Table des matières

COURS V
ESPACES ET SPECTRE D'EILENBERG-MAC LANE

V.1. Théorème de Whitehead

V.1.a. Cofibrations (suite). —

V.1.1. — Nous revenons sur la notion de cofibration vue dans le cours précédent (Définition IV.3.7 dans le cas pointé). Dans le cas non pointé, un morphisme $i : A \to X$ d'espaces est une cofibration s'il possède la propriété de relèvement à gauche par rapport aux morphismes de la forme $Y^I \to Y$ pour Y un espace quelconque. Utilisant la propriété d'adjonction de l'espace des fonctions (§I.2.7), cela signifie concrètement que l'on peut relever les homotopies : dans un diagramme commutatif de flèches solides de la forme suivante, la flèche pointillée existe toujours :

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \sqcup A \times I \arrow[r, "f \sqcup H"] \arrow[d, "\nu_i := (\mathrm{Id}_X \times \{0\}) \sqcup (i \times \mathrm{Id}_I)"'] & Y. \\ X \times I \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"'] & \end{tikzcd} \tag{V.1}$$

Autrement dit on peut prolonger une homotopie $H_t : A \to Y$ en une homotopie définie $\tilde{H}_t : X \to Y$ et telle que $\tilde{H}_0 = f$.

V.1.2. — Le propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) a été dégagée formellement par Quillen (cf. [**Qui67**]). Elle permet une grande liberté dans les raisonnements avec les CW-complexes.

Un point de terminologie avant d'énoncer à titre s'exemple un lemme basique sur cette propriété. Dans une catégorie $\mathscr{C}$ quelconque, étant donné un carré cocartésien de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & A' \arrow[d, "i'"] \\ X \arrow[r, "k"] & X', \end{tikzcd}$$

nous dirons que i' est obtenue à partir de i par cochangement de base suivant h.

Lemme V.1.3. — *Soit $\mathcal{F}$ une classe de flèches dans une catégorie $\mathscr{C}$, et $\mathcal{P}$ la classe des flèches de $\mathscr{C}$ admettant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux flèches dans $\mathcal{F}$.*

Alors $\mathcal{P}$ est stable par composition. Si de plus, $\mathscr{C}$ admettant des sommes amalgamées, $\mathcal{P}$ est stable par co-changement de base.

Remarque V.1.4. — On en déduit immédiatement la propriété duale (obtenue en inversant le sens des flèches) : les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à une classe de flèches arbitraire sont stables par composition et changement de base.

Démonstration. — Pour la stabilité par composition, soit $i, j \in \mathcal{P}$ et $f \in \mathcal{F}$. On utilise le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[dd, "f"] \\
B \arrow[ur, dashed, "\widetilde{pj}"] \arrow[d, "j"'] & \\
X \arrow[r, "p"'] \arrow[uur, dashed, "\tilde{p}"'] & Z
\end{tikzcd}$$

où les flèches solides sont données. La flèche $\widetilde{pj}$ existe d'après la propriété de relèvement à gauche de i par rapport à f : c'est un relèvement de $p \circ j$ relativement à q. La flèche $\tilde{p}$ existe d'après la prorpiété de relèvement de j par rapport à f : c'est un relèvement de p relativement à $\tilde{p}$.

Pour la stabilité par co-changement de base : soit $i \in \mathcal{P}$ et $f \in \mathcal{F}$, ainsi qu'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "i'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "k"'] & X' \arrow[r, "p"'] & X
\end{tikzcd}$$

tel que le premier carré est cocartésien et le deuxième commutatif. On veut montrer que $i' \in \mathcal{P}$. On peut alors construire les flèches pointillées rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & A' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "i'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "k"'] \arrow[urr, dashed, "\widetilde{pk}"] & X' \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{p}"'] & X;
\end{tikzcd}$$

en effet, on construit d'abord $\widetilde{pk}$ d'après la propriété de relèvement à gauche de i par rapport à f, comme relèvement de $p \circ q$ relativement à $q \circ h$. Alors $\tilde{p}$ existe d'après la propriété universelle de X', vu comme somme amalgamée de X et A' le long de A : $\tilde{p} = \widetilde{pk} \cup_A q$. Le fait que $\tilde{p}$ est un relèvement de p par rapport à q résulte alors de la construction et de la propriété universelle de $X' = X \cup_A A'$. □

Exemple V.1.5. — Appliquant ce lemme par rapport à la classe des flèches de la forme

$$Y^I \xrightarrow{\mathrm{ev}_0} Y,$$

on obtient que les cofibrations sont stables par composition et co-changement de base.

Dualement, on obtient formellement que les fibrations (resp. fibrations faibles) sont stables par composition et changement de base.

Définition V.1.6. — On dit qu'un morphisme $i : A \to X$ est une inclusion cellulaire si X est obtenu à partir de A en attachant des cellules (cf. §III.2.3) et i est l'inclusion canonique qui s'en déduit.

Notons en particulier que si X est un CW-complexe et A un sous-CW-complexe, alors l'inclusion canonique $i : A \to X$ est tautologiquement une inclusion cellulaire.

Proposition V.1.7. — *Toute inclusion cellulaire est une cofibration.*

Démonstration. — On commence par traiter le cas de l'inclusion $i : S^{n-1} \to D^n$, *i.e.* $X = D^n$, $A = S^{n-1}$. Dans ce cas, l'application ν_i du diagramme (V.1) admet une rétraction :

$$r : (D^n \times I) \to (D^n \times \{0\} \sqcup S^{n-1} \times I =: B);$$

pour construire r, on voit $D^n \times I$ comme sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $o = (0, Hdots, 0, 2) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $x \in D^n \times I$, la droite (ox) intersecte B en un point exactement noté $r(x)$. Il est clair que l'application $x \mapsto r(x)$ est continue, et définie la rétraction attendue.

Si X est obtenu à partir de A en ajoutant une n-cellule, la proposition résulte du cas précédent et du fait que les cofibrations sont stables par co-changement de base (cf. Ex. V.1.5). Le cas général en résulte par stabilité des cofibrations par composition (cf. à nouveau Ex. V.1.5). □

V.1.b. Équivalences d'homotopie faibles. —

Définition V.1.8. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces non vides.

On dit que f est une *équivalence d'homotopie faible* si pour tout point $x \in X$ et tout entier $n \geq 0$, le morphisme induit :

$$f_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$$

est un isomorphisme.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme d'espaces pointés, on dit que f est une *équivalence d'homotopie faible* s'il l'est après oubli des points bases.

Remarque V.1.9. —
1. Par convention, on dit qu'un morphisme $f : \varnothing \to Y$ est une équivalence faible si $Y = \varnothing$ – autrement dit si f est un isomorphisme, ce qui équivaut dans ce cas à dire que f est surjectif !
2. La définition des équivalences d'homotopie faible sur les espaces pointés est aussi une convention. Elle permet d'éviter les morphismes tels que

$$f : (X \sqcup X) \xrightarrow{Id \sqcup p} (X \sqcup *)$$

où les deux espaces sont pointés par un point $x \in X$ vu dans le premier facteur. En effet, pour ce choix de points bases, pour tout $n \geq 0$, les morphismes

$$f_* : \pi_n(X \sqcup X, x) \to \pi_n(X \sqcup *, x)$$

sont des isomorphismes. Pourtant si X n'est pas contractile, on n'a pas envie de dire que la source et le but de f ont même type d'homotopie.

On notera toutefois que si X est connexe par arc, et si $f : (X, x) \to (Y, y)$ est un morphisme d'espaces pointés tel que pour tout $n \geq 0$,

$$f_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, y)$$

est un isomorphisme, alors Y est connexe par arc et f est une équivalence d'homotopie faible dans le sens de la définition précédente.

V.1.c. Preuve du théorème. —

Lemme V.1.10. — *Pour tout diagramme commutatif à homotopie près de flèche solides de la forme suivante :*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "(1)", near start] & Y \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[ur, dashed, "\tilde{p}"] \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, phantom, "(2)", near end, shift right=3ex] & Z
\end{tikzcd}$$

où A est non vide, i est une inclusion cellulaire et f une équivalence d'homotopie faible, il existe une flèche pointillé $\tilde{p}$ tel que le triangle (1) est commutatif et le triangle (2) est commutatif à homotopie près, par une homotopie constante sur A.

Démonstration. — On commence par démontrer cette proposition dans le cas de l'inclusion $i_n : S^{n-1} \to D^n$, pour un entier $n \geq 0$. Considérons donc un diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "i_n"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ D^n \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, dashed, "\exists ? \tilde{p}"] & Z. \end{tikzcd}$$

On prend le point base standard de S^{n-1} et on considère les points bases induits sur D^n, Y et Z. L'application q correspond donc à une classe d'homotopie dans $[q] \in \pi_{n-1}(Y)$. Comme le diagramme est commutatif à homotopie près,

$$f_*([q]) = [q \circ f] = [p \circ i_n]$$

est trivial dans $\pi_{n-1}(Z)$. Comme f est une équivalence d'homotopie, f_* est injective et on en déduit que $[q] = 0$. Cela implique qu'il existe un morphisme $\tilde{p}_0 : D^n \to Y$ tel que $\tilde{p}_0 \circ i_n = q$.

On ne peut pas montrer a priori que $f \circ \tilde{p}_0$ est homotope à p par une homotopie constante sur S^{n-1}. Toutefois, $f \circ \tilde{p}_0|_{S^{n-1}} = p|_{S^{n-1}}$ par construction. On en déduit donc une application bien définie :

$$\alpha : (f \circ \tilde{p}_0) \cup_{S^{n-1}} p : D^n \cup_{S^{n-1}} D^n \longrightarrow Z.$$

Comme $D^n \cup_{S^{n-1}} D^n \simeq S^n$, l'application α définit une classe d'homotopie dans $\pi_n(Z)$. Par hypothèse, $f_* : \pi_n(Y) \to \pi_n(Z)$ est surjectif. On peut donc trouver une application $\beta : S^n \to Y$ tel que $[f \circ \beta] = [\alpha]$. Considérons l'application composée :

$$\tilde{p}'_1 : I^n \to S^n \xrightarrow{\beta} Y$$

où l'on a identifié $S^n = I^n / \partial I^n$. Ainsi, $\tilde{p}'_1$ est constante sur le bord ∂I^n du n-cube. De même, après identification de I^n à D^n l'application $\tilde{p}_0$ définit une application

$$\tilde{p}'_0 : I^n \to Y$$

que l'on peut supposer constante sur l'une des faces I^{n-1} du cube I^n. On considère l'application :

$$\tilde{p}'_2 = (\tilde{p}'_0 \cup_{I^{n-1}} \tilde{p}'_1) : I^n \cup_{I^{n-1}} I^n \to Y$$

qui correspond donc à une application

$$\tilde{p}_2 : D^n \to Y$$

suivant l'homéomorphisme $I^n \cup_{I^{n-1}} I^n \simeq I^n \simeq D^n$. Notons que l'on peut supposer dans la construction précédente que l'équation suivante est satisfaite :

(V.2)
$$\tilde{p}_2|_{S^{n-1}} = \tilde{p}_0|_{S^{n-1}},$$

donc l'application

$$\tilde{p}_0 \cup_{S^{n-1}} \tilde{p}_2 : D^n \cup_{S^{n-1}} D^n \to Y$$

est bien définie et par construction, $[\beta] = [\tilde{p}_0 \cup_{S^{n-1}} \tilde{p}_2]$. Ainsi donc, on obtient une homotopie pointée :

$$f \circ (\tilde{p}_0 \cup_{S^{n-1}} \tilde{p}_2) \underset{\text{htp}}{\sim} (f \circ \tilde{p}_0) \cup_{S^{n-1}} p.$$

Si l'on compose ces applications avec l'injection $\nu_2 : D^n \to D^n \cup_{S^{n-1}} D^n$ dans le deuxième facteur, on obtient une homotopie constante sur S^{n-1} :

$$(f \circ \tilde{p}_2) \underset{\text{htp}}{\sim} p.$$

Du fait de l'équation (V.2), l'application $\tilde{p}_2 : D^n \to Y$ est solution du problème de l'énoncé dans le cas particulier de $i = i_n$.

Le cas général s'en déduit par induction sur le nombre de cellules définissant l'inclusion cellulaire i. □

Théorème V.1.11. — *Soient X et Y deux CW-complexes et $f : X \to Y$ un morphisme quelconque. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est une équivalence d'homotopie.*

(ii) *f est une équivalence d'homotopie faible.*

Démonstration. — Le sens (i) implique (ii) est évident et il s'agit de démontrer la réciproque. Le point essentiel est le résultat obtenu précédemment mais on commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme V.1.12. — *Soit $f : X \to Y$ une équivalence faible entre deux CW-complexes. Alors pour tout morphisme $p : Y' \to Y$, il existe un morphisme $\tilde{p} : Y' \to X$ unique à équivalence d'homotopie près tel que $f \circ \tilde{p} \underset{\text{htp}}{\sim} p$.*

L'existence de $\tilde{p}$ résulte du lemme précédent appliqué à f et i l'inclusion d'un point base. Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux solutions $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 : Y' \to X$. On applique à nouveau le lemme précédent au diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} Y' \times \{0,1\} \arrow[r, "\tilde{p}_1 \sqcup \tilde{p}_2"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \times I \arrow[r, "p \circ pr_1"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & Y. \end{tikzcd}$$

Du fait que le triangle supérieur commute, H est bien une homotopie de $\tilde{p}_1$ à $\tilde{p}_2$.

Á partir de ce lemme on conclut facilement. Si on l'applique avec $p = \mathrm{Id}_Y$, on trouve donc un morphisme $f' : Y \to X$ unique à équivalence d'homotopie près tel que $f \circ f' = \mathrm{Id}_Y$.

Par ailleurs, on peut encore appliquer le lemme précédent avec f et $p = f$. Notons que trivialement,

$$f \circ (f' \circ f) = (f \circ f') \circ f = f.$$

On en déduit par unicité dans le lemme précédent que $(f' \circ f)$ est homotope à l'identité et cela conclut. □

Rappelons qu'on a définit la catégorie homotopique Hot comme la catégorie formée des CW-complexes dont les morphismes sont les classes d'homotopie. Grâce au théorème de Whitehead, on en déduit une propriété universelle de cette catégorie qui est plus souvent prise comme définition.

Corollaire V.1.13. — *La catégorie Hot est la catégorie universelle munie d'un foncteur*

$$H : \mathscr{T}op_* \to Hot$$

tel que pour toute équivalence d'homotopie faible f, $H(f)$ est un isomorphisme.

On dit encore que la catégorie Hot est la *catégorie localisée* de la catégorie des CW-complexes par rapport aux équivalences d'homotopie faible.

Nous terminons par l'énoncé d'un théorème pour la culture.

Proposition V.1.14. — *Pour tout espace topologique X connexe par arc, il existe un CW-complexe X' et une équivalence d'homotopie faible $f : X' \to X$.*

Par ailleurs, si X est n-connexe, X' n'est formé que de cellules en dimensions supérieure n (outre le point base).

On construit X' de proche en proche en commençant par ajouter des n-cellules, une pour chaque générateur du groupe $\pi_n(X)$. On rajoute ensuite des $n+1$-cellules correspondant aux relations de $\pi_n(X)$. On répète ces deux opérations pour les $\pi_i(X)$, $i > n$ sachant qu'ajouter une i-cellule à X' ne modifie pas les groupes d'homotopie pour $\pi_j(X')$, $j < i$. Voir par exemple [**Hat02**, 4.13] pour des détails.

V.1.15. — La catégorie homotopique admet donc la propriété universelle suivante : il s'agit de la catégorie universelle (initiale) $\mathscr{T}$ munie d'une foncteur

$$t : \mathscr{T}op \to \mathscr{T}$$

tel que t envoie une équivalence d'homotopie faible sur un isomorphisme.

En effet, la catégorie homotopique vérifie cette propriété en remplaçant un espace topologique par un CW-complexe qui l'approche (proposition précédente) et du fait qu'une équivalence d'homotopie faible entre CW-complexes est une équivalence d'homotopie (Théorème V.1.11).

V.2. Espaces d'Eilenberg-Mac Lane

V.2.a. Définition. — Les espaces d'Eilenberg-Mac Lane se comporte par rapport à l'homotopie comme les sphères se comportent par rapport à l'homologie.

Définition V.2.1. — Soit n un entier positif et π un groupe, supposé abélien si $n > 1$.

On dit qu'un espace X est un *espace d'Eilenberg-Mac Lane de type* (π, n) s'il vérifie les conditions suivantes :
- X est connexe par arc ;
- pour tout entier $i > 0$,

$$\pi_i(X) = \begin{cases} \pi & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple V.2.2. — Nous avons déjà rencontré plusieurs exemples d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Le premier est le suivant : S^1 est de type $(\mathbb{Z}, 1)$ (cf. Ex. III.1.7).

V.2.3. — Considérons une *tour d'espaces topologiques* :

$$X_\bullet : X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \to HdotsX_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \to Hdots$$

Cette suite admet une colimite (ou encore limite inductive, cf. §IV.2.6), en utilisant la même formule que dans l'exemple IV.2.7 : l'espace $X_\infty := \varinjlim_{n \geq 0} X_n$ est le quotient de l'espace

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

modulo la relation d'équivalence $x_n \sim x_{n+1}$ si $x_{n+1} = f_n(x_n)$.

Lemme V.2.4. — *Considérons les notations qui précèdent et supposons que les applications f_n soient toutes injectives et pointées. Alors pour tout $i > 0$,*

$$\pi_i(X_\infty) = \varinjlim_{i \geq 0} \big(\pi_i(X_n)\big).$$

V.2.5. — Cela résulte du fait que les sphères S^i sont compactes et du fait suivant :

pour tout espace compact K, une application continue $K \to X_\infty$ se factorise en $K \to X_n$ pour n assez grand.

La construction des colimites est fonctorielles.

Lemme V.2.6. — *Considérons un morphisme de tours d'espaces topologiques, chaque tour étant formée d'inclusions :*

$$\begin{array}{ccccccccc} X_0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow \dots \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X_{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \\ Y_0 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow \dots \longrightarrow & Y_n & \longrightarrow & Y_{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

tels que tous les f_i sont des fibrations de Serre. Alors le morphisme induit sur les colimites f_∞ : $X_\infty \to Y_\infty$ est une fibration de Serre.

Cela résulte à nouveau de l'argument de §V.2.5 et du fait que I^n est compact.

Exemple V.2.7. —

1. Reprenons les notations du paragraphe III.1.9 : pour tout entier $n \geq 0$, l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^\times$ s'inscrit naturellement dans une suite fibre :
$$S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n.$$
On en déduit donc en considérant la colimite de ces suites fibres suivant n une suite homotopiquement exacte :
$$S^1 \to S^\infty \to \mathbb{CP}^\infty.$$
Il en résulte pour $i > 0$: $\pi_i(\mathbb{CP}^\infty) = \pi_{i-1}(S^1)$. Ainsi, $\mathbb{CP}^\infty$ est un espace d'Eilenberg-Mac Lane de type $(\mathbb{Z}, 2)$.
2. Avec cette fois les notations du paragraphe III.1.8, pour tout entier $n \geq 0$, l'espace projectif réel $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{R}^\times$ s'inscrit naturellement dans une suite fibre :
$$S^0 \to S^n \to \mathbb{RP}^n$$
dont la colimite est une suite fibre :
$$S^0 \to S^\infty \to \mathbb{RP}^\infty.$$
Il en résulte pour $i > 0$: $\pi_i(\mathbb{RP}^\infty) = \pi_{i-1}(S^0)$. Ainsi, $\mathbb{RP}^\infty$ est un espace d'Eilenberg-Mac Lane de type $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$.

V.2.b. Propriété universelle. —

Proposition V.2.8. — *Soit $n > 0$ un entier, et G, H des groupes. Considérons deux CW-complexes X et Y connexes par arcs, tels que pour tout $i > 0$:*

$$\pi_i(X) = \begin{cases} 0 & si\ i < n \\ G & si\ i = n, \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad \pi_i(Y) = \begin{cases} 0 & si\ i > n \\ H & si\ i = n. \end{cases}$$

Alors le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$[X, Y]_* \to Hom(G, H), f \mapsto \pi_n(f).$$

Démonstration. — D'après la proposition V.1.14, on peut remplacer X à équivalence d'homotopie faible près par un CW-complexe qui n'a que des cellules en dimensions supérieure à n. On peut donc supposer : $X^{(n-1)} = *$.

Surjectivité : Considérons un morphisme de groupes $\varphi : G \to H$.

Par définition, $X^{(n)}$ est obtenu en attachant des n-cellules au point base. Autrement dit, $X^{(n)}$ est un bouquet de n-sphères :

$$X^{(n)} = \vee_{i\in I} S_i^n$$

et l'inclusion canonique $\nu_i : S^n = S_i^n \to X^{(n)}$ définit un élément $x_i = [\nu_i] \in G$. L'élément $y_i = \varphi(x_i)$ est donc la classe d'homotopie d'une application pointée $S_i^n \to Y$. On en déduit donc une application bien définie $f^n : X^{(n)} \to Y$ qui induit un diagramme commutatif :

(V.3)

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_n(X^{(n)}) \arrow[dl, "\mu_{n*}"'] \arrow[dr, "f_*^n"] & \\
\pi_n(X) = G \arrow[rr, "\varphi"'] & & H = \pi_n(Y).
\end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\sqcup_i S_i^n \arrow[r, "\sqcup_i h_i"] \arrow[d] & X^{(n)} \arrow[r, "f^n"] \arrow[d] & Y \\
\sqcup_i D_i^{n+1} \arrow[r] & X^{(n+1)} &
\end{tikzcd}$$

où les indices i parcourent l'ensemble des $n+1$-cellules de X, les $h_i : S_i^n \to X^{(n)}$ sont les applications de recollement et le carré est cocartésien. La classe d'homotopie $[h_i] \in \pi_n(X^{(n)})$ est nulle dans $\pi_n(X) = \pi_n(X^{(n)})$. Le diagramme commutatif (V.3), on en déduit $f_*^n([h_i] = 0$. Autrement dit, l'application composée $S_i^n \xrightarrow{h_i} X^{(n)} \to Y$ se prolonge à D_i^n. On en déduit donc un relèvement $f^{n+1} : X^{(n+1)} \to Y$ de f^n et un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi_n(X^{(n)}) \arrow[dl, "\nu_{n*}"'] \arrow[ddr, "f_*^n"] & \\
 & \pi_n(X^{(n+1)}) \arrow[dl, "\mu_{n+1*}"'] \arrow[ddrr, phantom, ""] \arrow[drr, "f_*^{n+1}"] \arrow[r, phantom, "(1)"] \arrow[d, phantom, "(2)"] & {} & \\
\pi_n(X) = G \arrow[rrr, "\varphi"'] & {} & & H = \pi_n(Y)
\end{tikzcd}$$

tels que le triangle (1) est commutatif. Or d'après le corollaire III.2.15, le morphisme ν_{n*} est surjectif. On déduit donc de la construction (diagramme commutatif (V.3)), que le diagramme (2) est aussi commutatif. Notons au passage que le même corollaire implique que μ_{n+1*} est un isomorphisme.

L'obstruction à prolonger f^{n+1} à X tout entier ne fait maintenant plus intervenir que les application d'attachement de cellules de dimension plus grande que $(n+2)$, donc dont le bord est de dimension supérieure à $(n+1)$. Du fait que $\pi_i(Y) = 0$ si $i > n$, ces obstruction sont nulles et on en déduit un relèvement $f : X \to Y$ de f^n. Le diagramme commutatif précédent, et le fait que μ_{i*} soit un isomorphisme pour $i > n$ montre que f est bien un antécédent de φ.

Injectivité : soit $f, g : X \to Y$ sont deux application telles que $\pi_n(f) = \pi_n(g)$. On doit construire une homotopie $H : X \times I \to Y$ telle que $H|_{X\sqcup \partial I} = f \sqcup g$. On applique pour cela la même méthode que précédement en partant d'une homotopie $H^n : X^{(n)} \times I \to Y$ entre $f|_{X^{(n)}}$ et $g|_{X^{(n)}}$, qui existe par hypothèse. □

Corollaire V.2.9. — *Considérons un entier $n > 0$ et G un groupe, supposé abélien si $n > 1$.*

Si X et X' sont deux espaces de type $K(G,n)$, il existe une équivalence d'homotopie faible $f : X \to X'$. Autrement dit, X et X' ont même type d'homotopie.

Par ailleurs, l'isomorphisme f vu dans la catégorie Hotu est déterminé de manière unique si l'on impose que le morphisme induit $G = \pi_n(X) \xrightarrow{f_*} \pi_n(X') = G$ est l'identité.

V.2.c. Existence. — Rappelons le théorème de Van Kampen :

Théorème V.2.10. — *Soit X un espace topologique, $X = U \cup V$, tels que U, V et $U \cap V$ sont ouverts, non vide et connexes par arc. On suppose tous ces espaces pointés par un point arbitraire dans $U \cap V$.*

Alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U) \arrow[d] \\
\pi_1(V) \arrow[r] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

induit un isomorphisme :

$$\Theta : \pi_1(U) *_{\pi_1(U\cap V)} \pi_1(V) \to \pi_1(X)$$

où le membre de gauche désigne la somme amalgamée dans la catégorie des groupes.

En particulier, si $U \cap V$ est simplement connexe, $\pi_1(X)$ est le groupe librement engendré par $\pi_1(U)$ et $\pi_1(V)$.

Remarque V.2.11. — La preuve est très classique, voir par exemple [**Hat02**, 1.20]. Elle est plus simple si l'on remplace groupe fondamental par groupoïde fondamental. Le *groupoïde fondamental* d'un espace X (non nécessairement pointé) est la catégorie $\Pi(X)$ dont les objets sont les points de X et les morphismes entre $x, y \in X$ sont les lacets de X commençant à x et finissant à y. Le produit de composition est donné par la concaténation des lacets.

Notons que dans la catégorie $\Pi(X)$, tous les morphismes sont des isomorphismes : on dit que c'est un groupoïde. L'énoncé du théorème de Van Kampen pour les groupoïdes est exactement le même que précédemment sauf que l'on remplace la somme amalgamée dans la catégorie des groupes par celle dans la catégorie des groupoïde. Pour une preuve de cet énoncé dans ce contexte, voir [**May99**, chap. 2, sec. 7].

Proposition V.2.12. — *Soit n un entier et π un groupe, supposé abélien si $n > 1$.*

Il existe un CW-complexe X de type $K(\pi, n)$, n'ayant que des cellules en dimension supérieure à n.

Démonstration. — Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme V.2.13. — *Pour tout ensemble I, et tout entier $n > 0$, le groupe*

$$\pi_n(\vee_{i\in I} S^n_i)$$

est le groupe libre (resp. abélien libre si $n > 1$) engendré par I.

Notons que du fait que S^n est compact, on peut se ramener au cas où I n'a qu'un nombre fini d'éléments, et par induction au cas où I n'a que deux éléments. Dans le cas $n = 1$, cela résulte du théorème de Van Kampen vu précédemment. Dans le cas $n > 1$, on utilise le fait suivant :

$$S^{2n} = S^n \wedge S^n = S^n \times S^n / S^n \vee S^n.$$

Utilisant la suite exacte d'homotopie associée à la paire $(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$, on trouve donc une suite exacte :

$$0 = \pi_n(S^{2n}) \to \pi_n(S^n \times S^n) \to \pi_n(S^n \vee S^n) \to \pi_{n-1}(S^{2n}) = 0$$

qui montre que comme attendu :

$$\pi_n(S^n \vee S^n) \simeq \pi_n(S^n \times S^n) = \pi_n(S^n) \times \pi_n(S^n)\mathbb{Z}^2.$$

On considère un ensemble I^n de générateurs de π et on pose $X^{(n)} = \vee_{g\in I^n} S^n_g$. Notons $G(I^n)$ le groupe libre (resp. abélien libre) engendré par I^n. On en déduit un morphisme surjectif φ^n :

$\pi_n(X^{(n)}) = G(I^n) \to \pi$. Le noyau $R^n = \mathrm{Ker}(\varphi^n)$ définit donc les relations d'une présentation du groupe π. C'est un groupe libre (resp. abélien libre si $n > 1$) et on a donc une suite exacte :

$$0 \to R^n \to G(I^n) \to \pi \to 0$$

Si I^{n+1} désigne une base de R^n, tout élément $h \in I^{n+1}$ correspond à la classe d'homotopie d'une application $\psi_h : S^n_h \to X^{(n)}$.

On définit $X^{(n+1)}$ en attachant des $n+1$-cellules à $X^{(n)}$ le long des applications ψ_h pour $h \in I^{n+1}$. Rappelons que l'inclusion $j : X^{(n)} \to X^{(n+1)}$ est une cofibration avec pour cofibre l'espace $\vee_{h \in I^{n+1}} S^{n+1}_h$. On en déduit une suite exacte d'homotopie :

$$\begin{tikzcd}
& \pi_{n+1}\big(\vee_{h \in I^{n+1}} S^{n+1}_h\big) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \pi_n(X^{(n)}) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \pi_n(X^{(n+1)}) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi^n"] & \pi_n\big(\vee_{h \in I^{n+1}} S^{n+1}_h\big) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & R^n \arrow[r] & G(I^n) \arrow[r] & \pi \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et il existe donc une flèche φ^n qui est un isomorphisme (lemme du serpent).

Or, quitte à ajouter des cellules de dimension supérieure à $n+2$, on peut tuer les groupes d'homotopie de $X^{(n+1)}$ en dimension supérieure à $(n+1)$ en laissant inchangés ceux de dimension inférieure à n. En effet, si on pose $R^{n+1} = \pi_{n+1}(X^{(n+1)}$, chaque élément $h \in R^{(n+1)}$ correspond à la classe d'homotopie d'un élément $\xi_h : S^{n+1} \to X^{(n+1)}$. Si on définit $X^{(n+2)}$ en attachant des $(n+2)$-cellules à $X^{(n+1)}$ le long des ξ_h pour $h \in R^{(n+1)}$ on obtient un CW-complexe qui n'a pas de groupe d'homotopie en dimension $n+1$ et qui a les mêmes groupes d'homotopie que $X^{(n+1)}$ en dimension inférieure à n.

La construction du CW-complexe X s'obtient ainsi par adjonctions successives de cellules de dimension de plus en plus grande. $\square$

Définition V.2.14. — Sous les conditions de la proposition précédente, on note $K(\pi, n)$ l'unique type d'homotopie correspondant à un espace d'Eilengberg-Mac Lane de type (π, n).

Par abus de langage, on parle de l'espace (ou du CW-complexe) $K(\pi, n)$ pour désigner un espace (CW-complexe) dont le type d'homotopie est $K(\pi, n)$.

V.2.15. — Soit A un groupe abélien et n un entier positif.

On calcule facilement les groupes d''homotopie pour $i > 0$ de l'espace des lacets $\Omega K(\pi, n+1)$:

$$\pi_i\big(\Omega K(A, n+1)\big) = \pi_{i+1}\big(K(A, n+1)\big) = \begin{cases} A & i = n \\ 0 & i \neq n. \end{cases}$$

Il résulte donc du Corollaire V.2.9 qu'il existe une équivalence d'homotopie faible :

$$\omega_n : K(A, n) \to \Omega K(A, n+1).$$

On en déduit par adjonction une application dite *de suspension* :

$$\sigma_n : S^1 \wedge K(A, n) \to K(A, n+1)$$

qui relie les espaces de la suite $\big(K(A, n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit encore que $\big(K(A, n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est un *spectre*.

Si X est un espace pointé, et n un entier quelconque, on peut poser :

$$(HA)^n(X) = \varinjlim_{r \to \infty} [S^{r-n} \wedge X, K(A, r)]$$

les morphismes de transition étant donnés par les applications

$$[S^{r-n} \wedge X, K(A, r)] \xrightarrow{S^1 \wedge -} [S^{r-n+1} \wedge X, S^1 \wedge K(A, r)] \xrightarrow{\sigma_{r*}} [S^{r-n+1} \wedge X, K(A, r+1)].$$

Notons par ailleurs que cette application coincide par adjonction avec ω_{n*} : c'est donc un isomorphisme. On en déduit donc :

$$(HA)^n(X) = [S^{r-n} \wedge X, K(A, r)]$$

pour tout entier r suffisament grand.

Par construction, on obtient :

$$(HA)^n\big(S^0\big) = \pi_{r-n}\big(K(A,r)\big) = \begin{cases} A & n=0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{V.4}$$

où $r = \max(0,-n)+1$.

Proposition V.2.16. — *Considérons les notations précédentes :*

1. *Le foncteur $X \mapsto (HA)^*(X)$ définit une théorie cohomologique sur les espaces pointés qui vérifient les axiomes d'additivité, de suspension, d'exactitude (et d'excision).*
2. *Il induit par restrcition aux CW-complexes finis un foncteur contravariant stable :*

$$\mathscr{S}\mathscr{H}_f \to \mathscr{A}b, (X,n) \mapsto (HA)^n(X)$$

qui est additif (commute aux sommes finies) et envoie triangles distingués sur suites exactes longues.

Nous verrons cette proposition comme corollaire de la théorie homotopique stable, qui est l'étude des *spectres*.

On a déjà vu que la cohomologie singulière est l'unique théorie cohomologique des espaces pointés qui vérifient les propriétés de la proposition et l'axiome de dimension qui correspond à la propriété (V.4).

Corollaire V.2.17. — *Pour tout espace pointé X et tout entier $n > 0$, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel :*

$$\tilde{H}^n_{sing}(X,A) = (HA)^n(X) = [X, K(A,n)].$$

On dit encore que l'espace $K(A,n)$ représente le foncteur $\tilde{H}^n_{sing}(-,A) : (Hot)^{op} \to \mathscr{A}b$.

Remarque V.2.18. — Ce corollaire est à la base de la théorie de l'obstruction qui relie la construction d'extensions d'applications entre CW-complexes à un co-cycle dans la cohomologie singulière à coefficients dans certains groupes d'homotopies (voir par exemple [**May99**, 4.3, p. 416]).

Références

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[May99] J. P. May. *A concise course in algebraic topology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra.* Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

---

deuxième semestre 2015/2016

Frédéric Déglise, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* `frederic.deglise@ens-lyon.fr`
Url : `http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/`