Table des matières

COURS II
H-GROUPES ET FIBRATIONS

II.1. H-groupes

Le but de cette section est de présenter une structure fondamentale sur l'espace des lacets d'un espace pointé (exemple II.1.3) et de montrer que les groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ sont abéliens pour $n \geq 2$.

II.1.a. Objets en groupes. —

II.1.1. — La théorie des catégories permet d'étendre les structures algébriques classiques à des objets qui ne sont pas, ou sont plus que, des ensembles. Ainsi, on peut définir une structure de groupes sur un ensemble de manière purement catégorique : un groupe G est objet de la catégorie des ensembles muni de flèches :

$$\mu : G \times G \to G, \nu : G \to G, \eta : * \to G$$

appelées respectivement produit, inverse, unité ; les axiomes de la structure de groupe se traduisent par les diagrammes commutatifs suivants :

neutre	associativité	inverse
$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(\eta,1_G)"] \arrow[dr, equal] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[l, "(1_G,\eta)"'] \arrow[dl, equal] \\ & G & \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "\mu\times 1_G"] \arrow[d, "1_G\times\mu"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(1_G,\nu)"] \arrow[dr, equal] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[l, "(\nu,1_G)"'] \arrow[dl, equal] \\ & G & \end{tikzcd}$

Il est évident que cette définition a du sens dans n'importe quelle catégorie munie d'un produit et d'un objet final.

On peut appliquer ces définitions à la catégorie des espaces, des variétés différentielles, des variétés algébriques : on obtient respectivement les groupes topologiques, groupes de Lie, groupes algébriques.

D'après le lemme I.3.2, la catégorie homotopique $\mathscr{H}_*$ est munie d'un produit donné par le produit d'espaces pointés. On vérifie en effet grâce au lemme mentionné que la première propriété universelle énoncée dans le paragraphe I.2.5 est vérifiée dans la catégorie $\mathscr{H}_*$ – on fera attention qu'il faut remplacer les diagrammes commutatifs par la condition d'existence d'une homotopie.

Définition II.1.2. — Un *H-groupe* est un espace G muni d'une structure de groupe dans la catégorie $\mathscr{H}_*$. Notons que G est alors pointé par le morphisme unité.

Autrement dit, G est un H-groupe si on dispose des données énoncées au début du paragraphe précédent les morphismes étant des classes d'homotopie non pointées. Ces données sont sujettes à la condition que les diagrammes énoncés sont *commutatifs à homotopie près* : autrement dit, tout partie du diagramme n'est peut-être pas commutative mais par contre, il existe une homotopie entre les deux flèches composées qui forment son bord.

Exemple II.1.3. — L'exemple fondamental de H-groupe est donné par l'espace des lacets ΩX de n'importe quel espace X. On a déjà vu cette structure lorsqu'on a défini la structure de groupe sur l'ensemble $\pi_1(X)$ (cf. lemme I.3.13) : ainsi, la multiplication

$$\mu : \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$$

est induite par la composition des lacets (dont on vérifie immédiatement qu'elle définie un morphisme continu pour les topologies compacte-ouvert). L'élément neutre $* \to \Omega X$ est donné par le lacet constant. L'inverse est donné par l'endomorphisme $\nu : \Omega X \to \Omega X$ qui à $\gamma(t)$ associe le lacet $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$.

Le point 2 du Lemme I.3.13 montre très exactement les axiomes de H-groupe sur ΩX.

Remarque II.1.4. — Il est commode de noter

$$-\mathrm{Id} : \Omega X \to \Omega X$$

pour l'inverse de la structure canonique de H-groupe sur ΩX. Mais on fera attention que ΩX n'est pas un H-groupe commutatif en général.

II.1.b. Objets en co-groupes. — En vue du théorème sur les les groupes d'homotopie supérieur, on a besoin de "dualiser" (au sens des catégories) les notions du paragraphe précédent.

II.1.5. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie admettant des sommes et un objet initial. Alors, la catégorie opposée $\mathscr{C}^{op}$ admet des produits et un objet final. On peut donc sur le modèle de la section précédente parler de groupe dans la catégorie $\mathscr{C}^{op}$. On les appellera des co-groupes dans $\mathscr{C}$.

Remarquons que cela s'applique en particulier à la catégorie homotopique $\mathscr{H}$: la somme dans cette catégorie est induite par la somme usuelle des espaces (par une nouvelle application du Lemme I.3.2) et l'espace trivial $*$ est l'objet initial.

Définition II.1.6. — Un *H-co-groupe* est un espace pointé K muni d'une structure de groupe dans la catégorie $\mathscr{H}_*^{op}$.

Autrement dit, on se donne des (classes d'homotopie de) flèches :

$$\delta : K \to K \vee K, \nu : K \to K$$

appelées respectivement co-produit et co-inverse ; la co-unité est la flèche canonique $\eta' : K \to *$. Les axiomes de la structure de co-groupe se traduisent par le fait que les diagrammes suivants sont commutatifs à homotopie près :

neutre	associativité	inverse
$\begin{tikzcd} K & K \vee K \arrow[l, "\eta\vee 1_K"'] \arrow[r, "1_K\vee\eta"] & K \\ & K \arrow[ul, equal] \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} K \vee K \vee K & K \vee K \arrow[l, "\mu\vee 1_K"'] \\ K \vee K \arrow[u, "1_K\vee\mu"] & K \arrow[l, "\delta"] \arrow[u, "\delta"'] \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} K & K \vee K \arrow[l, "1_K\vee\nu"'] \arrow[r, "\nu\vee 1_K"] \arrow[d, "\mu"] & K. \\ & K \arrow[ul, equal] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$

Exemple II.1.7. — Soit X un espace pointé. Alors l'espace des suspensions ΣX est canoniquement muni d'une structure de H-co-groupe.

Si l'on écrit

$$\Sigma X = (I \times X)/(\{0\} \times X \cup \{1\} \times X \cup I \times *)$$

On peut définir $\mu' : \Sigma X \to \Sigma X \wedge \Sigma X$ par la formule :

$$\gamma(t,x) = \begin{cases} (2t,x)_1 & \text{si } t \leq 1/2, \\ (2t-1,x)_2 & \text{si } t \geq 1/2. \end{cases}$$

Les axiomes se vérifient comme dans le cas de l'espace des lacets (exemple II.1.3).

II.1.c. Structures algébriques sur les classes d'homotopie. — Commençons par un petit lemme de théorie des catégories :

***Lemme II.1.8* (Eckmann-Hilton).** — *Les objets en groupe dans la catégorie des groupes sont les groupes abéliens.*

Plus concrètement : Soit G un ensemble muni de deux structures de groupes $(*, 1^*)$ et $(\circ, 1^\circ)$ qui sont compatibles :

$$\forall f,g,h,k \in G^4, (f \circ g) * (h \circ k) = (f * h) \circ (g * k).$$

Alors les conditions $1^* = 1^\circ$, les lois de groupes $*$ et $\circ$ coincident et cette loi de groupe est commutative.

La preuve tient en trois lignes :

$$\begin{aligned}
&1^\circ = 1^\circ \circ 1^\circ = (1^\circ * 1^*) \circ (1^* * 1^\circ) = (1^\circ \circ 1^*) * (1^* \circ 1^\circ) = 1^* * 1^* = 1^*, \\
&f \circ g = (f * 1) \circ (1 * g) = (f \circ 1) * (1 \circ g) = f * g \text{ où } 1 = 1^\circ = 1^*, \\
&f.g = (1.f).(g.1) = (1.g).(f.1) = g.f \text{ où } . = * = \circ.
\end{aligned}$$

Théorème II.1.9. — *Les conditions suivantes sont vérifiées pour les classe d'homotopie pointées.*

1. *Si G est un H-groupe, et X un espace pointé, l'ensemble $[X,G]_*$ est muni d'une structure de groupe induite par*

$$(f : X \to G, g : X \to G) \mapsto (f.g : X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} G \times G \xrightarrow{\mu} G)$$

   où Δ est l'application diagonale.

2. *Si K est un H-cogroupe, et X un espace pointé, l'ensemble $[K,X]_*$ est muni d'une structure de groupe induite par*

$$(f : K \to X, g : K \to X) \mapsto (f.g : K \xrightarrow{\delta} K \vee K \xrightarrow{f \vee g} K \vee K \xrightarrow{\Delta'} K)$$

   où Δ' est l'application co-diagonale.

3. *Si G est un H-groupe et K un H-cogroupe, alors l'ensemble $[K,X]_*$ est muni d'une structure de groupe abélien canonique.*

Démonstration. — Le point (1) (resp. (2)) provient trivialement du fait que $[X,Y]_*$ est fonctoriel covariant Y (resp. fonctoriel contravariant en X). Le point (3) résulte de Hilton-Eckmann compte tenu du fait que les deux structures de groupes induites par les points (1) et (2) sont compatibles (par une nouvelle application du fait que $(X,Y) \to [X,Y]_*$ est un bifoncteur. □

L'application principale du théorème précédent est le résultat suivant :

Corollaire II.1.10. — *Soit X un espace pointé. Alors pour tout $n \geq 2$, le groupe $\pi_n(X)$ est abélien.*

En effet, dans ce cas, on obtient :

$$\pi_n(X) = [S^n, X]_* = [\Sigma S^{n-2}, \Omega X]_*$$

et le résultat suit des exemples II.1.3 et II.1.7.

II.2. Fibrations

II.2.a. La proprité de relèvement. —

Définition II.2.1. — Soit $p : E \to B$ un morphisme d'espaces.

On dit que p admet la *propriété de relèvement à droite* par rapport à une flèche $f : X \to Y$ si pour tout carré commutatif de la forme suivante, il existe une flèche pointillée faisant commuter les deux triangles :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B. \end{tikzcd} \tag{II.1}$$

On dit que p est une *fibration*[1] si elle admet la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes d'inclusion évidente

$$X \times \{0\} \to X \times I$$

pour un espace X arbitraire.

On dit que p est une *fibration de Serre* si elle admet la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes d'inclusion évidente $I^{n-1} \times \{0\} \to I^n$ pour tout entier $n > 0$.

Pour un point $b \in B$, on pose $X_b = p^{-1}(\{b\})$ muni de la topologie induite par celle de X et on l'appelle la *fibre* de p en b. Lorsqu'on voit E_b comme un espace pointé, c'est toujours par le point $b \in E_b$.
Lorsque B est pointé, on parlera par convention de la *fibre de p* pour désigner la fibre de p en le point base de B.

Remarque II.2.2. — Il est clair qu'une fibration est une fibration de Serre. La réciproque est vraie si l'on se restreint aux espaces qui sont des CW-complexes.

Exemple II.2.3. —

1. Un exemple évident de fibration est donné par la projection canonique $X = B \times F \to B$ pour tout espaces X et B.
2. Nous avons déjà vu un exemple de fibration de Serre dans la preuve du théorème I.3.18 :
$$\exp : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2i\pi.t},$$
le *revêtement universel* de S^1.

   Le principe de la preuve du lemme I.3.19, comme expliqué pour le lemme I.3.20, permet en effet de montrer facilement que exp est une fibration de Serre.
3. On définit un *fibré topologique*[2] de fibre un espace fixé F tout morphisme $p : E \to B$ tel que pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b dans B tel qu'il existe un homéomorphisme $\varphi_U : p^{-1}(U) \to U \times F$ faisant commuter le diagramme suivant :
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F. \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$
Il est clair que le morphisme $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ est un fibré topologique de fibre $\mathbb{Z}$.

   Appliquant le même genre de raisonnement que pour le lemme I.3.19, on montre que tout fibré topologique $p : E \to B$ est une fibration de Serre.

Voici une notion catégorique qui permet d'étudier finement les fibrations.

---

1. on dit parfois *fibration d'Hurewicz* puisque c'est le Hurewicz est le premier auteur à les avoir introduites ;
2. *fiber bundle* en anglais ;

Définition II.2.4. — Soit B un espace fixé.

On définit la catégorie $\mathscr{T}op/B$ comme la catégorie dont les objets sont les morphismes $p : X \to B$ et les morphismes sont les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y. \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

On dit encore que X est un B-*espace de morphisme structural* p et que $f : X \to Y$ est un morphisme de B-espaces.

Soit $f, g : X \to Y$ deux morphismes de B-espaces. On définit une B-*homotopie* (3) de f vers g comme un B-morphisme

$$H : X \times I \to Y$$

où $X \times I$ est vu comme B-espace par le morphisme évident $X \times I \to X \to Y$ tel que : $H(-,0) = p$ et $H(-,1) = q$.

Nous dirons encore que les B-morphismes f et g sont B-*homotopes*.

Notons encore que le fait que H soit un B-morphisme se traduit par le fait que pour tout $t \in I$, $H(-,t) : X \to Y$ est un B-morphisme.

Remarque II.2.5. — Il est claire que la relation de B-homotopie est une relation d'équivalence sur les B-morphismes. Elle est plus forte que la relation d'homotopie.

Si $f : X \to Y$ est une morphisme de B-espaces, pour tout point $b \in B$, f induit de manière évidente un morphisme $f_b : X_b \to Y_b$. La notion d'équivalence de B-homotopie se définit comme celle d'équivalence d'homotopie (cf. Def. I.3.9).

Lemme II.2.6. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de B-espaces. Si f est une équivalence de B-homotopie de réciproque g, alors pour tout point $b \in B$, f_b est une équivalence d'homotopie de réciproque g_b.*

La démonstration de ce lemme est un bon exercice pour se familiariser avec le langage abstrait de la définition précédente.

II.2.7. — Les fibres d'une fibration $p : E \to B$ sont reliées suivant la topologie de B.

Fixons deux point $b, c \in B$. Nous noterons $P^h_{b,c}B$ l'ensemble des chemins de b à c dans B modulo la relation d'homotopie relativement à $\{b, c\}$. (4)

Soit $\sigma : I \to B$ un chemin de b à c dans B. D'après la propriété de relèvement à droite de p, on peut trouver une flèche pointillée daisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E_b \times \{0\} \arrow[rr] \arrow[d] & & E \arrow[d, "p"] \\ E_b \times I \arrow[r, "p_2"'] \arrow[urr, dashed, "\tilde{\sigma}"] & I \arrow[r, "\sigma"] & B, \end{tikzcd}$$

où p_2 est la projection évidente. Alors, le morphisme $\tilde{\sigma}$ induit un morphisme

$$\sigma_* : E_b \to E_c, x \mapsto \tilde{\sigma}(x, 1).$$

Proposition II.2.8. — *L'association $\sigma \mapsto \sigma_*$ décrite dans le paragraphe précédent induit une application bien déterminée :*

$$P^h_{b,c}B \to [E_b, E_c].$$

3. *fiber homotopy* en anglais ;
4. Une homotopie $H : I \to I \to B$ relativement à $\{b, c\}$ doit vérifier $H(0,t) = b$ et $H(1,t) = c$.

Démonstration. — Supposons qu'on ait deux chemins σ_0, σ_1 de b à c dans B qui sont homotopes relativement à $\{b, c\}$. Soit $H : I \times I \to B$ une homotopie correspondante. Considérons un relèvement $\tilde{\sigma}_i$ de σ_i obtenu suivant le procédé décrit précédemment. On peut considérer le sous-espace de I^2 suivant :

$$J^2 := (I \times \{0\}) \cup (I \times \{1\}) \cup (\{0\} \times I).$$

Alors, il existe un homéomorphisme $I^2 \to I^2$ qui envoie J^2 sur $I \times \{0\}$. Ainsi, p admet la propriété de relèvement à droite par rapport à l'inclusion $E_b \times J^2 \to E_b \times I^2$. On en déduit une flèche pointillée faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E_b \times J^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[d] & & E \arrow[d, "p"] \\ E_b \times I^2 \arrow[urr, dashed, "\tilde{H}"] \arrow[r, "p_2"'] & I^2 \arrow[r, "H"] & B, \end{tikzcd}$$

où on a posé

$$f = (\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1, i_b \circ p_1) : (E_b \times I \times \{0\}) \cup (E_b \times I \times \{1\}) \cup (E_b \times \{0\} \times I) \to B$$

où $i_b : E_b \to E$ est l'inclusion canonique.

Il en résulte que $\tilde{H}(-, -, 1)$ est une homotopie de $\tilde{\sigma}_0$ à $\tilde{\sigma}_1$ et cela conclut. □

II.2.9. — Par construction, il est clair que les relations suivantes sont vérifiées :

$$(\mathrm{ct}_b)_* = \mathrm{Id}_{E_b}, \qquad \forall (\sigma, \sigma') \in P^h_{b,c}B \times P^h_{c,d}B, (\sigma.\sigma')_* = \sigma_* \circ \sigma'_*.$$

On déduit de cette construction les deux résultats suivants :

Corollaire II.2.10. — *Soit $p : E \to B$ une fibration telle que B est connexe par arc. Alors pour tout $b, c \in B$, les fibres E_b et E_c ont même type d'homotopie.*

Ainsi, une fibration de base connexe correspond intuitivement à une déformation continue d'un même type d'homotopie E_b.

Corollaire II.2.11. — *Soit $p : E \to B$ une fibration. Alors, pour tout point base $b \in B$, il existe un morphisme de groupes canonique :*

$$\pi_1(B, b) \to [E_b, E_b].$$

Nous reviendrons sur cette action du groupe fondamental sur les fibres d'une fibration.

II.2.b. Espace des chemins. —

II.2.12. — On peut utiliser une variante de l'espace des chemins (cf. I.2.15) pour montrer que tout morphisme d'espaces $f : X \to Y$ est homotope à une fibration.

Ainsi, l'espace Y^I est l'espace des chemins non pointés d'un espace donné Y. On considère alors le produit fibré suivant dans la catéogrie des espaces non pointés :

$$\begin{tikzcd} N(f) \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & Y^I \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{ev}_0(\sigma) = \sigma(0)$. Autremenet dit

$$N(f) = \{(x, \sigma) \mid x \in X, \sigma : I \to Y, \sigma(0) = f(x)\}.$$

On construit de plus un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} N(f) \arrow[r, "\bar f"] & Y \arrow[d, equal] \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

où $\bar{f}(x,\sigma) = \sigma(1)$ et $i(x) = (x, \mathrm{ct}_{f(x)})$ où $\mathrm{ct}_{f(x)}$ est le chemin constant dans Y de valeur $f(x)$.

Proposition II.2.13. — *Considérons les notations ci-dessus.*

1. *les morphismes r et i sont des équivalences d'homotopie réciproques ;*
2. *le morphisme $\bar{f}$ est une fibration.*

Démonstration. — Point (1) : étant donné que $r \circ i = \mathrm{Id}$, il suffit de montrer que la composée $i \circ r, (x,\sigma) \mapsto (x, \mathrm{ct}_{f(x)})$ est une équivalence d'homotopie ; l'homotopie est donnée par la formule :

$$H : N(f) \times I \to N(f), (x,\sigma,t) \mapsto (x, s \mapsto \sigma(ts)).$$

Point (2) : on doit montrer l'existence de la flèche pointillée dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & N(f) \arrow[d, "\bar f"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde H"] & Y. \end{tikzcd}$$

pour i l'inclusion évidente.

Introduisons quelques notations : pour $z \in Z$, on pose $g(z) = (x_z, \sigma_z)$, où $x_z \in X$, $\sigma_z : I \to Y$, vérifient $\sigma_z(0) = f(x_z)$. Par ailleurs, la commutativité du diagramme extérieur montre que

$$\sigma_z(1) = H(z,0). \tag{II.2}$$

On définit alors $\tilde{H}$ par la formule :

$$\tilde{H}(z,t) = (x_z, \sigma_z.H(z,t.)) \in N(f)$$

où $H(z,t.)$ désigne le chemin $s \mapsto H(z,ts)$ et l'opération . est la composition des chemins. Notons en effet que la composition est bien définie à cause de la relation (II.2) qui provient de la commutation du carré ci-dessus.

On obtient :

- $\tilde{H}(z,0) = (x_z, \sigma_z)$ car $H(z,0.)$ est le lacet constant basé en $f(x_z)$: le triangle supérieur est commutatif.
- $\bar{f} \circ \tilde{H}(z,t) = H(z,t.1) = H(z,t)$: le triangle inférieur est commutatif.

□

Exemple II.2.14. — L'exemple fondamental de la construction précédente est celui de l'espace des chemins.

Soit $(X,*)$ un espace pointé. Si on applique la construction précédente au morphisme d'inclusion $f : * \to X$, on obtient $N(f) = PX$, espace des chemins associé à l'espace pointé $(X,*)$ (voir §I.2.15).

D'après la proposition précédente, l'espace PX est contractile et on obtient une fibration :

$$p : PX \to X, \sigma \mapsto \sigma(1)$$

dont la fibre est l'espace des lacets ΩX (cf. Ex. I.2.14). Cette fibration est fondamentale en topologie algébrique. On l'appelle la *fibration des chemins* (traduction litérale de « path fibration »).

On peut s'attendre au fait que la construction précédente visant à remplacer, à homotopie près, un morphisme f par la fibration $\bar{f}$ soit spéciale si $f = p$ est déjà une fibration.

Proposition II.2.15. — *Soit $p : E \to B$ une fibration.*
Alors, le B-morphisme d'inclusion canonique :

$$\bar{\nu} : E \to N(p), e \mapsto (e, \mathrm{ct}_{p(e)})$$

est une equivalence de B-homotopie.

Démonstration. — Suivant la propriété de relèvement de p, on considère la flèche pointillée faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} N(p) \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{H}_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ N(p) \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

avec les définitions suivantes :

$$\tilde{H}_0(x, \sigma) = x, \quad H(x, \sigma, t) = \sigma(t).$$

On en déduit une homotopie

$$K : N(p) \times I \to N(p), (x, \sigma, t) \mapsto \big(\tilde{H}(x, \sigma, t), \sigma|_{[t,1]}\big).$$

Or K est bien définie car :

$$\sigma|_{[t,1]}(0) = \sigma(t) = H(x, \sigma, t) = f(\tilde{H}(x, \sigma, t)).$$

Par ailleurs, K est une équivalence de B-homotopie : on doit montrer que pour tout $t \in I$, K_t est un B-morphisme. En effet :

$$\bar{p}\big(K(x, t)\big) = \bar{p}\big(\tilde{H}(x, \sigma, t), \sigma|_{[t,1]}\big) = \sigma|_{[t,1]}(1) = \sigma(1) = \bar{p}(x, \sigma).$$

Par ailleurs, $K(-, -, 0) = Id_{N(p)}$. En effet :

$$K(x, \sigma, 0) = \big(\tilde{H}(x, \sigma, 0), \sigma|_{[0,1]}\big) = (x, \sigma).$$

Et pour tout $(x, \sigma) \in N(p)$,

$$K(x, \sigma, 1) = \big(\tilde{H}(x, \sigma, 1), \sigma|_{[1,1]}\big) = \big(\tilde{H}(x, \sigma, 1), \mathrm{ct}_{\sigma(1)}\big) \in E.$$

On peut donc définir un morphisme :

$$k : N(p) \to E, (x, \sigma) \mapsto K(x, \sigma, 1).$$

On peut maintenant montrer que $\bar{\nu}$ est une équivalence de B-homotopie de réciproque k :

– $\nu \circ k \underset{\text{htp}}{\sim} \mathrm{Id}_{N(p)}$ par l'homotopie K ;
– $k \circ \nu \underset{\text{htp}}{\sim} \mathrm{Id}_E$ par l'homotopie $K|_{E \times I}$.

□

Remarque II.2.16. — On fera attention que le morphisme r n'est pas un B-morphisme.

Corollaire II.2.17. — *Soit $p : E \to B$ une fibration et $b \in B$ un point base. Alors le morphisme canonique :*

$$E_b \xrightarrow{\bar{\nu}_b} (N(p))_b$$

est une équivalence d'homotopie.

Remarque II.2.18. — On notera que la preuve précédente ne donne pas de réciproque de $\bar{\nu}_b$ explicite.

II.2.c. Suites homotopiquement exactes. —

II.2.19. — Le noyau (resp. image) d'un morphisme d'ensembles pointés $(A,a) \xrightarrow{f} (B,b)$ est l'ensemble pointé $(f^{-1}(a),a)$ (resp. $(f(A),b)$). On le note $\mathrm{Ker}(f)$ (resp. $\mathrm{Im}(f)$). On dit qu'une suite de morphismes d'ensemble pointés

$$C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C''$$

est exacte si $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Si on a une suite formée de plus de deux ensembles pointés, on dit qu'elle est exacte si toute sous-suite formée de deux applications consécutives est exacte.

Définition II.2.20. — Considérons une suite

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

d'espaces pointés. Nous dirons que cette suite est *homotopiquement exacte* si pour tout espace pointé W, la suite d'ensembles pointés :

$$[W,X]_* \xrightarrow{f_*} [W,Y]_* \xrightarrow{g_*} [W,Z]_* \tag{II.3}$$

est exacte.

De même nous dirons qu'une suite de plusieurs morphismes d'espaces pointés est homotopiquement exacte si toute sous-suite formée de deux morphismes consécutives l'est.

Voici quelques résultats évidents concernant la stabilité de la notion de suite homotopiquement exacte.

Proposition II.2.21. — 1. *Considérons un diagramme d'espaces pointés*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & Z \arrow[d, "l"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \end{tikzcd}$$

tels que les carrés sont commutatifs à homotopie près et les morphismes h, k, l sont des équivalences d'homotopie. Alors la suite du haut est homotopiquement exacte si et seulement si la suite du bas est homotopiquement exacte.

2. *Soit*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

une suite homotopiquement exacte d'espaces pointés.

   (a) *Alors, pour tout espace W, la suite suivante est homotopiquement exacte :*

$$X^W \xrightarrow{f^{\mathrm{Id}}} Y^W \xrightarrow{g^{\mathrm{Id}}} Z^W.$$

   (b) *Pour tout entier $n \geq 0$, la suite suivante est homotopiquement exacte :*

$$\Omega^n X \xrightarrow{\Omega^n(f)} \Omega^n Y \xrightarrow{\Omega^n(g)} \Omega^n Z.$$

   (c) *Pour tout entier $n \geq 0$, la suite suivante est homotopiquement exacte :*

$$\Omega^n X \xrightarrow{-\Omega^n(f)} \Omega^n Y \xrightarrow{-\Omega^n(g)} \Omega^n Z$$

   où $-\mathrm{Id} : \Omega^n X \to \Omega^n X$ désigne l'opposé pour la structure de H-groupe sur $\Omega^n X$ (cf. Remarque II.1.4).

Exemple II.2.22. — Soit X un espace pointé. On voit facilement que la suite suivante (cf. Example II.2.14)

$$\Omega X \hookrightarrow PX \xrightarrow{p} X$$

est homotopiquement exacte.

En élaborant l'exemple précédent, on introduit la définition suivante :

Définition II.2.23. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces pointés. On définit la *fibre homotopique* $F(f)$ de f, par le diagramme cartésien d'espaces pointés suivant :

$$\begin{tikzcd} F(f) \arrow[r] \arrow[d, "\pi(f)"'] & PY \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Concrètement :

$$F(f) = \{(x, \sigma) \mid x \in X, \sigma : I \to Y, \sigma(0) = *, \sigma(1) = f(x)\}.$$

Notons que $F(f)$ est pointé par $(*, \mathrm{ct}_*)$ et on a la formule : $\pi(f)(x, \sigma) = x$.

Cette définition va nous permettre de construire un grand nombre de suites homotopiquement exactes :

Proposition II.2.24. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces pointés. Alors, la suite suivante :*

$$F(f) \xrightarrow{\pi(f)} X \xrightarrow{f} Y$$

est homotopiquement exacte.

Démonstration. — On utilisera le lemme trivial suivant :

Lemme II.2.25. — *Soit $f : X' \to Y'$ un morphisme d'espace pointé. Soit ct_* le morphisme $X' \to Y'$ constant de valeur le point base de Y.*

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f \underset{\text{htp}}{\sim} \mathrm{ct}_*$ *;* [5]
2. *il existe un morphisme d'espaces pointés $\tilde{f}$ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} & PY' \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"] \\ X' \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "f"'] & Y'. \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\tilde{f}$ correspond par adjonction à l'homotopie qui réalise le point 1.

Revenons à la preuve de la proposition. On pose $\pi = \pi(f)$ pour simplifier. Soit W un espace pointé. Montrons que la suite suivante d'ensembles pointés est exacte :

$$[W, F(f)]_* \xrightarrow{\pi_*} [W, X]_* \xrightarrow{f_*} [W, Y]_*.$$

Cela résulte immédiatement du lemme précédent : en effet, $g : W \to X$ vérifie $f \circ g = \mathrm{ct}_*$ si et seulement si il existe un morphisme h' faisant commuter le diagrame suivant : Pour cela, on considère le diagrame :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h'"'] \arrow[rr, bend left, "h"] \arrow[dr, "g"'] & F(f) \arrow[r] \arrow[d, "\pi(f)"] & PY \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"] \\ & X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

En effet, existence de h' est équivalente à celle de h et il suffit donc d'appliquer le lemme précédent.

□

5. on dit encore que f est homotopiquement trivial ;

II.2.26. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces pointés.

On considère le produit fibré suivant dans la catégorie des espaces pointés :

$$\begin{tikzcd} N'(f) \arrow[r] \arrow[d, "r'"'] & Y^I \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

de sorte que $N'(f) = \{(x, \sigma) \in X \times Y^I \mid \sigma(1) = f(x)\}$, pointé par le point base $(*, \mathrm{ct}_*)$. On définit un morphisme d'espace pointé :

$$\bar{f}' : N'(f) \to Y^I \xrightarrow{\mathrm{ev}_0} Y, (x, \sigma) \mapsto \sigma(0).$$

Il est clair que le Y-morphisme $\bar{f}'$ est homéomorphe au Y-morphisme $\bar{f}$ de sorte que les résultats obtenus dans la section précédente s'appliquent ici (on a juste échangé le rôle de 0 et 1 dans I) :

- Le morphisme $\bar{f}' : N'(f) \to Y$ est une fibration (cf. II.2.13).
- Si $f : X \to Y$ est une fibration, le morphisme canonique :

  $$\bar{\nu} : X \to N'(f), x \mapsto (x, \mathrm{ct}_{f(x)})$$

  est une équivalence de B-homotopie (cf. II.2.15).

D'après le choix de nos conventions, la fibre du morphisme pointé $\bar{f} : N'(f) \to X$ n'est autre que la fibre homotopique

$$F(f) = \{(x, \sigma) \in N'(f) \mid \sigma(0) = *\}.$$

Il est clair que $\bar{\nu}$ envoie la fibre $F = f^{-1}(*)$ de f sur la fibre homotopiqe $F(f)$. On en déduit une diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, "\nu(f)"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\bar{\nu}"] & Y \arrow[d, equal] \\ F(f) \arrow[r] \arrow[ur, "\pi(f)"] & N'(f) \arrow[r, "\bar{f}"] & Y \end{tikzcd}$$

tel que :

- $\bar{\nu}$ est toujours une équivalence d'homotopie ;
- si $f : X \to Y$ est une fibration, $\bar{\nu}$ est une équivalence de B-homotopie et donc, $\nu(f)$ est une équivalence d'homotopie.

On déduit donc de la proposition précédente le résultat suivant :

Proposition II.2.27. — *Soit $p : E \to B$ une fibration entre espaces pointés de fibre F.*

Alors la fibre homotopique $F(p)$ de p est canoniquement homotopiquement équivalente à F (par le morphisme $\nu(f)$). De plus, la suite suivante est homotopiquement exacte :

$$F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B.$$

Remarque II.2.28. — On notera par ailleurs que l'on a définit la fibre homotopique d'un morphisme $f : X \to Y$ quelconque en considérant une factorisation (canonique)

$$X \xrightarrow{\bar{\nu}} N'(f) \xrightarrow{\bar{f}} Y$$

où $\bar{\nu}$ est une équivalence d'homotopie et $\bar{f}$ une fibration. La fibre homotopie de f nb'est autre que la fibre au sens naïf de $\bar{f}$.

---

deuxième semestre 2015/2016

Frédéric Déglise, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* `frederic.deglise@ens-lyon.fr`
Url : `http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/`