.

I.3.b. Groupe fondamental. — On a déjà vu qu'un lacet sur un espace pointé est un morphisme $\gamma : S^1 \to X$. Il est commode aussi de le voir comme un chemin $\gamma : I \to X$ dont l'origine et la fin coïncide avec le point base : $\gamma(0) = \gamma(1) = *$.

***Définition I.3.11* (Composition des lacets)**. — Soit X un espace pointé.

Étant donné deux lacets γ_1, γ_2 de X, on définit le lacet produit $\gamma_1.\gamma_2$ de γ_1 et γ_2 par la formule :

$$\gamma_1.\gamma_2 : I \to X, t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \leq 1/2, \\ \gamma_2(2t-1)) & \text{si } t \geq 1/2. \end{cases}$$

I.3.12. — Une application de *reparamétrisation* est un morphisme $\varphi : I \to I$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. Étant donné un lacet γ, on obtient un lacet reparamétré par φ en considérant la composé : $\gamma \circ \varphi$.

On peut vérifier que γ est homotope à $\gamma \circ \varphi$ suivant l'homotopie :

$$F : I \times I \to X, (t, u) \mapsto \gamma\big((1-t)\varphi(s) + ts\big).$$

Lemme I.3.13. — *Avec les notations de la définition précédente :*

1. *La composition des lacets est compatible à la relation d'homotopie :*

$$(\gamma_1 \underset{\text{htp}}{\sim} \gamma_1' \wedge \gamma_2 \underset{\text{htp}}{\sim} \gamma_2') \Rightarrow \gamma_1.\gamma_2 \underset{\text{htp}}{\sim} \gamma_1'.\gamma_2'.$$

2. *La composition des lacets induit une structure de groupe sur les classes d'homotopie $[S^1, X]$ dont :*
   - *l'élément neutre est le lacet constant $\gamma_1 : S^1 \to * \to X$;*
   - *l'inverse d'un lacet $\gamma : I \to X$ est le lacet*

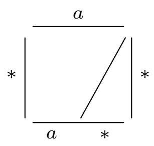
$$\gamma^{-1} : I \to X, t \mapsto \gamma(1-t).$$

Démonstration. — Le premier point est clair : il suffit de "composer" les homotopies F_1 et F_2 correspondantes.

Pour le deuxième point, on indique par le diagramme ci-dessous les reparamétrisation qu'il faut considérer pour obtenir les homotopiques attendues :

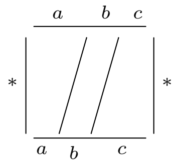
neutre

$a.* \underset{\text{htp}}{\sim} a$



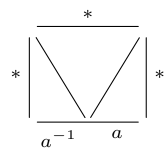
associativité

$(a.b).c \underset{\text{htp}}{\sim} a.(b.c)$



inverse

$a^{-1}.a \underset{\text{htp}}{\sim} *$



Notons que la relation $*.a \underset{\text{htp}}{\sim} a$ et $a.a^{-1} \underset{\text{htp}}{\sim} *$ s'obtiennent de la même manière. $\square$

Définition I.3.14 **(Poincaré)**. — Soit X un espace pointé. On appelle groupe fondamental de X l'ensemble $[S^1, X]$ des lacets de X à homotopie près muni de la loi de groupe décrite dans le lemme précédent. On le note $\pi_1(X)$.

D'après le Lemme I.3.2, le groupe $\pi_1(X)$ est fonctoriel covariant en X. Deux morphismes homotopes induisent le même morphisme sur le groupe fondamental. Autrement dit, on a défini un foncteur :

$$\pi_1 : \mathscr{H}_* \to \mathscr{G}pe.$$

Exemple I.3.15. — Si X est un espace pointé contractile, alors $\pi_1(X) = *$ – l'homotopie $F : X \times I \to X$ réalisant la contraction montre que tout lacet γ est homotope au lacet constant, par l'homotopie $F \circ (\gamma \times Id)$.

Plus généralement, si deux espaces pointés X et$Y$ ont même type d'homotopie, alors $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$.

Définition I.3.16. — Un espace pointé X tel que $\pi_0(X) = \pi_1(X) = *$ est dit simplement connexe.

Théorème I.3.17. — *Si $n > 1$, la sphère S^n de dim. n est simplement connexe : $\pi_1(S^n) = *$.*

Démonstration. — Soit $\gamma : I \to S^n$ un lacet. Si γ n'est pas surjectif, son images'envoie dans le complémentaire d'un point $S^n - \{x\}$ qui est homéomorphe au disque fermé D^n, espace contractile. Donc γ est homotope au lacet constant.

Il se peut que γ soit surjectif, pour contre-intuitif que ce fait soit (en utilisant les *courbes de Peano* par exemple). Nous allons montrer que toutefois, γ est homotope à un lacet non surjectif.

Considérons un point $x \in S^n$ différent du point base. On peut trouver dans S^n un voisinage ouvert B de x qui est homéomorphe à un disque $\overset{\circ}{D}{}^n$ et dont l'adhérence est disjointe du point base.

L'espace $\gamma^{-1}(V)$ est ouvert dans $]0,1[$. Ses composantes connexes $(J_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ sont des intervalles ouverts de I. L'espace $\gamma^{-1}(x)$ est fermé compact dans $\gamma^{-1}(V)$. Il existe donc une partie finie $\Lambda_0 \subset \Lambda$ tel que la famille d'ouvert $(J_\lambda, \lambda \in \Lambda_0)$ recouvre $\gamma^{-1}(x)$.

Pour un indice $\lambda \in \Lambda_0$, $J_\lambda =]a_\lambda, b_\lambda[$. Par construction, les points $\gamma(a_\lambda)$ et $\gamma(b_\lambda)$ appartienne à la frontière de $\bar{B}$ qui est homéomorphe à l'espace S^{n-1}. Comme $n \geq 2$, S^{n-1} est connexe par arc : il existe donc un chemin γ'_λ qui a pour origine $\gamma(a_\lambda)$ et pour fin $\gamma(b_\lambda)$. Comme $\bar{B}$ est contractile, le chemin $\gamma|_{[a_\lambda, b_\lambda]}$ est homotope au chemin γ'_λ. Ainsi, le chemin total γ est homotope à un chemin γ'_λ dont la restriction à $\bar{J}_\lambda$ ne passe pas par x et qui coïncide avec γ sur le complémentaire $I - \bar{J}_\lambda$. Procédant ainsi pour les autres intervalles indexé par $\Lambda_0 - \{\lambda\}$, on construit donc un lacet γ' homotope à γ ne passe pas par x sur $\cup_\lambda J_\lambda$ et qui est égal à γ sur le complémentaire. Cela implique que l'image de γ' est incluse dans $S^n - \{x\}$ et permet de conclure d'après l'argument donné en début de preuve. $\square$

Théorème I.3.18. — *Il existe un isomorphisme canonique $\delta : \pi_1(S^1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.*

L'entier $\delta(\gamma)$ associé à une classe d'homotopie d'un lacet $\gamma : S^1 \to S^1$ est appelé le degré de γ. Il correspond intuitivement au nombre de tour effectué par γ.

Démonstration. — *Principe.* On voit S^1 comme le sous-espace de $\mathbb{C}$ formé des nombres complexes de module 1, pointé par le nombre 1.

On en déduit un morphisme canonique

$$p : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2i\pi.t},$$

qu'on appelle le *revêtement universel* de S^1. Notons que la fibre de p vérifie : $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

Les points clés de la preuve sont :

(R1) $\pi_1(\mathbb{R}) = 0$ (car $\mathbb{R}$ est contractile) ;

(R2) pour tout ouvert strict $U \subset S^1$, $p^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{Z}$.

On obtient une preuve élémentaire comme suit. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on définit un chemin de $\mathbb{R}$:

$$\tilde{\gamma}_n : I \to \mathbb{R}, t \mapsto nt.$$

On en déduit un lacet de l'espace pointé S^1 par la formule : $\gamma_n = p \circ \tilde{\gamma}_n$. On a donc construit une application :

$$\nu : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1).$$

On vérifie facilement que c'est un morphisme de groupes.

Nous allons construire un inverse d à ν. Pour cela, on utilise une propriété de relèvement du morphisme p.

Lemme I.3.19. — *Pour tout lacet $\gamma : I \to S^1$, on peut trouver une flèche pointillée $\tilde{\gamma}$ s'insérant dans le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\gamma}"] & S^1. \end{tikzcd}$$

On dit encore que p a la *propriété de relèvement à droite* par rapport au morphisme $* \to I$.

Pour démontrer ce lemme, remarquons d'abord que si l'image de γ est inclue dans $S^1 - \{x\}$ pour un point $x \in S^1$, alors le relèvement $\tilde{\gamma}$ existe et est unique du fait que $p^{-1}(S^1 - \{x\}) \simeq (S^1 - \{x\} \times \mathbb{Z})$.

Dans le cas contraire, on pose $U = S^1 - \{1\}$ et $V = S^1 - \{-1\}$. Alors $\gamma^{-1}(U)$ et $\gamma^{-1}(V)$ est un recouvrement ouvert de I. Notons $(J_i)_{i \in F}$ la famille des composantes connexes de chacun de ces deux ouverts de I. C'est un recouvrement ouvert de I. Comme I est compact, on peut trouver une partie fini F_0 de F telle que $(J_i)_{i \in F_0}$ est un recouvrement ouvert de I. Chacun de ces ouverts a maintenant la forme $J_i =]a_i, b_i[$. On peut donc trouver une suite $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_r = 1$ de nombres tels que pour tout $i < r$, l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est inclus dans l'un des ouverts J_i. En particulier, $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ est inclus dans U ou dans V. Utilisant ce fait et la propriété (R2) ci-dessus, on voit par induction sur i que l'on peut étendre de manière unique le chemin $\gamma|_{[0,t_i]}$ en un chemin $\tilde{\gamma}_i : ([0, t_i], 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ ce qui démontre le lemme.

Pour définir d, on associe à tout lacet γ de S^1 l'élément $d(\gamma) := \tilde{\gamma}(1)$ qui est nécessairement un entier puisque $p\tilde{\gamma}(1) = 1$ par construction. On montre l'élément $d(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ. Pour cela, on utilise une généralisation du lemme précédent qui montre que l'on peut relever les homotopies.

Lemme I.3.20. — *Pour tout diagramme commutatif de flèches solides suivant :*

$$\begin{tikzcd} I \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & S^1. \end{tikzcd}$$

il existe au moins une flèche pointillée qui fait commuter les deux sous-diagrammes.

La preuve du lemme est la même que celle du lemme précédent, sauf que l'on remplace I par $I \times I$ et les intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ par des cubes fermés.

Soit $\gamma \underset{\text{htp}}{\sim} \gamma'$. Soit $F : I \times I \to S^1$ l'homotopie correspondante et $\tilde{\gamma}$ un relèvement de γ obtenu précédemment. On trouve donc une homotopie $\tilde{F}$ comme ci-dessus. Le chemin $\tilde{\gamma}' = \tilde{F}(-,1)$ est un relèvement de γ'.

Notons que le morphisme $\tilde{F}(-,1) : I \to \mathbb{R}$ est à valeur dans l'espace discret $\mathbb{Z}$ (du fait que $p \circ \tilde{F}(-,1) = 1$ par construction). Comme $\tilde{F}(-,1)$ est continu, on obtient que $F(-,1)$ est constante, ce qui implique comme attendu :

$$\tilde{\gamma}(1) = \tilde{F}(0,1) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{\gamma}'(1).$$

On obtient donc une application bien défini :

$$d : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}, \gamma \mapsto \tilde{\gamma}(1).$$

Par construction, $d \circ \nu = Id$. Si l'on montre que d est injective, on obtiendra donc que d est une bijection avec pour réciproque ν. Donc d sera un isomorphisme de groupes comme attendu.

Supposons $d(\gamma) = d(\gamma')$ Autrement dit, les chemins $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}$ de $\mathbb{R}$ ont même fin. On en déduit que le chemin composé $\tilde{\gamma}'.\tilde{\gamma}^{-1}$ est un lacet. La propriété (R1) implique donc que la classe d'homotopie du lacet $\tilde{\gamma}'.\tilde{\gamma}^{-1}$ est triviale. Par application du morphisme :

$$p_* : \pi_1(\mathbb{R}) \to \pi_1(S^1)$$

on obtient que $\gamma'.\gamma^{-1} = 1$ dans $\pi_1(S^1)$ ce qui conclut. □

Une application classique de ce théorème :

Théorème I.3.21 **(Théorème fondamental de l'algèbre)**. — *Tout polynôme $f(X)$ à coefficients complexes non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. — Le polynôme $f(X)$ n'a qu'au plus un nombre fini de racines. Quitte à remplacer $f(X)$ par $f(n.X)$, on peut donc supposer que f ne s'annule pas sur S^1. Supposons aussi que $f(X) = X^n + a_{n_1}.X^{n-1} + \ldots + a_0$ pour $n > 0$.

On en déduit un lacet :

$$\gamma_f : S^1 \to S^1, x \mapsto f(x)/|f(x)|.$$

Supposons que $f(x)$ ne s'annule pas si $|x| \geq 1$. Alors, le morphisme

$$F : S^1 \times I \to S^1, (x,t) \mapsto f(xt)/|f(xt)|$$

défini une homotopie entre le lacet constant et le γ_f. On en déduit $\deg(f) = 0$.

Supposons que $f(X)$ ne s'annule pas si $|x| > 1$. On pose $k(X,t) = X^n + a_{n_1}.t.X^{n-1} + \ldots + a_0.t^n$. Alors,

$$F' : S^1 \times I \to S^1, (x,t) \mapsto k(x,t)/|k(x,t)|$$

défini une homotopie entre γ_f et le lacet $S^1 \to S^1, x \mapsto x^n$. On en déduit $\deg(\gamma_f) = n > 0$.

L'une des deux suppositions exclue l'autre, ce qui conclut. □

I.3.c. Groupes d'homotopie supérieurs. —

Définition I.3.22. — Soit X un espace pointé. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$\pi_n(X) = [S^n, X].$$

Cette définition montre clairement que $\pi_n(X)$ ne dépend que du type d'homotopie de X.

Exemple I.3.23. — Si X est contractile, $\pi_n(X) = *$ pour tout $n \geq 0$.

I.3.24. — Compte tenu de l'exemple I.2.14 et de l'isomorphisme (I.1), on obtient pour tout $n \geq 0$:

$$\pi_n(\Omega X) = \pi_{n+1}(X). \tag{I.2}$$

En particulier, pour tout $n > 0$,

$$\pi_n(X) = \pi_1(\Omega^{n-1} X).$$

On obtient donc une structure de groupe sur ces ensembles. On dit que $\pi_n(X)$ est le *n-ème groupe d'homotopie* de X. L'identification précédente réduit en principe le calcul des groupes d'homotopie supérieur à un calcul de groupe fondamental.

Références

[Eul58a] L. Euler. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. *Nov. Comm. Ac. sc. Petro.*, 4 :140–160, 1758.

[Eul58b] L. Euler. Elementa doctrinae solidorum. *Nov. Comm. Ac. sc. Petro.*, 4 :109–140, 1758.

[Leg94] A.-M. Legendre. *Éléments de géométrie.* Paris. Firmin Didot, 1794.

[Pon74] J.-C. Pont. Petite enfance de la topologie algébrique. *Enseignement Math. (2)*, 20 :111–126, 1974.

[San07] C. E. Sandifer. *How Euler did it.* MAA Spectrum. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2007.

---

deuxième semestre 2015/2016

Frédéric Déglise, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* frederic.deglise@ens-lyon.fr
Url : http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/