

Table des matières

Cours III. Fibrations et stabilité	1
III.1. Fibrations	1
III.1.a. Suite exacte longue d'homotopie	1
III.1.b. Exemples de fibrations	3
III.2. Le théorème de suspension de Freudenthal	4
III.2.a. Rappels sur les CW-complexes	4
III.2.b. Excision	8
III.2.c. Groupes d'homotopie stables	9
Références	11

COURS III FIBRATIONS ET STABILITÉ

III.1. Fibrations

III.1.a. Suite exacte longue d'homotopie. —

III.1.1. — Reprenons les notations de la proposition II.2.24. Alors, en itérant la construction de la fibre homotopique, on obtient une suite longue homotopiquement exacte :

$$Y \xleftarrow{f} X \xleftarrow{\pi(f)} F(f) \xleftarrow{\pi^2(f)} F(\pi(f)) \leftarrow \dots \leftarrow F(\pi^{n-1}(f)) \xleftarrow{\pi^{n+1}(f)} F(\pi^n(f)) \leftarrow \dots$$

On a déjà vu que, lorsque f est une fibration, on peut calculer la fibre homotopique de f comme la fibre au sens naïf de f .

Du fait que les morphismes $\pi^n(f)$ sont tous des fibrations pour $n > 0$, on s'attend à pouvoir calculer à homotopie près les autres termes de la suite.

Proposition III.1.2. — *Considérons les notations précédente. Alors la fibre au sens naïf de*

$$\pi(f) : F(f) \rightarrow X \text{ resp. } \pi^2(f) : F(\pi(f)) \rightarrow F(f)$$

est égale à ΩY (resp. ΩX). De plus, dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 F(\pi^2(f)) & \xrightarrow{\pi^3(f)} & F(\pi(f)) & \xrightarrow{\pi^2(f)} & F(f) & \xrightarrow{\pi(f)} & X \\
 \nu(\pi^2(f)) \uparrow & \nearrow (1) \iota & \uparrow \nu(\pi(f)) & \nearrow (3) & & & \\
 \Omega X & \xrightarrow{-\Omega(f)} & \Omega Y & & & &
 \end{array}$$

les triangles (1) et (3) sont commutatifs et le triangle (2) est commutatif à homotopie près.

Démonstration. — on peut calculer les fibres homotopiques explicitement :

$$\begin{aligned}
 F(f) &= \{(x, \sigma) \in (X, PY) \mid \sigma(1) = f(x)\}, \\
 F(\pi(f)) &= \{(\sigma, \gamma) \in (PY, PX) \mid \sigma(1) = f(\gamma(1))\}.
 \end{aligned}$$

On peut aussi calculer explicitement les morphismes de projections de la fibre homotopique :

$$\begin{aligned}
 \pi(f) : F(f) &\rightarrow X, (x, \sigma) \mapsto x, \\
 \pi^2(f) : F(\pi(f)) &\rightarrow F(f), (\sigma, \gamma) \mapsto (\gamma(1), \sigma).
 \end{aligned}$$

Il est donc clair que la fibre de $\pi(f)$ (resp. $\pi^2(f)$) est ΩY (resp. ΩX). Le fait que les carrés (1) et (3) sont commutatifs est évident.

Notons que du fait que $\pi(f)$ (resp. $\pi^2(f)$) sont des fibrations, on déduit que

$$\nu(\pi(f) : \Omega Y \rightarrow F(\pi(f)), \omega \mapsto (\omega, \text{ct}_*))$$

est une équivalence d'homotopie (cf. II.2.27).

Par ailleurs, on peut définir une équivalence d'homotopie réciproque explicite de $\nu(\pi(f))$ par la formule suivante :

$$\rho : F(\pi(f)) \rightarrow \Omega Y, (\sigma, \gamma) \mapsto \sigma.(f\gamma)^{-1}.$$

En effet, on a clairement $\rho \circ \nu(\pi(f)) = \text{Id}_{\Omega Y}$.

Le morphisme d'inclusion canonique ι se calcule comme suit :

$$\iota : \Omega X \hookrightarrow F(\pi(f)), \omega \mapsto (\text{ct}_*, \omega).$$

Dès lors, on obtient la relation :

$$\rho(\iota(\omega)) = \rho(\text{ct}_*, \omega) = (f\omega)^{-1}.$$

Autrement dit, $\rho \circ \iota = -\Omega(f)$ ce qui montre que (2) est commutatif à homotopie près. \square

III.1.3. — Sous les hypothèses de la proposition précédente, on note

$$\partial(f) : \Omega Y \hookrightarrow F(f)$$

le morphisme d'inclusion de la fibre de $\pi(f)$ dans $F(f)$. Comme corollaire de la proposition précédente, on en déduit le théorème suivant :

Théorème III.1.4. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces pointés.

Alors, la suite suivante est homotopiquement exacte :

$$\begin{aligned} \dots & \xrightarrow{-(-1)^n \Omega^n(\partial(f))} \Omega^n(F(f)) \xrightarrow{(-1)^n \Omega^n(\pi(f))} \Omega^n(X) \xrightarrow{(-1)^n \Omega^n(f)} \Omega^n(Y) \\ \dots & \xrightarrow{-\Omega(\partial(f))} \Omega(F(f)) \xrightarrow{-\Omega(\pi(f))} \Omega(X) \xrightarrow{-\Omega(f)} \Omega(Y) \xrightarrow{\partial(f)} F(f) \xrightarrow{\pi(f)} X \xrightarrow{f} Y. \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit une suite exacte longue d'espaces pointés :

$$\begin{aligned} \dots & \rightarrow \pi_{n+1}(Y) \xrightarrow{\partial_{f*}} \pi_n(F(f)) \xrightarrow{\pi(f)_*} \pi_n(X) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y) \rightarrow \dots \\ \dots & \rightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y) \xrightarrow{\partial_{f*}} \pi_0(F(f)) \xrightarrow{\pi(f)_*} \pi_0(X) \xrightarrow{f_*} \pi_0(Y) \end{aligned}$$

telle que pour tout $n > 0$, les applications sur les π_n sont des morphismes de groupes.

Cet énoncé se simplifie notablement pour les fibrations, cas où on l'appliquera :

Théorème III.1.5. — Soit $p : E \rightarrow B$ un morphisme d'espaces pointés de fibre F .

Soit $i : F \rightarrow E$ l'inclusion de la fibre et notons $\partial : \Omega B \rightarrow F$ le morphisme de \mathcal{H}_* obtenu par composition :

$$\partial : \Omega B \xrightarrow{\partial(f)} F(p) \xrightarrow{\nu(f)^{-1}} F.$$

Alors, la suite suivante est homotopiquement exacte :

$$\begin{aligned} \dots & \xrightarrow{-(-1)^n \Omega^n(\partial)} \Omega^n(F) \xrightarrow{(-1)^n \Omega^n(i)} \Omega^n(E) \xrightarrow{(-1)^n \Omega^n(f)} \Omega^n(B) \\ \dots & \xrightarrow{-\Omega(\partial)} \Omega(F) \xrightarrow{-\Omega(i)} \Omega(E) \xrightarrow{-\Omega(f)} \Omega(B) \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} B. \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit une suite exacte longue d'espaces pointés :

$$\begin{aligned} \dots & \rightarrow \pi_{n+1}(B) \xrightarrow{\partial_*} \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{f_*} \pi_n(B) \rightarrow \dots \\ \dots & \rightarrow \pi_1(E) \xrightarrow{f_*} \pi_1(B) \xrightarrow{\partial_*} \pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E) \xrightarrow{f_*} \pi_0(B) \end{aligned}$$

telle que pour tout $n > 0$, les applications sur les π_n sont des morphismes de groupes.

Remarque III.1.6. — En général, il n'y a pas de moyen canonique d'obtenir une équivalence réciproque au morphisme $\nu(f)$. En particulier, on ne peut pas en général trouver un morphisme d'espaces pointés $\Omega(B) \rightarrow F$ qui relève dans $\mathcal{T}op_*$ le morphisme ∂ bien défini dans \mathcal{H}_* .

Exemple III.1.7. — Reprenons le revêtement universel de l'exemple II.2.3 : on obtient donc une suite fibre :

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1.$$

Comme \mathbb{R} est contractile et \mathbb{Z} discret, on déduit donc de la suite exacte longue d'homotopie associée à la fibration \exp on obtient donc :

$$\pi_i(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i \neq 1. \end{cases}$$

III.1.b. Exemples de fibrations. —

III.1.8. — Soit $n \geq 0$ un entier.

Il est clair que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est homotopiquement équivalent à S^{n-1} . Notons que \mathbb{R}^* agit continuellement sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ de la manière suivante : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$\lambda.(x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n).$$

L'espace quotient de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pour cette action est l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$.

Par définition, on dispose donc d'un morphisme canonique :

$$p : S^n \simeq (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}P^n$$

qui a un point de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ associe son orbite dans l'espace quotient $\mathbb{R}P^n$. Il est clair que la fibre de ce morphisme est $\mathbb{R}^* \simeq S^0 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ce morphisme est une fibration topologique puisqu'on a un recouvrement ouvert $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ évident de $\mathbb{R}P^n$ tel que $p^{-1}(U_i) = \mathbb{R}^* \times U_i$.

On déduit donc de la suite exacte longue d'homotopie associée à la fibration p et du calcul des groupes d'homotopie $\pi_1(S^n)$ que :

$$\forall n \geq 0, \pi_i(\mathbb{R}P^n) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = 1, n = 1, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } i = 1, n > 1, \\ \pi_i(S^n) & \text{si } i > 1, n > 0. \end{cases}$$

III.1.9. — On peut répéter la construction précédente avec le corps des nombres complexes \mathbb{C} . Notons que cette fois, $\mathbb{C}^n - \{0\} \simeq S^{2n-1}$.

L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ se définit comme le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ modulo l'action de \mathbb{C}^* par multiplication des composantes. On en déduit un morphisme canonique :

$$p_n : S^{2n+1} \simeq (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \longrightarrow \mathbb{C}P^n$$

qui envoie un point de S^{2n+1} , identifié à un élément (x_0, \dots, x_n) sur son orbite dans $\mathbb{C}P^n$, noté en coordonnées homogènes $(x_0 : \dots : x_n)$.

Comme dans le cas réel on montre que p est une fibration de fibre $\mathbb{C}^* \simeq S^1$.

Or, dans le cas $n = 1$, on sait que $\mathbb{C}P^1$ est une surface de Riemann (de genre 0), homéomorphe à S^2 .

Définition III.1.10. — La fibration canonique :

$$\eta : S^3 \rightarrow S^2$$

telle que $\eta = p_1$ avec les notations qui précèdent est appelée la *fibration de Hopf*.

III.1.11. — On en déduit donc une suite homotopiquement exacte qui induit une suite longue :

$$\dots \rightarrow \pi_3(S^1) \rightarrow \pi_3(S^3) \rightarrow \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_2(S^1) \rightarrow \pi_2(S^3) \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow \dots$$

D'après le calcul de l'exemple III.1.7, on déduit donc :

Proposition III.1.12. — Pour tout entier $n > 2$, le morphisme

$$\eta_* : \pi_n(S^3) \rightarrow \pi_n(S^2)$$

est un isomorphisme de groupes abéliens.

De plus, on obtient une suite exacte courte de groupes (abéliens) :

$$0 \rightarrow \pi_2(S^3) \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Remarque III.1.13. — Comme nous le verrons dans le cours suivant, le cas le plus important du théorème précédent est obtenu pour $n = 3$.

Remarque III.1.14. — On obtient encore deux exemples supplémentaires de fibrations par le procédé décrit précédemment, en remplaçant les corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} par le corps K des quaternions \mathbb{H} (resp. octonions \mathbb{O}) qui est une \mathbb{R} -algèbre de dimension 4 (resp. 8).

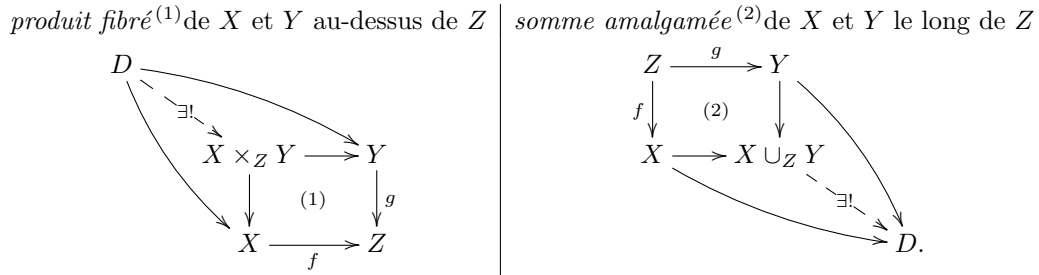
Regardant la fibration obtenue pour l'espace projectif $K\mathbb{P}^1 = (K^2 - \{0\})/K^*$, on obtient respectivement des suites fibres :

$$\begin{aligned} S^3 &\rightarrow S^7 \rightarrow S^4, \\ S^7 &\rightarrow S^{15} \rightarrow S^8. \end{aligned}$$

III.2. Le théorème de suspension de Freudenthal

III.2.a. Rappels sur les CW-complexes. —

III.2.1. — On peut généraliser les constructions basiques que nous avons vues sur les espaces topologiques (cf. I.2.5) par les deux constructions suivantes, présentées sous forme de problèmes universels :



On a déjà rencontré le produit fibré (cf. II.2.12) ; rappelons qu'on a la formule explicite suivante :

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\}.$$

Pour la somme amalgamée, on peut aussi l'écrire en termes d'espaces quotients ; $X \cup_Z Y$ est l'espace quotient de la flèche suivante :

$$Z \xrightarrow{f \cup g} X \cup Y.$$

Remarque III.2.2. — 1. Les définitions précédentes ont un sens dans n'importe quelle catégorie \mathcal{C} . Mais il est possible que dans une catégorie \mathcal{C} les produits fibrés (resp. sommes amalgamées) n'existent pas.

1. en anglais : *pullback* ;

2. en anglais : *pushout* ;

2. Dans la situation du paragraphe précédent, on dit aussi que le carré (1) (resp. (2)) est cartésien (resp. cocartésien).

III.2.3. — *Attachement de cellules.*— Considérons un espace topologie X .

Pour un entier $n \geq 0$, on considère l'inclusion $i_n : S^{n-1} \rightarrow D^n$ du bord de la boule fermée :

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Étant donnée une application $f : S^n \rightarrow X$, on définit un nouvel espace X' en considérant la somme amalgamée suivante :

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ i_n \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{e_n} & X'. \end{array}$$

On dit que X' est obtenu à partir de X en attachant une n -cellule le long de f . Cette définition se généralise à une famille de n -cellules correspondant à une famille d'applications $(f_i : S^{n-1} \rightarrow X)_{i \in J}$ et le carré cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} \sqcup_{j \in J} S^{n-1} & \xrightarrow{\sqcup_{j \in J} f_j} & X \\ \sqcup_{j \in J} i_n \downarrow & & \downarrow \\ \sqcup_{j \in J} D^n & \longrightarrow & X'. \end{array}$$

On dit encore que l'image du facteur $\overset{\circ}{D}^n$ dans X correspondant à $j \in J$ est une n -cellule de X' et on la note génériquement e_n^j . Ainsi, e_n^j est homéomorphe à \mathbb{R}^n et, en tant qu'ensembles,

$$X' = X \sqcup (\sqcup_{j \in J} e_n^j).$$

Définition III.2.4. — Soit X un espace topologique.

Une *CW-structure* sur X est la donnée d'une suite croissante de sous-espaces topologiques $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de X et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'une famille d'applications $(f_j : S^n \rightarrow X^{(n)})_{j \in J_n}$ telle que :

- X^{n+1} est obtenu à partir de X_n en recollant des $n + 1$ -cellule le long des $(f_j)_{j \in J_n}$
- $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$, de manière compatible à la topologie de la réunion.

Un *CW-complexe* X est un espace topologique muni d'une CW-structure. Un sous-espace Y de X est un sous-CW-complexe si Y est une réunion de cellules de X . Par convention, un point base d'un CW-complexe X est toujours une 0-cellule.

Exemple III.2.5. — 1. Il existe sur la sphère S^n deux CW-structures intéressantes :

- (a) une unique n -cellule dont on a contracté le bord en un point ;
- (b) deux n -cellules qu'on a recollées le long de leur bord S^{n-1} .

2. Une surface à g -trous pour $g > 0$ est obtenu à partir d'un polygone régulier à $4g$ côtés en identifiant deux cotés suivant un sens donné.

III.2.6. — Les CW-complexes sont stables par un grand nombre de constructions sur les espaces topologiques : produit, somme, quotient par un sous-CW-complexe. Il en résulte que la somme et le smash-produit de CW-complexes pointés sont des CW-complexes.

On fera attention toutefois que si X et Y sont des CW-complexes, l'espace topologique Y^X des applications continues de X dans Y n'admet pas en général de CW-structure.

Les CW-complexes sont une classe d'espaces topologiques très agréable pour faire de l'homotopie, comme nous le verrons par la suite. Ils sont à la base de la *théorie de l'obstruction*. Le premier résultat de cette théorie repose sur la définition naturelle suivante.

Définition III.2.7. — Soit X et Y deux CW-complexes. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ d'espaces topologiques sera dit *cellulaire* si pour tout $n \geq 0$, $f(X^{(n)}) \subset Y^n$.

Théorème III.2.8 (Approximation cellulaire). — *Tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ entre deux CW-complexes est homotope à un morphisme cellulaire.*

De plus, si $A \subset X$ est un sous-CW-complexe tel que $f|_A$ est cellulaire, on peut supposer que l'homotopie est constante relativement à A .

III.2.9. — Ce théorème se ramène à un résultat d'approximation linéaire pour lequel on introduit la terminologie suivante.

Considérons $X \subset \mathbb{R}^k$ et $Y \subset \mathbb{R}^n$ des sous-espaces quelconques. On dit qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est *linéaire par morceau* si $f^{-1}(Y)$ est réunion fini de polyèdres convexes P_1, \dots, P_m et pour tout $i \in [1, m]$, il existe un morphisme affine $\varphi_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} P_i & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\varphi_i} & \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Étant donné un sous-espace $Y' \subset Y$, on dit encore que f est linéaire par morceaux au-dessus de Y' si $f^{-1}(Y') \rightarrow Y'$ l'est.

Remarque III.2.10. — Notons que si f est linéaire par morceaux comme ci-dessus, $k < n$ et Y contient une boule ouverte V de \mathbb{R}^n , alors f est nécessairement non surjectif.

En effet, chaque P_i est envoyé par φ_i dans un hyperplan strict H_i de \mathbb{R}^n et la réunion des H_i ne peut recouvrir V .

Proposition III.2.11 (Approximation linéaire). — *Soit X un espace topologique obtenu à partir d'un espace A par recollement d'une unique k -cellule : $X = A \sqcup e^n$. Soit $f : I^k \rightarrow X$ un morphisme.*

Alors, f est homotope à une application $f_1 : I^k \rightarrow X$ par une homotopie constante relativement à $f^{-1}(A)$ et telle qu'il existe un voisinage ouvert de 0 dans e^n au-dessus duquel f_1 est linéaire par morceaux.

En particulier, si $k < n$, f_1 n'est pas surjective.

Démonstration. — Ayant identifié e^n à l'espace \mathbb{R}^n , pour tout $t > 0$, on note B_t la boule fermé de rayon t et de centre 0 dans e^n . On pose $D_t = f^{-1}(B_t)$.

Comme l'espace D_2 est compact, l'application $f|_{D_2}$ est donc uniformément continue et on peut trouver une subdivision Σ du cube I^k en cubes fermés (de même volume) tels que pour $c \in \Sigma$, $f(c \cap D_2)$ est inclut dans une boule ouverte de rayon $r = 1/4$. On peut donc définir deux sous-ensembles de I^k :

$$\begin{aligned} K_1 &= \bigcup_{c \in \Sigma | c \cap D_1 \neq \emptyset} c, \\ K_2 &= \bigcup_{c \in \Sigma | c \cap K_1 \neq \emptyset} c. \end{aligned}$$

D'après notre choix du rayon r , on dispose donc des inclusions :

$$D_1 \subset K_1 \subset K_2 \subset D_2.$$

L'espace K_2 étant une réunion de cubes n -dimensionnels, on peut le subdiviser en n -simplexes $\sigma \in \Sigma_2$ où $\sigma \simeq \Delta^k$ à une transformation linéaire près de \mathbb{R}^k .

Les vecteurs correspondant aux sommets $\Delta^k - \{(0, \dots, 0)\}$ forment une base de l'espace \mathbb{R}^k . Pour chaque $\sigma \in \Sigma_2$, il existe donc une unique application affine $\varphi_\sigma : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que pour tout

sommet x du n -simplexe σ , $\varphi_\sigma(x) = f(x)$. On en déduit donc une application continue, linéaire par morceaux :

$$g : K_2 \rightarrow e^n, x \mapsto \varphi_\sigma(x) \text{ si } x \in \sigma.$$

On peut par ailleurs trouver une application

$$\lambda : K_2 \rightarrow [0, 1]$$

telle que λ est nulle sur le bord de K_2 et $\lambda|_{K_1} = 1$ — par exemple, λ est la distance d'un point de K_2 au sous-espace K_1 divisé par la hauteur d'un cube $c \in \Sigma$.

On peut alors définir une homotopie $(f_t : K_2 \rightarrow e^n)_{t \in I}$ par la formule suivante :

$$f_t(x) = t\lambda(x)g(x) + (1 - t\lambda(x))f(x).$$

Par construction, $f_0 = f|_{K_2}$ et f_1 coïncide avec g sur K_1 , donc est linéaire par morceau sur K_1 .

Par ailleurs, pour tout $t \in I$, f_t coïncide avec f sur le bord de K_2 . Quitte à prendre des valeurs dans $X = e^n \sqcup A$, on peut donc prolonger f_t par continuité à I^k en posant : $f_t(x) = f(x)$ si $x \notin K_2$. On a donc construit une homotopie : $H = (f_t : I^k \rightarrow X)_{t \in I}$ telle que :

- H est constante sur $I^k - K_2$ et donc a fortiori sur $f^{-1}(A)$;
- $f_0 = f$;
- f_1 coïncide avec f sur $K_2^c = I^k - K_2$;
- $f_1 = \lambda(x)g(x) + (1 - \lambda(x))f(x)$ sur K_2 ;
- f_1 est linéaire par morceaux sur K_1 .

Mais par ailleurs, si $V = \overset{\circ}{B}_{1/2}$, $f_1^{-1}(V) \subset K_1$ et donc V permet de conclure.

Soit donc u un point de $f_1^{-1}(V) \cap K_1^c$. Autrement dit, $u \notin K_1$ et $\|f_1(u)\| < 1/2$.

Supposons que $u \in K_2^c$. Alors $f(u) = f_1(u) \in V$. Or $V \subset B_1$, ce qui contredit le fait : $f^{-1}(B_1) \subset K_2$.

Supposons que $u \in (K_2 - K_1)$. Comme $f(B_1) \subset K_1$, on en déduit $\|f(u)\| > 1$.

Par ailleurs, il existe un simplexe $\sigma \in K_2$ tel que $u \in \sigma$. Notons que σ est inclus dans un cube de la subdivision Σ de I^k . En particulier, $f(\sigma)$ est inclus dans une boule ouverte B de rayon $1/4$. Comme g est linéaire par morceau sur σ et coïncide avec f sur les sommets de σ , $g(\sigma) \subset B$. Donc $f_1(u) = \lambda(u)g(u) + (1 - \lambda(u))f(u) \in B$.

On en déduit donc $\|f_1(u) - f(u)\| < 1/2$ ce qui implique $\|f_1(u)\| > 1/2$ et contredit l'hypothèse sur u . \square

Pour nous cette proposition est presque aussi intéressante que le théorème III.2.8. Voici en effet un corollaire frappant :

Corollaire III.2.12. — Pour tout couple d'entiers (k, n) , $\pi_k(S^n) = 0$ si $k < n$.

Démonstration. — On voit S^n comme un CW-complexe auquel on a attaché un n -cellule le long du point base. Soit en effet une application $\gamma : S^k \rightarrow S^n$. On peut la voir comme une application $f : I^k \rightarrow S^n$ telle que ∂I^k est envoyé sur le point base. On trouve donc une application $f_1 : I^k \rightarrow S^n$ non surjective, et homotope à f par une homotopie constante sur $f^{-1}(*)$. En particulier, f_1 est constante sur ∂I^k et induit une application $\gamma_1 : S^k \rightarrow S^n$ non surjective tel que $[\gamma_1] = [\gamma]$. On conclut du fait que S^n privé d'un point est contractile. \square

Remarque III.2.13. — Ceci redonne une démonstration légèrement différente du théorème I.3.17. Par ailleurs, comme corollaire de la proposition III.1.12, on déduit un isomorphisme :

$$\pi_2(S^2) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

Nous allons généraliser ce résultat dans la section suivante.

III.2.14. — On déduit le théorème III.2.8 de la proposition précédente par induction sur les cellules de X . On se ramène donc à montrer le cas relatif à un sous-complexe $A \subset X$ tel que $A = A^{k-1}$ et X est obtenu à partir de A en rajoutant une k -cellule e_X^k . Si Y n'a que des cellules de dimension inférieure à k , il n'y a rien à démontrer. Sinon, étant donné une n -cellule e^n de Y , and $n > k$, la proposition précédente montre qu'on peut trouver une application $f_1 : X \rightarrow Y^k \sqcup e^n$ homotope à f relativement à A et qui est non surjective sur e^n . On peut donc encore contracter f_1 pour que son image soit Y^k . Comme $f(e_X^k)$ est compact, il ne rencontre qu'un nombre fini de cellules e^n pour $n > k$ et on conclut en itérant ce processus.

Citons le corollaire suivant du théorème d'approximation cellulaire.

Corollaire III.2.15. — *Soit X un CW-complexe. Alors, le morphisme induit par l'inclusion canonique :*

$$\pi_k(X^{(n)}) \rightarrow \pi_k(X)$$

est un isomorphisme pour $k < n$ et une surjection pour $k = n$.

Démonstration. — Pour tout $k \leq n$, la surjectivité résulte immédiatement du théorème d'approximation appliqué à l'application $f : I^k \rightarrow X$ constante sur ∂I^k . L'injectivité pour $k < n$ résulte du théorème d'approximation cellulaire appliqué à une homotopie $I \times I^k \rightarrow X$. \square

Corollaire III.2.16. — *Soit X un CW-complexe pointé connexe qui n'a que des cellules en dimension $> n$. Alors, pour tout entier $i \geq n$, $\pi_i(X) = 0$.*

Remarque III.2.17. — On dit encore que X est n -connexe. Cette définition généralise la notion d'espace simplement connexe (I.3.16), qui coïncide avec 1-connexe.

III.2.b. Excision. — Comme on l'a vu dans la section précédente, il est commode, en particulier dans la théorie des CW-complexes, de raisonner sur un espace X en ayant fixé un sous-espace $A \subset X$.

Définition III.2.18. — Une paire d'espaces (X, A) est un espace topologique X et un sous-espace $A \subset X$. Un morphisme de paire $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est un morphisme $f : X \rightarrow Y$ tel que $f(A) \subset B$.

La même définition vaut pour les espaces pointés ($A \subset X$ doit respecter les points bases).

III.2.19. — Soit (X, A) une paire pointée, $i : A \rightarrow X$ l'inclusion canonique. Alors, la fibre homotopique de i est isomorphe à l'espace :

$$F(i) = \{\sigma : I \rightarrow X \mid \sigma(0) = *, \sigma(1) \in A\}.$$

On peut donc introduire la définition suivante, analogue à l'homologie singulière d'une paire.

Définition III.2.20. — Considérons les notations précédentes et $n > 0$ un entier. On définit le n -ème groupe d'homotopie de la paire (X, A) :

$$\pi_n(X, A) = \pi_{n-1}(F(i)).$$

Le groupe $\pi_n(X, A)$ est fonctoriel covariant par rapport aux morphismes de paires. Par ailleurs, appliquant la suite exacte longue associée à la fibre homotopique, on en déduit une suite exacte d'espaces pointés :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_{n+1}(A) \xrightarrow{\partial_{i*}} \pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\pi^{(i)*}} \pi_n(A) \xrightarrow{i_*} \pi_n(A) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \pi_1(A) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{\partial_{i*}} \pi_1(X, A) \xrightarrow{\pi^{(i)*}} \pi_0(A) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X) \end{aligned}$$

Voici un théorème déjà rencontré en homologie singulière (mais ici sous une forme plus faible).

Théorème III.2.21 (Excision). — Soit X un CW-complexe, $A, B \subset X$ deux sous-CW-complexes. Posons $C = A \cap B$ supposé connexe et non vide. On suppose enfin que A (resp. B) est obtenu à partir de C en ajoutant des cellules de dimension $> n$ (resp. $> m$) pour un entier $n > 0$ (resp. $m \geq 0$).

Alors, l'application induite :

$$\pi_i(A, C) \rightarrow \pi_i(X, B)$$

est un isomorphisme pour $0 < i < m + n$ et une surjection pour $i = m + n$.

Idée de preuve. — Le théorème d'excision est un résultat très profond de la théorie de l'homotopie. Il a été découvert par Blackers et Massey dans les années 1950 qui l'obtenaient en utilisant la comparaison entre homotopie et homologie. Une preuve plus directe, et avec de meilleures hypothèses, a été trouvée par Boardman et elle est expliquée en détails dans [Swi75, 6.21].

L'idée de la preuve est d'introduire des groupes d'homotopies associés au triplet $(X; A, B)$. Considérons le carré cartésien d'inclusions

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{j} & A \\ \downarrow & & \downarrow k \\ B & \xrightarrow{i} & X. \end{array}$$

On en déduit un morphisme canonique entre les fibres homotopiques

$$F(j) \xrightarrow{k_*} F(i)$$

et on note $F(X; A, B)$ la fibre homotopique de cette dernière flèche. On pose :

$$\pi_i(X; A, B) := \pi_{i-1}(F(X; A, B)).$$

Par définition, on a donc une suite exacte longue d'homotopie :

$$\dots \rightarrow \pi_{i+1}(X; A, B) \rightarrow \pi_i(A, C) \xrightarrow{k_*} \pi_i(X, B) \rightarrow \pi_i(X; A, B) \rightarrow \dots$$

Ainsi, les groupes $\pi_i(X; A, B)$ mesure l'obstruction au fait que la flèche k_* soit un isomorphisme et le théorème d'excision revient à montrer que $\pi_i(X; A, B) = 0$ si $0 < i \leq n + m$.

L'idée de la preuve est d'abord se ramener au cas où A (resp. B) est obtenu à partir de C en ajoutant respectivement une seule cellule e_1 (resp. e_2) de dimension $r > n$ (resp. $s > m$).

Un élément de $\pi_i(X; A, B)$ peut être représenté par une application

$$f : I^i \rightarrow X$$

qui envoie certaines régions prescrites de I^i sur respectivement A , B et le point base de X . Plus précisément, on définit une relation d'homotopie relativement à A , B et le point base sur les applications de cette forme et $\pi_i(X; A, B)$ est formé des classes d'équivalences pour cette relation.

Ensuite, on utilise le résultat d'approximation linéaire (III.2.11) pour voir que l'on peut supposer f linéaire par morceaux au-dessus de simplexes $\Delta^r \subset e_1$ et $\Delta^s \subset e_2$. Comme $i < r + s$, on peut alors construire une contraction de f relativement à $(A, B, *)$ (voir [Swi75, 6.20] pour plus de détails sur cette dernière étape). \square

III.2.c. Groupes d'homotopie stables. — Pour nous, ce théorème vaut surtout pour le corollaire suivant :

Théorème III.2.22 (Freudenthal suspension). — Soit X un CW-complexe n'ayant que des cellules en dimension $\geq n$.

Alors, le morphisme de suspension :

$$\pi_i(X) = [S^i, X] \rightarrow [S^{i+1}, \Sigma X] = \pi_{i+1}(\Sigma X), f \mapsto \Sigma f$$

est un isomorphisme si $i < 2n - 1$ et une surjection si $i = 2n - 1$.

En particulier, si $X = S^n$, $\pi_i(S^n) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1})$ est un isomorphisme pour $i < 2n - 1$ et une surjection pour $i = 2n - 1$.

Démonstration. — On peut écrire la suspension $\Sigma X = C_+X \cup_X C_-X$ où $C_+X = X \times [1, -1]/X \times \{1\}$ et $C_-X = X \times [1, -1]/X \times \{-1\}$, X étant vu comme sous-espace par identification avec $X \times \{0\}$.

Si $X = S^n$, $C_+X \simeq C_-(X)$ est obtenu à partir de X en rajoutant un $(n + 1)$ -cellule le long de S^n . Dans le cas général, du fait que X est obtenu en recollant des cellules de dimension $\geq n$, $C_+X \simeq C_-(X)$ est obtenu à partir de X en rajoutant des cellules de dimension $> n$. En appliquant le théorème d'excision, on en déduit que le morphisme canonique :

$$\pi_{i+1}(C_+X, X) \rightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X, C_-X)$$

est un isomorphisme si $i + 1 < 2n$ et une surjection si $i + 1 = 2n$.

Si on écrit les suites exactes longues associées à ces paires, on trouve :

$$\begin{aligned} 0 = \pi_{i+1}(C_+X) &\rightarrow \pi_{i+1}(C_+X, X) \xrightarrow{\simeq} \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(C_+X) = 0, \\ 0 = \pi_{i+1}(C_-X) &\rightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X) \xrightarrow{\simeq} \pi_{i+1}(\Sigma X, C_-X) \rightarrow \pi_i(C_-X) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit donc un isomorphisme dont on peut vérifier qu'il est l'isomorphisme attendue. \square

III.2.23 (Homotopie des sphères). — Si on applique le théorème de suspension de Freudenthal pour $n > 1$, on obtient une suite d'isomorphisme :

$$\pi_2(S^2) \simeq \pi_3(S^3) \simeq \dots \simeq \pi_n(S^n).$$

Rappelons que la suite d'homotopie associée à la fibration de Hopf :

$$S^1 \rightarrow S^3 \xrightarrow{\eta} S^2,$$

montre que : $\pi_2(S^2) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ (Remarque III.2.13).

On en déduit donc pour tout $n > 0$, $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, et un générateur est donné par l'identité (comme c'est le cas pour S^1 d'après la preuve de I.3.18).

Par ailleurs, cette même suite d'homotopie montre que le morphisme :

$$\pi_3(S^3) \rightarrow \pi_2(S^2), f \mapsto \eta \circ f$$

est un isomorphisme. On en déduit donc que $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ avec pour générateur l'application de Hopf.

Le théorème de suspension de Freudenthal montre aussi que l'application de suspension :

$$\mathbb{Z} = \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_4(S^3)$$

est une surjection. Il en résulte que $\pi_4(S^3)$ est un groupe cyclique avec pour générateur la suspension de l'application de Hopf, $\Sigma\eta : S^4 \rightarrow S^3$. On peut voir que $\Sigma\eta$ est d'ordre 2, montrant ainsi :

$$\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Nous avons donc obtenu les calculs suivants des groupes d'homotopie des sphères :

Théorème III.2.24. — Soit (i, n) un couple d'entiers. Alors,

$$\pi_i(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < n, \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = n, (i = 3, n = 2), \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n = i + 1 \text{ et } n > 2. \end{cases}$$

De plus, si $i < 2n - 1$, $\pi_i(S^n) = \pi_{i+1}(S^{n+1})$.

Autrement dit, les groupes $\pi_{i+k}(S^k)$ sont indépendants de l'entier k pris suffisamment grand – et on peut prendre $k > i + 1$. On appelle ce groupe abélien le *i-ème groupe d'homotopie stable* (de S^0) et on le note $\pi_i^S(S^0)$.

III.2.25. — Ce phénomène de stabilité des groupes d'homotopie se généralise à tout CW-complexe X . En effet, $\Sigma^2 X$ n'a que des cellules en dimension ≥ 2 et plus généralement, $\Sigma^n X$ n'a que des cellules en dimension $\geq n$.

D'après le théorème de suspension de Freudenthal, on obtient donc :

$$\pi_i(\Sigma^n X) \rightarrow \pi_{i+1}(\Sigma^{n+1} X)$$

est un isomorphisme si $i < 2n - 1$.

Autrement dit,

$$\pi_{i+k}(\Sigma^k X)$$

est indépendant de k pour k assez grand – on peut prendre $k > i + 1$.

Définition III.2.26. — Pour tout entier $i \geq 0$, on note $\pi_i^S(X)$ le groupe abélien $\pi_{i+k}(X)$ pour k assez grand ($k \geq i + 2$). On l'appelle le k -ème groupe d'homotopie stable de X .

Comme nous le verrons dans ce cours, on dispose d'outils supplémentaires pour calculer les groupes d'homotopie stables d'un espace X .

Remarque III.2.27. — On peut encore écrire :

$$\pi_i^S(X) = \varinjlim_{k > i} \pi_{i+k}(X)$$

la limite inductive étant prise dans la catégorie des groupes abéliens.

Références

- [Swi75] Robert M. Switzer. *Algebraic topology—homotopy and homology*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 212.

deuxième semestre 2015/2016

FRÉDÉRIC DÉGLISE, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • E-mail : frederic.deglise@ens-lyon.fr
 Url : <http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/>