

Table des matières

Cours VI. Suites spectrales et thèse de Serre	1
VI.1. Partie théorique	1
VI.1.a. Introduction	1
VI.1.b. Préliminaires : couples exacts	2
VI.1.c. Suites spectrales	5
VI.1.d. Convergence	7
VI.2. La suite spectrale d'une fibration	9
VI.2.a. Construction	9
VI.2.b. Théorème d'Hurewicz	10
VI.2.c. La théorie des classes de Serre	11
Références	13

COURS VI SUITES SPECTRALES ET THÈSE DE SERRE

VI.1. Partie théorique

VI.1.a. Introduction. —

VI.1.1. — On a déjà vu que les théories cohomologiques (tout comme les groupes d'homotopie ou les théories homologiques), viennent avec un outil très utile, des suites exactes longues associées à une paire d'espace, ou mieux à une cofibration. La théorie des suites spectrales a pour but de comprendre comment se combine ces suites exactes longues. Un exemple typique en topologie est celui donné par une *tour d'inclusions* :

$$(VI.1) \quad \dots X^n \xrightarrow{i_n} X^{n+1} \hookrightarrow \dots$$

indexée par les entiers $n \in \mathbb{Z}$ (ou la plupart du temps $n \in \mathbb{N}$). On dit que cette tour est *bornée inférieurement* (resp. *supérieurement*) si il existe un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $n < N$ (resp. $n > N$), i_n est un isomorphisme. On dit qu'elle est bornée si elle l'est inférieurement et supérieurement.

Notons que si cette tour est bornée inférieurement, on peut se ramener, à homotopie près, à une tour dont les inclusions sont des cofibrations en remplaçant de proche en proche chaque i_n par l'inclusion $X^n \rightarrow M(i_n)$ dans son cylindre (ici non pointé, cf. IV.3.8 pour la version pointée).

Un exemple fondamental est donné par le cas où l'on se donne un CW-complexe X et $X^n = X^{(n)}$, réunion des cellules de dimension inférieure à n . Notons qu'on a dans ce cas :

$$X = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X^{(n)}),$$

et X est réunion filtrante des $X^{(n)} = X^n$. On dit encore dans ce cas que X est un *espace filtré*, et X^\bullet est appelé la *filtration de X* . La filtration d'un CW-complexe donnée par la dimension de ses cellules est appelée la *filtration cellulaire*.

VI.1.2. — Les suites spectrales ont été inventées par Jean Leray, tout comme la théorie des faisceaux, alors qu'il était prisonnier dans un camps allemand pendant la second guerre mondiale (publication entre 1945 et 1950).

Elles ont été développées peu après, notamment par Cartan dans ces séminaires (autour des années 1950). La première application spectaculaire de ces suites spectrales a été donnée par Serre

en 1951 aux groupes d'homotopie des sphères. Par la suite, elles ont envahi toutes les parties des mathématiques et sont maintenant un outil universel.

VI.1.b. Préliminaires : couples exacts. —

VI.1.3. — Considérons une tour d'inclusions de la forme (VI.1). On obtient alors plusieurs suites exactes longues en homologie (singulière) que l'on peut relier comme dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \rightarrow & H_{m+1}(X^{n+1}) & \rightarrow & H_{m+1}(X^{n+1}, X^n) & \rightarrow & H_m(X^n) & \longrightarrow & H_m(X^{n+1}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & \parallel & & & & \\
 & & & & \dots & \longrightarrow & H_m(X^{n-1}) & \xrightarrow{a} & H_m(X^n) & \xrightarrow{b} & H_m(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{c} & H_{m-1}(X^{n-1}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & & & & & & & \parallel & & \\
 & & & & & & & & & & & & \dots & \longrightarrow & H_{m-1}(X^{n-1}) & \rightarrow & H_{m-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Dans ce diagramme, on voit deux groupes abéliens bigradués et trois types d'applications entre ces groupes, chacune homogène d'un certain bi-degré. Cette situation donne naissance à la définition suivante.

Définition VI.1.4. — Un *couple exact* \mathcal{E} de groupes abéliens est la donnée de groupes abéliens bigradués $E^{p,q}$ et $D^{p,q}$, pour des indices $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, et de morphismes homogènes

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow[(a)]{(1,-1)} & D \\
 & \swarrow (c) & \searrow (b) \\
 & E & \\
 & \nwarrow (-1,0) & \\
 & &
 \end{array}$$

dont les bidegrés sont indiqués sur le diagramme, tels qu'en tout degré (p, q) les suites de morphismes :

$$(VI.2) \quad D_{p-1, q+1} \xrightarrow{a_{p-1, q+1}} D_{p, q} \xrightarrow{b_{p, q}} E_{p, q} \xrightarrow{c_{p, q}} D_{p-1, q} \xrightarrow{a_{p-1, q}} D_{p, q+1}$$

sont exactes.

Si l'on dispose des données ci-dessus mais que le bi-degré du morphisme b est $(-r, r)$ pour un entier $r \geq 0$, nous dirons que l'on dispose d'un *couple exact de degré r* .

La règle pour déduire du diagramme précédent la définition un couple exact est la suivante :

$$(VI.3) \quad D_{p, q} = H_{p+q}(X^p), \quad E_{p, q} = H_{p+q}(X^p, X^{p-1}).$$

Remarque VI.1.5. — On peut avoir des couples exacts de modules sur un anneau, ou plus généralement à valeur dans une catégorie abélienne quelconque. Par ailleurs, on peut aussi considérer des couples exacts à valeur dans les espaces pointés : c'est ce qui arrive si l'on remplace l'homologie par l'homotopie et que l'on considère la suite exacte d'homotopie associée aux inclusion de la tour.

VI.1.6. — Considérons un couple exact comme dans la définition précédente, de degré 0 pour commencer. On lui associe canoniquement une complexe d'objets bigradués dont la différentielle est donnée par la formule :

$$(VI.4) \quad d = b \circ c.$$

En effet, $d \circ d = b \circ c \circ b \circ c = 0$ puisque la suite (VI.2) est exacte. On a ainsi construit une suite de complexes de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & E_{p+1,q} & \xrightarrow{d_{p+1,q}} & E_{p,q} & \xrightarrow{d_{p,q}} & E_{p-1,q} & \longrightarrow & \dots \\ & & \searrow \text{c} & & \nearrow \text{b} & & \searrow \text{c} & & \nearrow \text{b} \\ & & & & D_{p-2,q} & & & & D_{p-1,q} \end{array}$$

pour tout entier $q \in \mathbb{Z}$.

On peut déduire de ce complexe un nouveau couple exact. On pose :

$$\begin{aligned} E'_{p,q} &:= H_{p+q}(E_{*,q}) = \text{Ker}(d_{p,q}) / \text{Im}(d_{p+1,q}), \\ D'_{p,q} &:= \text{Im}(a_{p-1,q+1}), \end{aligned}$$

et on définit les morphismes comme suit.

1) $a' : D' \rightarrow D'$: ce morphisme est défini comme la flèche pointillée dont l'existence est assurée dans le diagramme suivant :

$$(VI.5) \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{a} & D \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ \text{Im}(a) & \xrightarrow{a'} & \text{Im}(a) \end{array}$$

où la notation pour les flèches verticales désignent le morphisme qui provient de la propriété universelle de l'image. En effet, a' existe d'après la propriété universelle de l'image.

2) $b' : D' \rightarrow E'$: Notons tout d'abord l'isomorphisme canonique suivant :

$$D' = \text{Im}(a) \simeq D / \text{Ker}(a) \simeq D / \text{Im}(c)$$

dont le dernier isomorphisme provient de l'exactitude de la suite exacte (VI.2). La construction de la flèche b' résulte du diagramme commutatif suivant :

$$(VI.6) \quad \begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{c} & D & \longrightarrow & D / \text{Im}(c) & & \\ & & \downarrow \text{b} & \searrow \bar{b} & & \searrow b' & \\ & & \text{Im}(bc) & \longrightarrow & \text{Ker}(bc) & \xrightarrow{\pi} & \text{Ker}(bc) / \text{Im}(bc) \\ & & \downarrow & \swarrow & \downarrow & & \\ E & \xrightarrow{bc} & E & \xrightarrow{bc} & E & & \end{array}$$

où les flèches de la forme \hookrightarrow désignent les morphismes canoniques pour la propriété universelle des noyaux (et de l'image), et les flèches de la forme \twoheadrightarrow désignent les morphismes canoniques pour la propriété universelle du conoyau. En effet, \bar{b} existe du fait que $cb = 0$ d'après la suite exacte (VI.2) et de la propriété universelle du noyau. Ensuite, b' existe du fait de la propriété universelle du conoyau : il est clair que $\pi \bar{b}c = 0$, par définition de \bar{b} .

3) $c' : E' \rightarrow D'$: rappelons que, en appliquant à nouveau l'exactitude de la suite (VI.2), on obtient $D' = \text{Im}(a) = \text{Ker}(b)$. La construction de la flèche c' se fait à l'aide du diagramme

commutatif suivant :

$$(VI.7) \quad \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{bc} & E & \xrightarrow{bc} & E \\ & & \downarrow & \swarrow & \\ & & \text{Im}(bc) \hookrightarrow \text{Ker}(bc) & \xrightarrow{\pi} & \text{Ker}(bc)/\text{Im}(bc) \\ & & \downarrow \bar{c} & \swarrow c' & \\ & & \text{Ker}(b) & & \\ & & \downarrow & \swarrow & \\ & & D & \xrightarrow{b} & E \end{array}$$

$\downarrow c$ (from the middle E to D), $\downarrow \bar{c}$ (from $\text{Ker}(bc)$ to $\text{Ker}(b)$), $\swarrow c'$ (from $\text{Ker}(bc)/\text{Im}(bc)$ to $\text{Ker}(b)$), \swarrow (from the top middle E to $\text{Ker}(bc)$), \swarrow (from the top middle E to D).

À nouveau, \bar{c} existe d'après la propriété universelle du noyau. On déduit ensuite l'existence de c' de la propriété universelle du conoyau et du fait que $\bar{c}\nu = 0$ par définition de l'image et du fait que $cbc = 0$ (suite exacte (VI.2)).

On peut alors vérifier le lemme suivant (laissé en exercice) :

Lemme VI.1.7. — *Considérons les définitions précédentes. Alors la suite :*

$$D' \xrightarrow{a'} D' \xrightarrow{b'} E' \xrightarrow{c'} D' \xrightarrow{a'} D'$$

est exacte.

Le lemme se déduit essentiellement de l'exactitude de la suite (VI.2) et des constructions ci-dessus.

VI.1.8. — Reprenons les notations du paragraphe et du lemme précédent. On peut vérifier grâce au diagramme (VI.5) et (VI.7) que $\deg(a') = \deg(a) = (1, -1)$ et $\deg(c') = \deg(c) = (0, -1)$. Par contre, le diagramme (VI.6) montre que l'on a en général :

$$\deg(b') = \deg(b) - \deg(a) = \deg(b) + (-1, 1) = (-1, 1).$$

En effet, cela vient de l'identification :

$$D'_{p+1, q-1} \simeq D_{p, q} / \text{Im}(c_{p+1, q})$$

qui décale les degrés de $-\deg(a) = (-1, +1)$.

On a donc obtenu un couple exact $\mathcal{E}' = (E', D', a', b', c')$ de degré 1.

La construction précédente se généralise immédiatement au cas où l'on part d'un couple exact de degré r . Alors \mathcal{E}' est de degré $r + 1$.

Définition VI.1.9. — Soit $\mathcal{E} = (E, D, a, b, c)$ un couple exact de degré r .

Avec les notations des paragraphes VI.1.6 et VI.1.8, on appelle $\mathcal{E}' = (E', D', a', b', c')$, le couple exact dérivé de \mathcal{E} . Il est de degré $r + 1$.

Dans la suite, nous noterons simplement (E, D) un couple exact, les morphismes structuraux a, b, c étant sous-entendus. La suite des couples exacts dérivés $(E^r, D^r)_{r \geq 1}$ sera définie naturellement par convention de la manière suivante :

$$(E^1, D^1) = (E, D), \quad (E^{r+1}, D^{r+1}) = (E^r, D^r), r \geq 0.$$

On fera attention au décalage : (E^r, D^r) est un couple exact de degré $r - 1$. En particulier, b^r est de degré $(1 - r, r - 1)$ ce qui implique que $d^r = b^r c^r$ est de degré $(-r, r - 1)$.

Remarque VI.1.10. — La méthode exposée pour obtenir la définition précédente s'applique évidemment si on remplace la catégorie des groupes abéliens par nimporte quelle catégorie abélienne, ou plus généralement par nimporte quelle catégorie pointée (avec un objet qui est

à la fois initial et final) qui admet des noyaux et des conoyaux. En particulier, la catégorie des ensembles pointés.

VI.1.c. Suites spectrales. —

Définition VI.1.11. — Soit (E, D) un couple exact de degré 0. Notons $(E^r, D^r)_{r \geq 0}$ la suite des couples exacts dérivés associée.

La *suite spectrale* associée à (E, D) est la suite de complexes bigradués $(E_{**}^r)_{r \geq 1}$ de la forme suivante

$$\cdots \rightarrow E_{p+r-1, q-r}^r \xrightarrow{d_{p+r, q-r+1}^r} E_{p, q}^r \xrightarrow{d_{p, q}^r} E_{p-r, q+r-1}^r \rightarrow \cdots$$

définis par l'objet bigradué E^r et la différentielle d^r qui est associée au couple (E^r, D^r) suivant la formule (VI.4).

Pour tout entier $r \geq 1$, les complexes E_{**}^r forment ce qu'on appelle la *r-ème page* de la suite spectrale.

Plus généralement, une suite spectrale avec conventions homologiques est la donnée d'une suite de complexes bigradués $(E_{**}^r)_{r \geq 1}$ suivant la convention précédente et telle que pour tout $r \geq 1$,

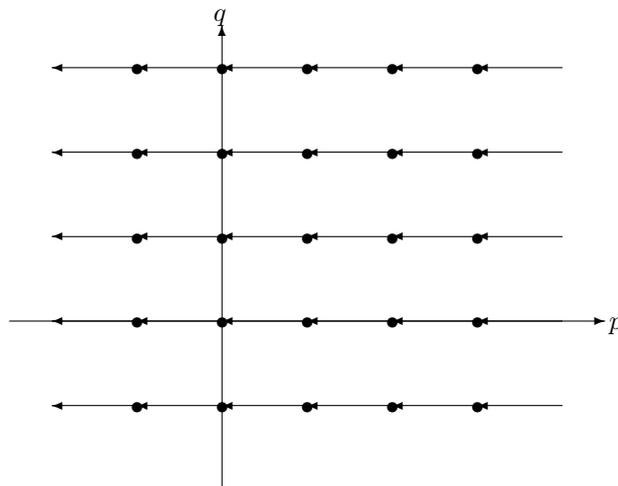
$$E_{p, q}^{r+1} = \text{Ker}(d_{p, q}^r) / \text{Im}(d_{p+r-1, q-r}^r).$$

Autrement dit, chaque page de la suite spectrale est obtenue comme l'homologie de la page précédente (de manière compatible aux bidegrés).

Remarque VI.1.12. — 1. La plupart des (sinon toutes les) suites spectrales connues sont associées à un couple exact bien choisi, bien qu'il existe d'autres méthodes pour construire des suites spectrales. La plus notable est celle des complexes filtrés. On renvoie à [McC01] pour une présentation de cette deuxième approche et pour la comparaison avec l'approche des couples exacts.

2. Certaines suites spectrales (par exemple la suite spectrale de Leray) commence au terme E_2 . Il s'agit là d'une convention car on peut toujours renuméroter une suite spectrale pour qu'elle commence à partir d'un rang arbitraire, mais cette convention à sa raison d'être. Dans ce cas-là, la suite spectrale est associée à un couple exact de degré 1.

VI.1.13. — *Représentations des suites spectrales.*— On représente les suites spectrales en inscrivant une page donnée - ici la première - dans un tableau de la forme suivante :



Le point en coordonnée (p, q) représente le groupe $E_{p,q}^1$, les flèches indiquent les différentielles. En général, on s'intéresse aux régions dans laquelle les groupes $E_{p,q}^1$, ou éventuellement les flèches $d_{p,q}^1$ sont nulles.

Exemple VI.1.14. — Reprenons l'exemple du couple exact associé à un espace filtré X^\bullet et aux suites exactes associées en homologie singulière, défini par la formule (VI.3). Supposons de plus que X est un CW-complexe et que $X^\bullet = (X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est la filtration par la dimension des cellules (i.e. $X^{(n)}$ est le n -squelette).

Dans ce cas, on peut calculer :

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X^{(p)}, X^{(p-1)}) = \tilde{H}_{p+q}(X^{(p)}/X^{(p-1)}) = \tilde{H}_{p+q}(\bigvee_{i \in I_p} S^p) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{I_p} & \text{si } q = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où I_p désigne l'ensemble des p -cellules de X . Ainsi, la première page de cette suite spectrale est concentrée sur la ligne $q = 0$ (nulle si $q \neq 0$).

Par ailleurs, le complexe sur la ligne $q = 0$:

$$\cdots \rightarrow \underbrace{E_{p,0}^1}_{=\mathbb{Z}^{I_p}} \xrightarrow{d_{p,0}^1} \underbrace{E_{p-1,0}^1}_{=\mathbb{Z}^{I_{p-1}}} \rightarrow \cdots$$

n'est autre que le complexe cellulaire associé au CW-complexe X . En particulier,

$$E_{p,q}^2 = \begin{cases} H_p(X) & \text{si } q = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On notera en particulier que toutes les différentielles de la page $E_{p,q}^r$ sont nulles si $r > 1$ car elles sont de degré $(1-r, r)$ donc ou bien la source ou bien le but est nul. Il en résulte que pour tout $r > 1$,

$$E_{p,q}^r = E_{p,q}^2.$$

Exemple VI.1.15. — On appelle *théorie homologique généralisée* toute théorie homologique H_* qui vérifie les axiomes d'homotopie, d'excision, de suspension et d'additivité (cf. section IV.1.a) mais pas l'axiome de dimension (cf. Remarque IV.1.5). Autrement dit, si la cohomologie du point $H_*(*)$ n'est pas concentrée en degré 0. Posons : $A^* = H^*(*)$.

La suite spectrale associée à la filtration cellulaire d'un CW-complexe grâce au couple exact défini par la formule (VI.3) prend alors la forme suivante :

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X^{(p)}, X^{(p-1)}) = \tilde{H}_{p+q}(X^{(p)}/X^{(p-1)}) = \tilde{H}_{p+q}(\bigvee_{i \in I_p} S^p) = (A_q)^{I_p}.$$

On notera en particulier que $E_{p,q}^1$ n'est pas nécessairement nul si $q \neq 0$.

On l'appelle cette suite spectrale la *suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch*. En général, on peut toujours calculer le terme E_2 comme suit :

$$E_{p,q}^2 = H_q^{sing}(X; A_q)$$

homologie singulière à coefficients dans le groupe abélien A_q .

En effet, en généralisant les calculs fait pour l'homologie singulière, on voit que le complexe défini par le terme $E_{*,q}^1$ pour cette suite spectrale s'identifie au complexe cellulaire du CW-complexe X (voir par exemple [Swi75, 15.7]).

Remarque VI.1.16. — Si on considère l'homotopie au lieu de l'homologie singulière, la suite spectrale associée à la filtration cellulaire d'un CW-complexe n'est pas très utile du fait qu'on ne sait pas calculer $\pi_{p+q}(S^p)$ en général si $p > 0$.

VI.1.d. Convergence. —

Définition VI.1.17. — Considérons une suite spectrale $(E_{**}^r)_{r \geq 1}$, suivant la définition VI.1.11.

Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, nous dirons la suite spectrale dégénère en $E_{p,q}^n$ si pour tout $r \geq n$, $d_{p,q}^r = 0$. En particulier, $E_{p,q}^{r+1} = E_{p,q}^r$ et nous poserons alors :

$$(VI.8) \quad E_{p,q}^\infty := E_{p,q}^n.$$

De plus nous utiliserons la terminologie suivante :

- la suite spectrale dégénère en (p, q) s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que la suite spectrale dégénère en $E_{p,q}^n$;
- la suite spectrale dégénère en E^n si pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, la suite spectrale dégénère en $E_{p,q}^n$;
- la suite spectrale dégénère faiblement si elle dégénère en tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$;
- la suite spectrale dégénère (fortement) s'il existe un entier $n > 0$ tel que la suite spectrale dégénère en E^n .

Exemple VI.1.18. — 1. Ainsi, la suite spectrale (VI.1.14) en homologie singulière associée à la filtration cellulaire d'un CW-complexe dégénère en E_2 .

2. Les cas les plus fréquents de dégénérescence de suites spectrales sont les suivants :

- La suite spectrale est *concentrée dans un quadrant* : $E_r^{p,q} = 0$ pour (p, q) n'appartenant pas à $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ ou $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^-$ ou $\mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^+$ ou $\mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^-$.
Alors, la suite spectrale dégénère faiblement.
- La suite spectrale est *concentrée dans une bande* : $E_r^{p,q} = 0$ pour (p, q) tel que $p \notin [a, b]$ ou $q \notin [a, b]$, pour des entiers $a \leq b$ donnés.
Alors, la suite spectrale dégénère fortement.
- Considérons une théorie homologie généralisée (cf. Exemple VI.1.15) telle que H_* est concentrée en degré positif. Alors la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch de l'exemple VI.1.15 est concentrée dans le quadrant $p, q \geq 0$.

VI.1.19. — Soit A un groupe abélien. Une filtration $F^\bullet A$ de A est (comme dans le cas topologique) une suite croissante :

$$\dots \subset F^p(A) \subset F^{p+1}(A) \subset \dots$$

de sous-groupes abéliens de A , indexée par $p \in \mathbb{Z}$. La filtration est dite *exhaustive* (resp. *séparée*) si

$$\cup_{p \in \mathbb{Z}} F^p(A) = A, \text{ resp. } \cap_{p \in \mathbb{Z}} F^p(A) = 0.$$

Pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, le p -ème gradué associé à cette filtration est le groupe abélien :

$$\text{Gr}_F^p(A) := F^p(A)/F^{p-1}(A).$$

Nous dirons de plus que la filtration $F^\bullet A$ est bornée si il existe un entier n tel que pour $|p| > n$, $\text{Gr}_F^p(A) = 0$.

Définition VI.1.20. — Soit $(E_{**}^r)_{r \geq 1}$ une suite spectrale (cf. définition VI.1.11). Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de groupes abéliens, chacun muni d'une filtration $F^\bullet H_n$.

Nous dirons que la suite spectrale E_{**}^r *converge* vers $(H_n)_n$ si elle dégénère et pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, il existe un isomorphisme :

$$E_{p,q}^\infty = \text{Gr}_F^p(H_n).$$

On dit aussi que le groupe abélien gradué H_* , muni de sa filtration, est *l'aboutissement* de la suite spectrale.

On note la situation de cette définition de manière suggestive :

$$E_{p,q}^1 \Rightarrow H_{p+q}.$$

Cette notation indique que la suite spectrale commence au terme E^1 (comme on l'a déjà vu, elle peut commencer au terme E^2). La filtration sur l'aboutissement est sous-entendue.

Exemple VI.1.21. — 1. Il est clair que la suite spectrale (VI.1.14) converge vers l'homologie singulière de X :

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}^{sing}(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \Rightarrow H_{p+q}^{sing}(X),$$

où l'on considère la filtration triviale sur $H_{p+q}(X)$, telle $\text{Gr}^p(A) = 0$ si $p \neq 0$.

2. Plus généralement, pour une théorie homologique H_* généralisée concentrée en degrés positifs le suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch converge vers l'homologie de X . On peut donc l'écrire en général :

$$E_{p,q}^2 = H_q^{sing}(X; H_q(*)) \Rightarrow H_{p+q}(X).$$

VI.1.22. — La convergence d'une suite spectrale est une question délicate en général, qui cache parfois de profonds théorèmes. Considérons une théorie homologique généralisée H_* et une filtration X^\bullet d'un espace topologique X tel que $X^{-1} = \emptyset$.

Rappelons que le couple exact associé à cette situation est :

$$D_{p,q}^1 = H_{p+q}(X^p), \quad E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X^p, X^{p-1}).$$

Notons que l'on dispose de la formule :

$$(VI.9) \quad H_n(X) = \varinjlim_{p \geq 0} H_n(X^p)$$

d'après l'axiome d'additivité de H_* . On définit une filtration sur $H_n = H_n(X)$ en posant :

$$F^p H_n(X) = \text{Im} (D_{p,n-p}^1 = H_n(X^p) \rightarrow H_n(X) = H_n).$$

L'exemple précédent résulte du théorème suivant :

Théorème VI.1.23. — *Considérons les notations qui précèdent. On suppose que la suite spectrale dégénère.*

Alors, la suite spectrale associée au couple exact défini par la formule (VI.3) converge vers $H_(X)$, munie de la filtration définie précédemment. Elle a donc la forme suivante :*

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \Rightarrow H_{p+q}(X).$$

Remarque VI.1.24. — Notons que la formule (VI.9) et l'hypothèse que la filtration X^\bullet est concentrée en degrés positifs impliquent :

$$\cup_{p \in \mathbb{Z}} F^p H_n(X) = H_n(X), \quad \cap_{p \in \mathbb{Z}} F^p H_n(X) = 0.$$

Démonstration. — Pour tout entier $r > 0$, on dispose d'une suite exacte :

$$D_{p+r-1, q-r+1}^r \xrightarrow{a_{p-1, q+1}^r} D_{p+r, q-r}^r \xrightarrow{b_{p, q}^r} E_{p, q}^r \xrightarrow{c_{p, q}^r} D_{p+r-1, q-r}^r \xrightarrow{a_{p-1, q}^r} D_{p+r, q-r+1}^r.$$

Vu que la suite spectrale est concentrée dans la région $p \geq 0$, elle converge : elle dégénère en $E_{p,q}^r$ pour $r > p$:

$$E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^r$$

est constant pour $r > p$.

Supposons $n = p + q$ et $r > p$. Par définition du couple exact dérivé, il est clair que :

$$F^p H_n(X) = \text{Im} (D_{p+r, q-r}^r \rightarrow H_n(X)),$$

$$F^{p-1} H_n(X) = \text{Im} (D_{p+r-1, q-r+1}^r \rightarrow H_n(X)).$$

On déduit de la suite exacte précédente une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow F^{p-1}H_n(X) \rightarrow F^pH_n(X) \rightarrow E_{p,q}^\infty \rightarrow 0$$

ce qui conclut. \square

VI.2. La suite spectrale d'une fibration

VI.2.a. Construction. —

VI.2.1. — Considérons une fibration $p : E \rightarrow B$ au sens de Serre telle que B est un CW-complexe connexe par arc. Soit F la fibre de p pour un point base arbitrairement choisi.

On définit une filtration sur E en posant :

$$E^n = p^{-1}(B^{(n)})$$

où $B^{(n)}$ est le n -squelette de B .

Considérons H_* la théorie d'homologie singulière. On associe donc à cette filtration un couple exact et une suite spectrale qui converge d'après la proposition précédente et qui a la forme suivante :

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(E^p, E^{p-1}) \Rightarrow H_{p+q}(B).$$

Théorème VI.2.2. — *Supposons que B est simplement connexe.*

Alors la suite spectrale associée à la fibration $p : E \rightarrow B$ et à la théorie homologique H_ est une suite spectrale convergente qui a la forme suivante :*

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, H_q(F)) \Rightarrow H_{p+q}(E).$$

Démonstration. — (Indication) Soit $(e_i^p)_{i \in I^p}$ la famille des p -cellules de la structure de CW-complexe de B . Soit $n = p + q$. On commence par montrer que

$$H_n(E^p, E^{p-1}) = \bigoplus_{i \in I^p} H_n(p^{-1}(\bar{e}_i^p), p^{-1}(\partial e_i^p)).$$

Puis, du fait que f est une fibration, on montre que pour tout $i \in I_p$, il existe quitte à choisir un point x de e_i^p un isomorphisme :

$$H_n(p^{-1}(\bar{e}_i^p), p^{-1}(\partial e_i^p)) \simeq H_n(F_x \times \bar{e}_i^p, F_x \times \partial e_i^p) \simeq H_q(F_x) \otimes_{\mathbb{Z}} H_p(\bar{e}_i^p, \partial e_i^p)$$

où le deuxième isomorphisme résulte de la formule de Künneth.

Du fait que B est simplement connexe, on montre qu'après identification de F_x à F , cet isomorphisme est indépendant du choix de $x \in e_i^p$.

On en déduit donc :

$$H_n(E^p, E^{p-1}) = C_*(B, H_q(F)),$$

complexe cellulaire de B à coefficients dans le groupe abélien $H_q(F)$, ce qui conclut. \square

Remarque VI.2.3. — Si B n'est pas simplement connexe, on a vu dans le corollaire II.2.11 que le groupe $\pi_1(B)$ agit sur la fibre F de p , à homotopie près. On en déduit donc, pour tout entier $q \in \mathbb{Z}$, une action de $\pi_1(B)$ sur $H_q(F)$.

On peut définir des groupes d'homologie de B à coefficients dans $H_q(F)$ qui tiennent compte de cette action de $\pi_1(B)$, de la manière suivante.

Posons $\pi = \pi_1(B)$. Une action de π sur un groupe abélien A revient à la donnée d'une structure de $\mathbb{Z}[\pi]$ -module sur A . Le groupe $\pi = \pi_1(B)$ agit sur le revêtement universel \tilde{B} de B . On en déduit donc une action de π sur le complexe des chaînes singulières de \tilde{B} :

$$C_*(\tilde{B}, \mathbb{Z}) = C_*^{\text{sing}}(\tilde{B}).$$

On définit le complexe des chaînes singulières de B à coefficients dans A comme le complexe suivant :

$$C_*^\pi(B, A) = C_*(\tilde{B}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} A$$

où le produit tensoriel fait référence à la structure de $\mathbb{Z}[\pi]$ -module sur chacun des deux membres. On note $H_*^\pi(B, A)$ l'homologie de ce complexe.

Alors, sous les hypothèses du paragraphe VI.2.1, la suite spectrale associée à la fibration $p : E \rightarrow B$ a la forme suivante :

$$E_{p,q}^2 = H_p^\pi(B, H_q(F)) \Rightarrow H_{p+q}(E).$$

VI.2.b. Théorème d'Hurewicz. — On peut déduire de la suite spectrale d'une fibration et de l'isomorphisme pour X connexe par arc :

$$(VI.10) \quad \pi_1(X)^{ab} \xrightarrow{sim} H_1(X, \mathbb{Z})$$

le théorème d'Hurewicz :

Théorème VI.2.4 (Hurewicz). — Soit $n > 1$ un entier et X un espace pointé $(n-1)$ -connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique :

$$h_n : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X, \mathbb{Z}).$$

Démonstration. — On montre ce résultat pour $n \geq 1$ par récurrence sur n , en supposant que $\pi_1(X)$ est abélien. Le cas $n = 1$ résulte donc de l'isomorphisme (VI.10).

Considérons l'étape d'induction. Rappelons que

$$\pi_i(\Omega(X)) = \pi_{i+1}(X).$$

Ainsi, ΩX est $(n-2)$ -connexe, et de plus son π_1 est abélien. Il est justifiable de l'hypothèse d'induction. Donc,

$$(VI.11) \quad H_i(\Omega X) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < n-1, \\ \pi_{n-1}(\Omega X) = \pi_n(X) & \text{si } i = n-1. \end{cases}$$

Considérons la fibration des chemins (cf. II.2.13) :

$$\Omega X \rightarrow PX \xrightarrow{p} X.$$

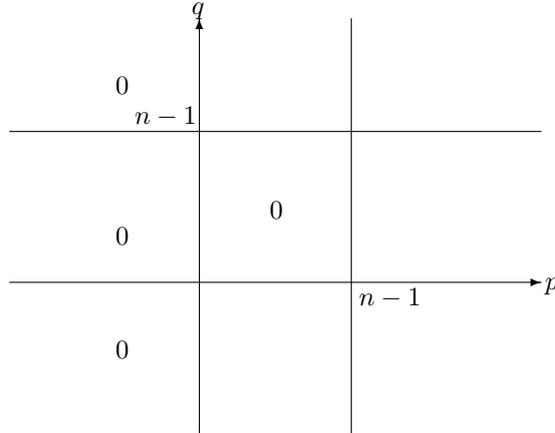
L'espace PX est contractile, donc a fortiori simplement connexe. On obtient donc une suite spectrale convergente de la forme suivante :

$$E_{p,q}^2 = H_p(X, H_q(\Omega X)) \Rightarrow H_{p+q}(PX).$$

On notera en particulier que l'aboutissement est nul sauf pour $p+q = 0$, auquel cas $H_{p+q}(PX) = \mathbb{Z}$. d'après la convergence de la suite spectrale, les gradués de la filtration sur $H_{p+q}(PX)$ étant tous nuls pour $p+q \neq 0$, on en obtient :

$$(VI.12) \quad E_{p,q}^\infty = 0 \text{ si } p+q \neq 0.$$

D'après la formule (VI.11), la suite spectrale est nul en si $q \notin \{0\} \cup [n-1, +\infty[$. Ainsi, la suite spectrale a la forme suivante :



Considérons les groupes sur la ligne $q = 0$, $E_{p,0}^2 = H_p(X)$. Si $p \leq n-1$, il n'y a pas de différentielle non nulle qui part ou aboutit à $E_{p,0}^2$. Autrement dit, la suite dégénère en $E_{p,0}^2$ et donc :

$$H_p(X) = E_{p,0}^2 = E_{p,0}^\infty = 0, 0 < p < n.$$

Pour $p = n$, on a une seule différentielle non nulle sur le terme en coordonnée $(n, 0)$, qui n'apparaît qu'à la page n :

$$d_{n,0}^2 : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n.$$

Notons que la suite spectrale dégénère en $E_{n,0}^n$ et $E_{0,n-1}^n$. Vu que les termes $E_{n,0}^\infty$ et $E_{0,n-1}^\infty$ sont nuls, cette flèche est nécessairement un isomorphisme.

On en déduit donc, comme attendu :

$$H_n(X) \simeq E_{n,0}^n \simeq E_{0,n-1}^n \simeq H_{n-1}(\Omega X) \simeq \pi_n(X).$$

□

VI.2.c. La théorie des classes de Serre. —

VI.2.5. — Soit \mathcal{C} une sous-catégorie de la catégorie des groupes abéliens contenant 0 et qui est stable par noyaux, conoyaux et extensions. Autrement dit, étant donné une suite exacte courte de groupes abéliens :

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

si deux des groupes A, A', A'' appartiennent à \mathcal{C} alors le troisième aussi.

On dit encore parfois que \mathcal{C} est une *classe de Serre*. Dans ces conditions, pour un espace pointé X , nous noterons $\mathcal{P}(\mathcal{C}, X)$ la propriété suivante :

$\mathcal{P}(\mathcal{C}, X)$ pour tout $n \geq 0$, le groupe abélien $\tilde{H}_n(X)$ appartient à \mathcal{C} .

On dit enfin que la classe de Serre \mathcal{C} est *multiplicative* si pour tout couple (A, B) d'objets de \mathcal{C} , $A \otimes B$ et $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ sont dans \mathcal{C} .

Théorème VI.2.6. — *Considérons les notations qui précèdent pour une classe de Serre multiplicative \mathcal{C} . Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration d'espaces pointés dont la base est simplement connexe et F sa fibre.*

Alors si deux des propriétés $\mathcal{P}(\mathcal{C}, E)$, $\mathcal{P}(\mathcal{C}, B)$, $\mathcal{P}(\mathcal{C}, F)$ sont vraies, la troisième aussi.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la suite spectrale convergente :

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, H_q(F)) \Rightarrow H_{p+q}(E).$$

□

Corollaire VI.2.7. — Pour tout couple d'entiers (k, n) , le groupe abélien $H_k(K(\mathbb{Z}, n))$ est de type fini.

Démonstration. — Le résultat est clair pour $n = 1$ car $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$. Pour $n = 2$, $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. Nous verrons que pour tout $k \geq 0$, $H_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty) = \mathbb{Z}$. Le résultat est donc acquis pour $n \geq 2$.

On fait alors une induction sur l'entier n en utilisant le théorème précédent pour \mathcal{C} la classe des groupes abéliens de type fini et pour la fibration :

$$PK(\mathbb{Z}, n) \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$$

dont la fibre est $\Omega K(\mathbb{Z}, n) = K(\mathbb{Z}, n+1)$. □

Corollaire VI.2.8. — Pour tout couple d'entiers (k, n) , et tout groupe de type fini G , le groupe abélien $H_k(K(G, n))$ est de type fini.

Démonstration. — D'après la propriété universelle des $K(\pi, n)$, on obtient pour tout groupes G et H :

$$K(G, n) \times K(H, n) = K(G \times H, n)$$

l'isomorphisme étant canonique dans la catégorie homotopique.

Ainsi, le corollaire précédent implique le résultat attendu si G est un groupe libre de type fini.

Par ailleurs, pour toute suite exacte de groupes,

$$1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 1$$

la fibre homotopique de $f : K(G, n) \rightarrow K(G'', n)$ est $K(G', n)$.

On en déduit de là le cas d'un groupe G de type fini, à l'aide de la suite spectrale associée à une fibration représentant f , et en prenant une présentation libre de type fini du groupe G . □

Corollaire VI.2.9. — Soit X un CW-complexe simplement connexe tel que pour tout entier k , $H_k(X)$ est de type fini.

Alors pour tout $k > 1$, $\pi_k(X)$ est de type fini.

Démonstration. — D'après le théorème d'Hurewicz, $\pi_2(X) \simeq H_2(X)$. Le corollaire est donc vrai pour $k = 2$.

Comme X est simplement connexe, on obtient un isomorphisme :

$$[X, K(\pi_2(X), 2)] \simeq \text{End}(\pi_2(X)).$$

Il existe donc un morphisme $f : X \rightarrow K(\pi_2(X), 2)$ tel que $\pi_2(f)$ est l'identité.

En utilisant la construction du paragraphe II.2.12, on trouve un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & K(\pi_2(X), 2) \\ \downarrow i & & \parallel \\ X' & \xrightarrow{f'} & K(\pi_2(X), 2) \end{array}$$

tel que i est une équivalence d'homotopie (forte) et f' est une fibration. Soit F la fibre de f' . La suite exacte longue d'homotopie associée à la fibration f' (cf. III.1.5) montre que F est 2-connexe et pour tout $i \neq 2$, $\pi_i(F) = \pi_i(X')$.

Le théorème d'Hurewicz appliqué à F montre donc :

$$H_3(F) = \pi_3(F) = \pi_3(X') = \pi_3(X).$$

Or, la suite exacte longue d'homologie appliquée à la fibration f' , l'hypothèse sur l'homologie de X' et le corollaire précédent pour l'homologie de $K(\pi_2(X), 2)$, montrent que l'homologie de F est de type fini. La proposition précédente est donc vraie pour $k = 3$.

Pour les cas suivants, $k > 3$, on voit qu'il suffit de remplacer X par F . On applique la même méthode pour des espaces X de plus en plus n -connexes. □

Corollaire VI.2.10. — Pour tout couple d'entiers (k, n) , $\pi_k(S^n)$ est un groupe abélien de type fini.

VI.2.11. — La preuve du corollaire VI.2.9 constitue le coeur de la thèse de Serre pour déterminer plus généralement les groupes d'homotopie des sphères. Rappelons que Serre (cf. [Ser51, chap. VI, sec. 6, Prop. 5]) prouve les faits suivants :

- Les groupes $\pi_k(S^n)$ sont finis sauf pour n pair et $k = 2n - 1$ auquel cas ce groupe est égal à la somme de \mathbb{Z} et d'un groupe fini ;
- Pour un nombre premier p , la composante p -primaire de $\pi_k(S^n)$ est nulle si $k < n + 2p - 3$ et $\pi_{n+2p-3}(S^n)$ est un groupe cyclique d'ordre p^r pour $r > 0$.

Références

- [McC01] John McCleary. *A user's guide to spectral sequences*, volume 58 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001.
- [Ser51] J.-P. Serre. Homologie singulière des espaces fibrés. *Annals of Math.*, 54(3) :425–505, 1951.
- [Swi75] Robert M. Switzer. *Algebraic topology—homotopy and homology*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 212.

deuxième semestre 2015/2016

FRÉDÉRIC DÉGLISE, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364
 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • E-mail : frederic.deglise@ens-lyon.fr
 Url : <http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/>