Table des matières

COURS IV
SPECTRES DE SPANIER-WHITEHEAD

IV.1. Homologie singulière (rappels)

IV.1.a. Axiomes d'Eilenberg-Steenrod. —

IV.1.1. — Rappelons la définition de l'homologie singulière d'un espace topologique X à coefficients dans un groupe abélien quelconque π. On définit le complexe des chaines singulières :

$$C_n(X;\pi) := \pi\langle \mathrm{Hom}(\Delta^n, X)\rangle$$

où $\pi\langle E\rangle$ désigne le π-module libre engendré par un ensemble E, et on a posé [(1)] :

$$\Delta^n = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^+, \sum_i x_i \leq 1\right\}.$$

Les différentielles sont données par la formule :

$$d_n : C_n(X;\pi) \to C_{n-1}(X;\pi), d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i.(\partial_n^i)^*$$

pour $\partial_n^i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ l'inclusion de la i-ème face. On a donc obtenu un complexe de groupes abéliens.

L'homologie singulière de X en degré n à coefficients dans π est le n-ème groupe d'homologie de ce complexe :

$$H_n(X;\pi) = H_n(C_*(X;\pi)) = \mathrm{Ker}(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1}).$$

Ce groupe abélien est fonctoriel covariant en X. La fonctorialité est invariante par équivalence d'homotopie. [(2)] On a donc obtenu un foncteur :

$$H_*(-;\pi) : \mathscr{H} \to \mathscr{A}b^{\mathbb{Z}}, \tag{IV.1}$$

où l'on a convenu que pour $n < 0$, $H_n(X;\pi) = 0$.

Il résulte clairement de ces définition que ce foncteur est compatible aux sommes disjointes :

(Additivité) Pour toute famille d'espaces $(X_i)_{i\in I}$, $H_*(\sqcup_{i\in I} X_i;\pi) = \oplus_{i\in I} H_*(X_i;\pi)$.

1. Rappelons que Δ^n est appelé le simplexe standard de dimension n
2. Car $H^*(I;\pi) \simeq H^*(*;\pi)$.

Remarque IV.1.2. — Il est remarquable que les idées d'homologie et de groupe d'homotopie aient toutes deux été introduites dans un même article par Poincaré sans précurseur évident.

IV.1.3. — *Excision.*– Les groupes d'homologie singulière sont beaucoup plus facilement calculables que les groupes d'homotopie. Cela résulte du fait que les résultats connus pour les groupes d'homotopie ont un analogue pour l'homologie singulière, mais un analogue renforcé.

C'est particulièrement vrai pour le théorème d'excision. Si $i : A \subset X$ est un sous-espace, on définit le complexe de la paire (X, A) en posant :

$$C_n(X, A; \pi) := \text{coKer}\big(C_n(A; \pi) \to C_n(X; \pi)\big),$$

les différentielles du complexe $C_*(X, A; \pi)$ étant induites par les différentielles de $C_*(X; \pi)$. On pose :

$$H_n(X, A; \pi) = H_n\big(C_*(X, A; \pi)\big).$$

Notons qu'il est clair avec cette définition que l'on dispose d'une suite exacte longue :

(Exactitude) $$\ldots \to H_n(A; \pi) \xrightarrow{i_*} H_n(X; \pi) \to \pi_n H_n(X, A; \pi) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A; \pi) \to \ldots$$

Le théorème d'excision pour l'homologie s'énonce alors.

***Théorème IV.1.4* (Excision)**. — *Pour tous sous-espaces $A, B \subset X$ dont l'intérieur recouvre X, le morphisme induit :*

$$H_n(B, A \cap A; \pi) \to H_n(X, A; \pi)$$

est un isomorphisme.

Contrairement au cas des groupes d'homotopie relative, on constate qu'il n'y a pas d'hypothèse sur la connexité des espaces A, B ou X.

Notons que ce résultat implique aussi le calcul suivant, pour tout couple d'entiers $(n, i) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$H_i(S^n; \pi) = \begin{cases} \pi & \text{si i=n ou i=0,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et rétrospectivement, ce résultat explique la différence avec les groupes d'homotopie, parce que les groupes d'homotopie de S^n sont triviaux en degrés $> n$.

Remarque IV.1.5. — On fera attention que le calcul précédent de l'homologie de S^n résulte en particulier de la propriété (triviale) de l'homologie singulière :

(Dimension) $$H_i(*; \pi) = \begin{cases} \pi & \text{si i=0,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est remarquable que les propriétés (Additivité), (Exactitude), (Excision) et (Dimension) du foncteur (IV.1) suffisent à le caractériser de manière unique si on le restreint à la catégorie des CW-complexes. Cela résulte du fait qu'on a un algorithme explicite pour calculer l'homologie singulière d'un CW-complexe (vu au premier semestre).

Ce résultat est le célèbre **théorème d'Eilenberg-Steenrod**. Les propriétés énumérées dans le paragraphe précédent pour le foncteur d'homologie singulière s'appellent les *axiomes d'Eilenberg-Steenrod.*

IV.1.b. Axiome des suspensions. —

Définition IV.1.6. — On définit l'homologie d'un espace pointé (X, x) comme l'homologie de la paire (X, x). Lorsque le point base de X n'est pas précisé, on peut la note aussi :

$$\tilde{H}_n(X).$$

On a donc obtenu une nouvelle version du foncteur d'homologie singulière à coefficients dans un abélien groupe π :

$$\tilde{H}_*(-;\pi) : \mathscr{H}_* \to \mathscr{A}b^{\mathbb{Z}} \qquad \text{(IV.2)}$$

qui a la propriété notable d'envoyer le point (objet initial et final de $\mathscr{H}_*$) sur le π-module nul (objet initial et final de la catégorie des π-modules.

Le résultat suivant découle de la propriété d'excision.

Proposition IV.1.7. — *Soit X un espace pointé. Alors, pour tout entier n, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel en X :*

$$\tilde{H}_n(\Sigma X;\pi) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{n-1}(X;\pi).$$

Démonstration. — C'est exactement la même preuve que pour le théorème de suspension de Freudenthal, sans la restriction sur l'entier n vu qu'il n'y a pas de telles restriction dans le théorème d'excision pour l'homologie ! □

Ainsi, du point de vue du foncteur d'homologie singulière réduite (IV.2), le foncteur des suspensions $\Sigma : \mathscr{H}_* \to \mathscr{H}_*$ agit comme un décalage des degrés. De la même manière, par leur définition même, les groupes d'homotopie stable (Definition III.2.26) vérifient la propriété de la proposition précédente.

IV.2. Stabilisation de la catégorie homotopique

IV.2.a. CW-complexes finis. —

IV.2.1. — Pour approfondir le lien entre homotopie et homologie, et pour rendre compte de même des groupes d'homotopie stable, on est amené à modifier la catégorie homotopique de manière à ce que le foncteur Σ soit analogue à un foncteur de décalage des degrés [3].

On utilisera pour cela la définition suivante.

Définition IV.2.2. — Un CW-complexe X est fini s'il n'a qu'un nombre fini de cellules *i.e.* X est réunion fini de disques ouverts :

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{n} e_i$$

où $e_i \simeq \mathring{D}^{n_i}$.

On définit la dimension $\dim(X)$ (resp. valuation $\mathrm{val}(X)$) de X comme le maximum (resp. minimum) des dimensions n_i des cellules de X non réduites à un point.

IV.2.3. — On notera que le théorème des suspensions de Frendenthal (Th. III.2.22) implique notamment (voir la méthode de §III.2.25) pour tous CW-complexes finis X et Y que le morphisme de suspension :

$$[\Sigma^r X, \Sigma^r Y] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma^{r+1} X, \Sigma^{r+1} Y] \qquad \text{(IV.3)}$$

est un isomorphisme si $r > \dim(X) - 2\,\mathrm{val}(Y) + 1$.

Notons qu'on a la caractérisation suivante de CW-complexes finis dans la catégorie des CW-complexes.

Lemme IV.2.4. — *Les conditions suivantes sur un CW-complexe X sont équivalentes :*

(i) *X est un CW-complexe fini.*

3. Pensez en particulier au décalage des degrés dans la catégorie des complexes de R-modules.

(ii) *Pour tout famille $(X_i)_{i\in I}$ de CW-complexes, le morphisme canonique :*

$$\oplus_{i\in I}[X, X_i] \to \big[X, \sqcup_{i\in I} X_i\big] \tag{IV.4}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — (i) implique (ii) : l'injectivité de la flèche (IV.4) est claire. Pour la surjectivité, on remarque que X étant un CW-complexe fini est compact. Si on se donne une application continue $f : X \to \sqcup_i X_i$, son image est compacte, donc elle n'intersecte qu'un nombre fini des X_i et cela conclut.

(ii) implique (i) : on considère la famille des cellules $(e_i)_{i\in I}$ du CW-complexe X, et l'isomorphisme canonique $\varphi : X \to \sqcup_{i\in I} e_i$. D'après la propriété (ii), ce morphisme est dans l'image de la flèche (IV.4). Il existe donc un ensemble fini $I_0 \subset I$ et un nombre fini de flèches $\nu_\lambda : X \to e_\lambda$, $\lambda \in I_0$ tel que φ est donné par la somme des morphismes

$$X \xrightarrow{\nu_\lambda} e_\lambda \hookrightarrow \sqcup_{i\in I} e_i.$$

Du fait que φ est un isomorphisme, on déduit que $I_0 = I$ ce qui montre que I est fini et conclut. □

Remarque IV.2.5. — Dans une catégorie $\mathscr{C}$ admettant des sommes infinies, on dit qu'un objet X est compact si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, -)$ transforme somme infinies dans $\mathscr{C}$ en somme d'ensembles. La condition (ii) ci-dessus se traduit encore en disant que X est compact dans la catégorie homotopique (des CW-complexes non pointés).

On retiendra donc qu'un CW-complexe est compact (dans la catégorie homotopique, ou ce qui revient au même, dans la catégorie des CW-complexes) si et seulement s'il est fini.

On a bien entendu le même résultat dans la catégorie pointée.

IV.2.b. La catégorie stabilisée. —

IV.2.6. — Pour énoncer la définition centrale de ce cours, nous continuons d'étoffer le langage classique de la théorie des catégories. Considérons donc une catégorie arbitraire $\mathscr{C}$. On peut dégager les deux propriétés universelles suivantes :

limite inductive[4] *de* $F : \mathcal{I} \to \mathscr{C}$
notation $\varinjlim_{i\in I} F(i)$

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[dd, "\forall f_{ij*}"'] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] & & \\
& \varinjlim_{i\in I} F(i) \arrow[r, dashed] & D \\
F(j) \arrow[ur] \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

limite projective[5] *de* $F : \mathcal{I} \to \mathscr{C}$
notation $\varprojlim_{i\in I} F(i)$

$$\begin{tikzcd}
& & F(i) \arrow[dd, "\forall f_{ij*}"] \\
D \arrow[r, dashed] \arrow[urr, bend left] \arrow[drr, bend right] & \varprojlim_{i\in I} F(i) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & F(j).
\end{tikzcd}$$

Dans cette définition, $\mathcal{I}$ peut être une catégorie quelconque mais on se limite en général (pour de fausses bonnes raisons) aux catégories $\mathcal{I}$ dont les objets forment un ensemble – in dit qu'une telle catégorie est *petite*.

Toutes les constructions de théorie des catégories qu'on a vues pour l'instant sont des cas particuliers de limites inductives/projectives :

– un objet *initial* (resp. *final*) est la limite inductive (resp. projective) sur la catégorie vide ;
– la *somme* (resp. le *produit*) indexé(e) par un ensemble I est une limite inductive (resp. projective) sur la catégorie dont les objets sont donnés par l'ensemble I et les morphismes se réduisent aux morphismes identités (on parle de la *catégorie discrète* associée à I) ;

4. *colimit* en anglais ;
5. *limit* en anglais ;

– la *somme amalgamée* (resp. le *produit fibré*) correspond au cas où

$$\mathcal{I} = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd} \text{ resp. } \mathcal{I} = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

– le *conoyau* (resp. *noyau*) dans une catégorie $\mathscr{C}$ avec un objet à la fois initial et final $*$ correspond au cas où

$$\mathcal{I} = \begin{tikzcd} (1) \arrow[r, shift left, "(a)"] \arrow[r, shift right, "(b)"'] & (2) \end{tikzcd}$$

et lorsque le foncteur $F : \mathcal{I} \to \mathscr{C}$ envoie la flèche (a) sur l'unique flèche $F(1) \to * \to F(2)$.

On dit que $\mathscr{C}$ admet des limites inductives/projectives (ou est cocomplète/complète) si tout foncteur $F : \mathcal{I} \to \mathscr{C}$ admet une limite inductive/projective (qui est alors unique à isomorphisme unique près).

La catégorie des ensembles, celle des groupes abéliens, des R-modules admettent toutes des limites inductives et projectives.

Exemple IV.2.7. — Considérons une suite de groupes abéliens :

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \to \ldots \to A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \to \ldots \tag{IV.5}$$

On parle aussi d'une *tour* de groupes abéliens. Il s'agit encore d'un foncteur $A_\bullet : \mathcal{I} \to \mathscr{A}b$ où $\mathcal{I}$ désigne la catégorie dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes sont tels que :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(n, m) = * \text{ si } n \geq m, \varnothing \text{ sinon.}$$

alors, on peut construire explicitement la limite inductive du foncteur F – ou ce qui revient au même du diagrame (IV.5) – comme le quotient du groupe abélien

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

modulo la relation $a_n \sim a_{n+1}$ si $a_{n+1} = f_n(a_n)$. Autrement dit, le conoyau du morphisme suivant :

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n, a_n \mapsto \big(a_n - f_n(a_n)\big).$$

Notons en particulier que si il existe un entier $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, f_n est un isomorphisme, alors,

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_N.$$

Définition IV.2.8. — On définit la catégorie de *Spanier-Whitehead* $\mathscr{SH}_f$ comme la catégorie dont les objets sont les couples (X, n) pour X un CW-complexe fini et $n \in \mathbb{Z}$ un entier et dont les morphismes de (X, n) vers (Y, m) sont donnés par le groupe abélien

$$\varinjlim_{r>\max(-n,-m)} [\Sigma^{r+n}X, \Sigma^{r+m}Y]_*.$$

La composition est donnée par la limite inductive pour r assez grand des morphismes suivants de groupes abéliens :

$$[\Sigma^{r+n}X, \Sigma^{r+m}Y]_* \times [\Sigma^{r+m}Y, \Sigma^{r+s}Z]_* \to [\Sigma^{r+n}X, \Sigma^{r+s}Z]_*.$$

Notons que la limite inductive précédente est très facile à calculer : la formule (IV.3) montre qu'elle est égale au groupe abélien $[\Sigma^{r+n}X, \Sigma^{r+m}Y]_*$ pour nimporte quel entier r tel que :

$$r > \max\big((\dim(X) + n) - 2(\mathrm{val}(Y) + m) + 1, -n, -m).$$

IV.2.c. Propriété universelle. —

IV.2.9. — Reprenons les notations de la définition suivante.

On dispose de foncteurs canoniques :

$$\begin{aligned} s : \mathscr{H}_*^f &\to \mathscr{S}\mathscr{H}_f, X \mapsto (X,0),\\ \Sigma_s : \mathscr{S}\mathscr{H}_f &\to \mathscr{S}\mathscr{H}_f, (X,n) \mapsto (X,n+1),\\ \Sigma_s^{-1} : \mathscr{S}\mathscr{H}_f &\to \mathscr{S}\mathscr{H}_f, (X,n) \mapsto (X,n-1). \end{aligned}$$

Il est clair que le foncteur Σ^{-1} est une équivalence de catégories avec pour quasi-inverse le foncteur Σ.

Lemme IV.2.10. — *Dans la catégorie de Spanier-Whitead, pour tout objet (X,n), il existe un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$(\Sigma X, n) \simeq (X, n+1).$$

Ce lemme est tautologique car :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}\mathscr{H}_f}\big((\Sigma X,n),(X,n+1)\big) &= \varinjlim_{r>-n-1} \mathrm{Hom}(\Sigma^{r+n+1}X, \Sigma^{r+n+1}X)\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}\mathscr{H}_f}\big((X,n+1),(\Sigma X,n)\big). \end{aligned}$$

Les identités de $\Sigma^{r+n+1}X$ donnent donc l'isomorphisme recherché (et son inverse).

IV.2.11. — On a donc réalisé la construction suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}_*^f \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\Sigma"'] & \mathscr{S}\mathscr{H}_f \arrow[d, "\Sigma_s"] \\ \mathscr{H}_*^f \arrow[r, "s"] & \mathscr{S}\mathscr{H}_f \end{tikzcd}$$

de telle manière que le foncteur Σ_s est une équivalence de catégories.

D'après la construction, il est facile de voir que le triplet $(\mathscr{S}\mathscr{H}_f, s, \Sigma_s)$ est universel (initial) pour la propriété que le carré précédent est commutatif à isomorphisme près.

Concrètement, cela signifie que tout foncteur

$$F : \mathscr{H}_*^f \to \mathscr{C}$$

muni d'un isomorphisme

$$\epsilon_X : F(\Sigma X) \xrightarrow{\sim} F(X)$$

induit un unique foncteur

$$\bar{F} : \mathscr{S}\mathscr{H}_f \to \mathscr{C}$$

tel que $\bar{F}(X,0) = F(X)$ et $\bar{F}(X,1) = F(\Sigma X)$ – plus généralement $F(X,n) = F(\Sigma^n X)$ pour tout entier $n \geq 0$.

Remarque IV.2.12. — Puisque Σ_s est une équivalence de catégories, on peut définir le foncteur Σ_s^{-n} pour tout $n > 0$ (il envoie (X,r) sur $(X, r-n)$).

En particulier, on peut écrire :

$$(X,n) = \Sigma_s^n(sX).$$

Dans la suite, on simplifiera abusivement cette notation en $\Sigma^n X := (X,n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Notons toutefois que le foncteur s est très loin d'être pleinement fidèle. Il envoie par exemple le groupe d'homotopie $\pi_i(S^n)$ sur le groupe d'homotopie $\pi_{i-n}^S(S^0)$; dans le cas $(i,n) = (3,2)$, $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ sur $\pi_1^S(S^0) = \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Plus généralement, il envoie l'ensemble pointé $[S^0, X]$ sur le groupe abélien $\pi_0^S(X)$.

Exemple IV.2.13. — Les foncteurs d'homologie singulière à coefficients dans π et d'homotopie stable induisent donc canoniquement des foncteurs :

$$H_*(-,\pi) : \mathscr{SH}_f \to \mathscr{A}b^{\mathbb{Z}}, (X,n) \mapsto H_n(X;\pi)$$
$$\pi_n^S : \mathscr{SH}_f \to \mathscr{A}b, (X,n) \mapsto \pi_n^S(X).$$

Notons aussi que, par définition, on obtient pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$\pi_n^S(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{SH}_f}\big(\Sigma^n S^0, X\big).$$

IV.3. Structures additionelles

IV.3.a. Structure additive et monoïdale. —

IV.3.1. — Une des vertus de la catégorie $\mathscr{SH}_f$ est que les morphismes entre ses objets ne sont pas seulement un ensemble mais un groupe abélien. Elle partage par ailleurs une propriété supplémentaire avec la catégorie des groupes abéliens.

Proposition IV.3.2. — 1. *La catégorie $\mathscr{SH}_f$ admet des sommes et des produits finis (*i.e. *indexés par des ensembles finis).*

2. *Pour toute famille finie $\mathcal{F} = (X_i, n_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathscr{SH}_f$, la somme et le produit de $\mathcal{F}$ coïncident dans la catégorie $\mathscr{SH}_f$.*
3. *La somme et le produit de deux objets (X,n) et (Y,m) de $\mathscr{SH}_f$ est donnée par l'objet suivant, pour l'entier $r = \max(-n,-m)$:*
$$(X,n) \oplus (Y,m) := \big((\Sigma^{r-n}X) \vee (\Sigma^{r-m}Y), n+m-l\big).$$

Démonstration. — Notons que dans la catégorie $\mathscr{SH}_f$, l'objet $(*,0)$ est à la fois objet initial et objet final – cela résulte de la définition et du fait que $*$ est initial et final dans la catégorie $\mathscr{H}_*$.

Pour vérifier les assertions 1 et 2, il suffit en fait de vérifier l'assertion 3. Le fait que l'objet $(X,n) \oplus (Y,m)$ vérifie la propriété universelle de la somme dans la catégorie $\mathscr{SH}_f$ résulte facilement du fait que $\vee$ est la somme dans la catégorie $\mathscr{H}_*$ et du fait que pour tous espaces Z et T,

$$\Sigma(Z \vee T) = \Sigma Z \vee \Sigma T.$$

Le fait que $(X,n) \oplus (Y,m)$ est aussi un produit dans la catégorie $\mathscr{SH}_f$ résulte alors formellement du fait que les morphismes dans $\mathscr{SH}_f$ forment un groupe abélien. [6] □

Remarque IV.3.3. — On dit encore que la catégorie $\mathscr{SH}_f$ est *additive*.

Dans la suite, suivant l'usage, on notera simplement 0 pour l'objet initial et final de $\mathscr{SH}_f$.

IV.3.4. — On peut définir sur la catégorie $\mathscr{SH}_f$ un smash-produit :

$$(X,n) \wedge (Y,m) = (X \wedge Y, n+m).$$

Les propriétés suivantes résultent facilement de cette définition :

– $(S^0,0) \wedge (X,n) \simeq (X,n)$.
– $(X,n) \wedge \big((Y,m) \wedge (Z,r)\big) \simeq \big((X,n) \wedge (Y,m)\big) \wedge (Z,r)$.

---

6. Par exemple, on définit un morphisme $(X,n) \oplus (Y,m) \xrightarrow{p_1} (X,n)$ en utilisant la propriété universelle de la somme et le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(X,n) \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "Id"] & & \\
& (X,n) \oplus (Y,m) \arrow[r, dashed, "p_1"] & (X,n). \\
(Y,m) \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

On renvoie le lecteur à [**ML98**, VIII, Th. 2] pour plus de détails.

– $(X,n) \wedge (Y,m) \simeq (Y,m) \wedge (X,n)$.
Par ailleurs, il est clair d'après cette définition que le foncteur

$$s : \mathscr{H}_*^f \to \mathscr{S}\mathscr{H}_f$$

est compatible au smash produit : $s(X \wedge Y) = s(X) \wedge s(Y)$.

Finalement, la relation suivante est évidente :

$$(\Sigma^{-1}S^0) \wedge S^1 = (S^0, -1) \wedge (S^0, 1) = S^0.$$

On peut aussi interpréter la construction de la catégorie de Spanier-Whitehead comme l'ajout d'un $\wedge$-inverse $S^{-1} = \Sigma^{-1}S^0$ à la catégorie $\mathscr{H}_*$. C'est aussi une propriété qui caractérise de manière universelle la catégorie $\mathscr{S}\mathscr{H}_f$ munie de son produit $\wedge$.

Remarque IV.3.5. — On dit encore que la catégorie $\mathscr{S}\mathscr{H}_f$, munie du produit $\wedge$ et de l'objet neutre S^0 est *monoïdale symétrique*. Voir [**ML98**, chap. VII].

IV.3.b. Triangles. —

IV.3.6. — Les suites homotopiquement exactes ne sont pas adaptées à la catégorie stable $\mathscr{S}\mathscr{H}_f$ du fait que la suite longue qu'il lui est associée fait intervenir le foncteur Ω plutôt que le foncteur Σ – notons en effet, que le foncteur $s : \mathscr{H}_*^f \to \mathscr{S}\mathscr{H}_f$ n'est pas compatible au foncteur Ω en général.

Toutefois, dans la catégorie homotopique on a une notion duale à celle de fibrations. Nous allons énoncer cette théorie pour les espaces pointés. Rappelons que si X est un espace, X_+ désigne l'espace topologique $X \sqcup *$ avec pour point base le point ajouté.

Définition IV.3.7. — Un morphisme $i : A \to X$ d'espaces pointés est une cofibration si pour tout espace Y, et tout diagramme commutatif de flèches solides ci-dessous, la flèche pointillée existe et fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & Y^{I_+} \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\bar{h}"] & Y \end{tikzcd}$$

dans la catégorie des espaces pointés.

Autrement dit, en utilisant une terminologie proche de celle qu'on a déjà vue dans le cas des fibrations (Def. II.2.1), f est une cofibration si elle a la propriété de relèvement à gauche par rapport aux morphismes de la forme $Y^{I_+} \xrightarrow{\mathrm{ev}_0} Y$.

Par définition des espaces de fonctions, la donnée d'une flèche $h : A \to Y^I$ correspond à la donnée d'une homotopie $H : I \times A \to Y$. De même, l'existence de $\bar{h}$ correspond à la propriété que l'on peut étendre H en une homotopie $\bar{H} : I \times X \to Y$ telle $\bar{H}(0, -) = f$.

Exercice 1. — Montrer que si $A \to X$ est une cofibration, alors i est injectif et son image est fermée.

IV.3.8. — La théorie des cofibrations est tout à fait analogue (duale) à la théorie des fibrations. Nous allons l'énoncer en termes d'espaces pointés car c'est le cas dont nous aurons besoin. Fixons un morphisme $f : X \to Y$ d'espaces pointés.

1. On défini le *cylindre* de f comme la somme amalgamée suivante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "f"'] & X \wedge I_+ \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & M(f). \end{tikzcd}$$

Le morphisme composé :

$$j(f) : X \xrightarrow{i_1} X \wedge I_+ \to M(f)$$

est une cofibration et le morphisme d'inclusion $Y \to M(f)$ est une équivalence d'homotopie avec pour quasi-inverse le morphisme

$$r(f) : M(f) \to Y$$

donné par l'identité sur Y et par le morphisme $(x,t) \mapsto f(x)$ sur $X \wedge I_+$.

2. On définit le cône d'un espace pointé X par la formule : $CX = X \wedge (I,1)$. Il existe une inclusion évidente $i_0 : X \to CX$ qui est une cofibration et une équivalence d'homotopie. On définit le *cone*[7] de f comme la somme amalgamée suivante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "f"'] & CX \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & C(f). \end{tikzcd}$$

Il existe un isomorphisme canonique entre la cofibre du morphisme $j(f)$ et le cone de f :

$$C(f) \simeq M(f)/X.$$

Si f est une cofibration, le morphisme canonique

$$C(f) \to C(f)/CX \simeq Y/X$$

est une équivalence d'homotopie.

3. Si $i : A \to X$ est une cofibration pointée, la suite suivante est homotopiquement coexacte :

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/A$$

où X/A désigne la cofibre de i : pour tout espace pointé Z, la suite d'espaces pointés suivante est exacte :

$$[X/A, Z] \xrightarrow{\pi^*} [X, Z] \xrightarrow{i^*} [A, Z].$$

4. Il existe des équivalences d'homotopie φ_f et ψ_f rendant le diagramme suivant commutatif à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "i(f)"] & C(f) \arrow[r, "i^2(f)"] \arrow[dr, "\pi(f)"'] & C(i(f)) \arrow[r, "i^3(f)"] & C(i^2(f)) \\ & & & \Sigma X \arrow[u, "\varphi_f"'] \arrow[r, "-\Sigma f"] & \Sigma Y, \arrow[u, "\psi_f"'] \end{tikzcd}$$

où le morphisme $\pi(f)$ est égal à la composée : $C(f) \to C(f)/Y \simeq \Sigma X$.

On en déduit donc une suite homotopiquement coexacte de la forme :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i(f)} C(f) \xrightarrow{\pi(f)} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{-\Sigma i(f)} \Sigma C(f) \xrightarrow{-\Sigma \pi(f)} \Sigma^2 X \ldots \tag{IV.6}$$

Pour tous ces faits, on peut consulter [**Swi75**, chap. 2 et 6] ou [**May99**, chap. 8].

IV.3.9. — Rappelons que le foncteur $\Sigma : \mathscr{SH}_f \to \mathscr{SH}_f$ est une équivalence de catégories.
On appellera *triangle* de la catégorie $\mathscr{SH}_f$ toute suite de morphismes de la forme :

$$\Delta : \mathbb{E} \xrightarrow{u} \mathbb{F} \xrightarrow{v} \mathbb{G} \xrightarrow{w} \Sigma\mathbb{E}.$$

7. On l'appelle encore parfois la cofibre homotopique ;

On peut définir la suspension, désuspension, rotation à droite, rotation à gauche du triangle Δ respectivement par les formules suivantes :

$$\begin{array}{ll}
\Sigma\Delta : & \Sigma\mathbb{E} \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma\mathbb{F} \xrightarrow{-\Sigma v} \Sigma\mathbb{G} \xrightarrow{-\Sigma w} \Sigma^2\mathbb{E}, \\
\Sigma^{-1}\Delta : & \Sigma^{-1}\mathbb{E} \xrightarrow{-\Sigma^{-1}u} \Sigma^{-1}\mathbb{F} \xrightarrow{-\Sigma^{-1}v} \Sigma^{-1}\mathbb{G} \xrightarrow{-\Sigma^{-1}w} \mathbb{E}, \\
r\Delta : & \mathbb{F} \xrightarrow{v} \mathbb{G} \xrightarrow{w} \Sigma\mathbb{E} \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma\mathbb{F}, \\
l\Delta : & \Sigma^{-1}\mathbb{G} \xrightarrow{-\Sigma^{-1}w} \mathbb{E} \xrightarrow{u} \mathbb{F} \xrightarrow{v} \mathbb{G}.
\end{array}$$

On peut bien sûr itérer ces définitions. Ainsi, il est clair que : $\Sigma\Delta = r^3\Delta$ et $l\Delta = r^2\Sigma^{-1}\Delta$.

Un morphisme de triangles est un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{G} \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma\mathbb{E} \arrow[d] \\
\mathbb{E}' \arrow[r] & \mathbb{F}' \arrow[r] & \mathbb{G}' \arrow[r] & \Sigma\mathbb{E}'.
\end{tikzcd}$$

On dit que c'est un isomorphisme si toutes les flèches verticales sont des isomorphismes.

Définition IV.3.10. — On appelle *triangle distingué* de $\mathscr{SH}_f$ tout triangle Δ qui est isomorphe à la n-suspension d'un triangle de la forme :

$$sX \xrightarrow{f} sY \xrightarrow{i(f)} s(Cf) \xrightarrow{\pi(f)} s(\Sigma X) = \Sigma(sX). \tag{IV.7}$$

pour un morphisme d'espaces pointés f quelconque.

Voici les propriétés essentielles des triangles distingués dans la catégorie additive $\mathscr{SH}_f$:

Proposition IV.3.11. — *Les conditions suivantes sont vérifiées :*

TR0 : *Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout objet $\mathbb{E}$ de $\mathscr{SH}_f$, le triangle suivant est distingué :*

$$\mathbb{E} \xrightarrow{Id} \mathbb{E} \to 0 \to \Sigma\mathbb{E}.$$

TR1 : *Pour tout morphisme $u : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ de $\mathscr{SH}_f$, il existe un triangle distingué de la forme :*

$$\mathbb{E} \xrightarrow{u} \mathbb{F} \to \mathbb{G} \to \Sigma\mathbb{E}.$$

TR2 : *Les triangles distingués sont stables par les opérations de suspension, désuspension, rotation à droite et rotation à gauche.*

TR3 : *Pour tout diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \mathbb{F} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & \mathbb{G} \arrow[r, "w"] & \Sigma\mathbb{E}, \\
\mathbb{E}' \arrow[r, "u'"] & \mathbb{F}' \arrow[r, "v'"] & \mathbb{G}' \arrow[r, "w'"] & \Sigma\mathbb{E}',
\end{tikzcd}$$

dont les lignes forment des triangles distingués, il existe une flèche $h : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{F} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & \mathbb{G} \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & \Sigma\mathbb{E} \arrow[d, "\Sigma f"] \\
\mathbb{E}' \arrow[r, "u'"] & \mathbb{F}' \arrow[r, "v'"] & \mathbb{G}' \arrow[r, "w'"] & \Sigma\mathbb{E}'.
\end{tikzcd}$$

TR4 : *Pour toute suite de morphismes* $\mathbb{E} \xrightarrow{u} \mathbb{F} \xrightarrow{v} \mathbb{G}$, *il existe un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & \mathbb{F} \arrow[r, "x"] \arrow[d, "v"] & \mathbb{G}' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma\mathbb{E} \arrow[d, equal] \\
\mathbb{E} \arrow[r] & \mathbb{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{F}' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma\mathbb{E} \arrow[d, "\Sigma u"] \\
& \mathbb{E}' \arrow[r, equal] \arrow[d, "y"'] & \mathbb{E}' \arrow[r, "y"] \arrow[d] & \Sigma\mathbb{F}, \\
& \Sigma\mathbb{F} \arrow[r, "\Sigma x"] & \Sigma\mathbb{G}' &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux premières lignes et les deux colonnes du milieu sont des triangles distingués.

Démonstration. — (TR0) est évident car l'identité est une cofibration.

Pour la propriété (TR1) : on utilise le fait qu'on peut suspendre ou désuspendre les triangles. Quitte à prendre un suspension suffisante, on peut supposer que u vient d'un morphisme $f : X \to Y$ d'espaces pointés. Alors, le triangle (IV.7) convient.

(TR2) : Il est clair par définition que les triangles distingués sont stables par les opérations Σ et Σ^{-1} définies dans le paragraphe IV.3.9. Puisque l s'exprime en fonction de Σ et r, il suffit de montrer que Δ distingué implique $r\Delta$ distingué.
Or, quitte à prendre une suspension assez grande, le triangle Δ est isomorphe à un triangle de la forme (IV.7). Le fait que ímplication résulte donc de la propriété 4 du paragraphe IV.3.8.

(TR3) : Quitte à prendre une suspension suffisamment grande, on peut supposer que le carré commutatif (1) se relève en un carré commutatif à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\
A' \arrow[r, "u'"] & X'
\end{tikzcd}$$

où u et u' sont des cofibrations. Considérons l'homotopie $h : A \to (X')^{I_+}$ correspondant à $g \circ u \underset{\text{htp}}{\sim} u' \circ f$. Comme u est une cofibration, on peut construire une flèche $\tilde{h}$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & (X')^{I_+} \arrow[d, "p_0"] \\
X \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{h}"] & X'.
\end{tikzcd}$$

Posons $g' = p_1 \circ \tilde{h}$. Alors, $g' \underset{\text{htp}}{\sim} g$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g'"] \\
A' \arrow[r, "u'"] & X'
\end{tikzcd}$$

On en déduit donc une flèche $h : X/A \to X'/A'$ qui permet de conclure.

Le principe de la preuve de TR4 est de se ramener au cas où les flèches u et v sont représentées par des cofibrations $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$. Alors le diagramme de TR4 est impliqué par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "x"] \arrow[d, "v"] & B/A \arrow[d] \\
A \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & C/A \arrow[d] \\
& C/B \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & (C/A)/(B/A),
\end{tikzcd}$$

où le morphisme φ est un isomorphisme de manière évidente. □

Définition IV.3.12. — Une catégorie additive $\mathscr{C}$ munie d'une classe $\mathcal{D}$ de triangles qui satisfait aux axiomes de la proposition précédente est appelée *catégorie triangulée*. Les morphismes de $\mathcal{D}$ sont alors dits *distingués*.

L'axiome **TR4** est appelé l'*axiome de l'octaèdre*.

Cette définition est due à Verdier.

Références

[May99] J. P. May. *A concise course in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[Swi75] Robert M. Switzer. *Algebraic topology—homotopy and homology*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 212.

---

deuxième semestre 2015/2016

Frédéric Déglise, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* `frederic.deglise@ens-lyon.fr`
Url : `http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/`