Table des matières

Cours VII. Catégorie homotopique stable 1
VII.1. Spectres 1
VII.1.a. Localisation de catégories 1
VII.1.b. Définition des spectres 5
VII.1.c. Propriété universelle 7
VII.1.d. Propriétés supplémentaires 9
VII.2. Théories cohomologiques 10
VII.2.a. Propriétés homotopiques et représentabilité 10
VII.2.b. Produits 12
Références 13

COURS VII
CATÉGORIE HOMOTOPIQUE STABLE

VII.1. Spectres

VII.1.a. Localisation de catégories. — Il est temps de formaliser la propriété universelle de la catégorie homotopique.

Définition VII.1.1. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie $\mathscr{C}$ et $\mathcal{W}$ des flèches dans $\mathscr{C}$.

On appelle catégorie localisée de $\mathscr{C}$ suivant $\mathcal{W}$ la catégorie notée $\mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ vérifiant la propriété universelle suivante : il s'agit de la catégorie initiale munie d'une flèche $\mathscr{C} \xrightarrow{\pi} \mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ telle que tout foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dans une catégorie $\mathscr{D}$ qui a la propriété d'envoyer les flèches de $\mathcal{W}$ sur des isomorphismes dans $\mathscr{D}$ se factorise de manière unique :

$$\mathscr{C} \xrightarrow{\pi} \mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}] \xrightarrow{\tilde{F}} \mathscr{D}.$$

Exemple VII.1.2. — Comme nous l'avons vu (Corollaire V.1.13), la catégorie homotopique $\mathbb{H}$ est la catégorie des CW-complexes localisée par rapport aux équivalences faibles. Il revient au même, d'après le théorème de Whitehead de localiser la catégorie des CW-complexes par rapport aux équivalences d'homotopie. Enfin, d'après le paragraphe V.1.15, elle est encore équivalente à la catégorie des espaces topologiques localisée par rapport aux équivalences faibles.

VII.1.3. — Si l'on s'appuie sur l'axiomatique des classes de Bernays-Gödel pour fonder la théorie des catégories (1) la catégorie $\mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ n'est pas correctement définie a priori.

Pour comprendre ce phénomène, restreignons-nous au cas où $\mathscr{C}$ est une *petite catégorie*, *i.e.* une catégorie dont les objets forment un ensemble. Dans ce cas, $\mathcal{W}$ est un ensemble et on peut construire explicitement la catégorie localisée $\mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]$, qui est une petite catégorie, suivant une construction due à Gabriel et Zisman (cf. voir [**GZ67**, Chap. 1, §1]). En termes catégoriques, si l'on admet que les petites catégories admettent des colimites, la catégorie $\mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ peut-être

1. on demande en particulier que les objets d'une catégorie forment une classe, et les morphismes entre deux objets un ensemble ;

décrite par le diagramme cocartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W} \times I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & \mathscr{C} \arrow[d] \\ \mathcal{W} \times \overline{I} \arrow[r] & \mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]. \end{tikzcd}$$

Pour décrire les petites catégories de ce diagramme, nous dirons qu'une catégorie est discrète si ces morphismes se réduisent aux identités entre objets ; il est équivalent de se donner un ensemble d'objets.

Dans le diagramme ci-dessus, $\mathcal{W}$ est la catégorie discrète associée à l'ensemble $\mathcal{W}$, I (resp. $\overline{I}$) est la catégorie représentée par le diagramme suivant :

$$0 \longrightarrow 1 \quad \text{resp.} \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "f"] & 1 \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

avec la relation $f \circ g = Id$ et $g \circ f = Id$ dans le cas respé. Les fonteurs i et j sont les inclusions évidentes — sachant que l'ensemble des flèches de $\mathcal{W} \times I$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{W}$.

Le problème de cette construction appliquée aux catégories dans l'axiomatique de Bernays-Gödel est que les flèches entre deux objets de la catégories localisées forment en général une classe et non un ensemble.

Remarque VII.1.4. — L'approche moderne de ce problème est de considérer que toutes les catégories sont petites, chacune appartenant à un ensemble *univers* — un ensemble dont les sous-ensembles sont stables par les opérations usuelles de la théorie des ensembles. L'axiome des univers stipule que tout ensemble est élément d'un univers.

Si la catégorie $\mathscr{C}$ est U-petite (l'ensemble de ses objets appartient à U), alors la catégorie localisée $[\mathcal{W}^{-1}]$ ne sera pas U-petite mais elle sera V-petite pour tout univers V tel que $U \in V$: quitte à changer d'univers, on peut donc parler de la catégorie localisée d'une catégorie donnée — supposant qu'elle est U-petite.

Dans toutes les recherches actuelles, les catégories considérées dans la pratique sont toujours obtenues en effectuant ce procédé suivant un nombre fini d'itération ce qui nous laisse de la place pour changer d'univers.

Une solution plus complète aux problèmes de localisation a été trouvée par Quillen (cf. [**Qui67**]) grâce à l'axiomatique des catégories de modèles. Le mot *modèle* est un raccourci pour le terme *modèle pour la catégorie homotopique.* Nous avons vu deux types de modèles pour le moment : les espaces topologiques et les CW-complexes. Il en existe beaucoup d'autres. Parmi les plus célèbres, les ensembles simpliciaux (Kan, ...) et les petites catégories (Grothendieck, Thomason,...).

***Définition VII.1.5* (Quillen).** — Une *catégorie de modèle* est une catégorie $\mathscr{C}$ munie de trois classes de flèches $(\mathcal{W}, \mathcal{F}ib, \mathcal{C}of)$, appelées respectivement *équivalences faibles*, *cofibrations* et *fibrations* ; on dit aussi que les flèches de $\mathcal{C}of \cap \mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{F}ib \cap \mathcal{W}$) sont des cofibrations (resp. fibrations) triviales. Ces données doivent satisfaire les propriétés suivantes :

(M0') $\mathscr{C}$ admet des limites inductives et projectives.

(M1) les fibrations (resp. cofibrations) admettent la propriété de relèvement à gauche (resp. à groite) par rapport aux cofibrations (resp. fibrations) triviales.

(M2) toute flèche f de $\mathscr{C}$ admet une factorisation $f = pi$ telle que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :
  - p est une fibration triviale et i une cofibration ;
  - p est une fibration et i une cofibration triviale.

(M3) Les fibrations (resp. cofibrations) sont stables par composition, changement de base (resp. co-changement de base), et contiennent les isomorphismes.

(M4') Si f et g sont des morphismes composables et deux des trois morphismes f, g, fg sont des équivalences faibles, alors le troisième aussi.

On dit encore qu'un objet X est fibrant (resp. cofibrant) si la flèche canonique $X \to *$ (resp. $\varnothing \to X$) est une fibration (resp. cofibration).

Remarque VII.1.6. — Les symboles « prime » indiquent des variations par rapport aux définitions de Quillen que les mathématiciens ont adoptés par la suite. Dans l'axiome (M2), on ajoute aussi le fait que les factorisations des flèches f peuvent être choisies en étant fonctorielles en f.

Remarque VII.1.7. — Un premier lemme qui découle de ces définitions et que la classe des fibrations (resp. cofibrations) est exactement la classe des flèches qui admettent la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) par rapport aux cofibrations triviales (resp. fibrations triviales).

Ainsi, une catégorie de modèles est déterminée de manière unique par la donnée de l'un des couples $(\mathcal{W}, \mathcal{F}ib)$ ou $(\mathcal{W}, \mathcal{C}of)$.

Exemple VII.1.8. — 1. La catégorie des espaces topologiques, avec pour fibrations les fibrations de Serre (Definition II.2.1) est d'après un théorème de Quillen (cf. [**Qui67**, Chap. II, §3, Th. 1]) une catégorie de modèles : les cofibrations sont imposées par la remarque précédente.

On notera que pour cette structure, tout espace topologique est fibrant. Par ailleurs, les CW-complexes sont tous cofibrants — et les applications cellulaires sont des cofibrations.

2. Un autre exemple qui pourra sembler familier est donné par la catégorie $\mathscr{C} = C_{\geq 0}(\mathscr{A}b)$ des complexes de groupes abéliens concentrés en degrés positifs. Considérons un morphisme de complexes
$$f = (f_n : C_n \to D_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$
   - Nous dirons que f est un *quasi-isomorphisme* si pour tout entier $n \geq 0$, le morphisme induit en homologie $f_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ est un isomorphisme : $f \in \mathcal{W}$.
   - Nous dirons que f est une *fibration projective* si pour tout entier $n \geq 0$, f_n est surjectif : $f \in \mathcal{F}ib$.
   - Nous dirons que f est une *cofibration projective* si pour tout entier $n \geq 0$, f_n est injectif et le groupe abélien $\mathrm{coKer}(f_n)$ est projectif : $f \in \mathcal{C}of$.

   Alors, $C_{\geq 0}(\mathscr{A}b)$ munie de ces classes de flèches est une catégorie de modèles (voir la preuve de [**Qui67**, Chap. II, §4, Th. 4] ou encore [**Hov99**]).

   On notera que pour cette catégorie de modèles, tous les complexes sont cofibrants, et les complexes cofibrants sont exactement les complexes formés de groupes abéliens projectifs.

Remarque VII.1.9. — Si $\mathscr{C}$ est la catégorie des complexes de groupes abéliens non bornés, ni inférieurement ni supérieurement, (ou encore des R-modules pour un anneau R, ou encore une catégorie *abélienne de Grothendieck*), on peut définir une catégorie de modèles sur $\mathscr{C}$ en prenant pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes et pour *cofibrations projectives* les morphismes qui sont degré par degré des épimorphismes.

La même chose vaut si au lieu de définir les cofibrations, on définit les fibrations, dites *fibrations injectives*, comme les morphismes qui sont degrés par degrés des monomorphismes.

Le théorème principal de Quillen (cf. [**Qui67**, Chap. I, Th. 1', p. 1.13]) est le suivant.

Théorème VII.1.10 **(Quillen).** — *Soit $(\mathscr{C}, \mathcal{W}, \mathcal{F}ib, \mathcal{C}of)$ une catégorie de modèles. Soit $\mathscr{C}_{cf}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ formée des objets cofibrants et fibrants.*

Alors, il existe sur les flèches de $\mathscr{C}_{cf}$ une relation d'équivalence compatible à la composition. Si l'on note $\pi\mathscr{C}_{cf}$ la catégorie dont les flèches sont les classes d'équivalences suivant cette relation, il existe un foncteur canonique

$$\mathscr{C} \to \pi\mathscr{C}_{cf}$$

tel que $\pi\mathscr{C}_{cf}$ vérifie la propriété universelle de la localisation de $\mathscr{C}$ en $\mathcal{W}$.

Remarque VII.1.11. — On notera en effet que d'après la xiome (M2) des catégories de modèles, tout objet X est faiblement équivalent à un objet à la foie fibrant et cofibrant : il existe en effet des factorisations

$$\begin{tikzcd}
& X'' \arrow[dr, two heads, "\sim"] & & \\
\varnothing \arrow[ur, tail] \arrow[rr, tail, two heads] & & X' \arrow[dr, two heads] & \\
& X \arrow[ur, tail, "\sim"] \arrow[rr, tail, two heads] & & *
\end{tikzcd}$$

où les flèches $\rightarrowtail$ (resp. $\twoheadrightarrow$) représentent des cofibrations (resp. fibrations) et le symbole $\sim$ indique une équivalence faible. Les flèches du diagramme commutatif existent d'après l'axiome (M2). Ainsi, X'' à la fois fibrant et cofibrant et X lui est faiblement équivalent (*i.e.* isomorphe dans la catégorie localisée).

Ce résultat constitue l'argument final de la preuve de Quillen. Le point le plus intéressant bien sûr est de construire la relation d'équivalence sur les flèches de $\mathscr{C}_{cf}$.

Ainsi, dans la situation du théorème de Quillen, la catégorie $\mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ est bien définie même si l'on utilise l'axiomatique de Bernays-Godel. De plus, si $\mathscr{C}$ est une catégorie U-petite pour un univers U, la catégorie localisée $\mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ est encore U-petite.

Définition VII.1.12. — Étant donnée les notations du théorème précédent, on note $\mathrm{Ho}(\mathscr{C})$ la catégorie localisée $\mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]$, et on l'appelle la *catégorie homotopique* associée à $\mathscr{C}$.

Exemple VII.1.13. —

1. Dans le cas de la catégorie des espaces topologiques, les objets fibrants et cofibrants sont les CW-complexes et on peut prendre pour la relation d'équivalence du théorème précédent la relation d'équivalence d'homotopie habituelle.
2. Dans le cas des complexes en degrés positifs, les objets fibrants et cofibrants sont les complexes qui sont degrés par degrés projectifs. Le fait que tout complexe $C_\bullet$ est quasi-isomorphe à un objet fibrant et cofibrant se traduit en algèbre homologique classique sous le terme de résolution projective de $C_\bullet$.

   Pour la relation d'équivalence sur les complexes projectivement fibrants (et donc aussi cofibrants) du théorème ci-dessus, on peut prendre la relation d'équivalence d'homotopie pour les complexes.

   La catégorie homotopique associée est appelée la *catégorie dérivée bornée inférieurement* de la catégorie des groupes abéliens.

Remarque VII.1.14. — L'axiomatique de Quillen généralise un sujet très classique, élaboré dans la première moitiée du XXème siècle, l'*algèbre homologique*, qui ultimement étudie la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne$\mathscr{A}$, soit la catégorie des complexes de $\mathscr{A}$ localisée par rapport aux quasi-isomorphismes — c'est la formulation de Grothendieck.

La catégorie $\mathbb{H}$ des espaces topologiques localisée par rapport aux équivalences faibles est la version dite *non abélienne* de l'algèbre homologique. Quillen parlait d'*algèbre homotopique.*

VII.1.b. Définition des spectres. — Nous avons déjà vu l'exemple d'un spectre grâce aux espaces d'Eilenberg-Mac Lane (cf. Paragraphe V.2.15). On introduit donc la définition formelle suivante, centrale dans ce cours.

Définition VII.1.15. — Un *spectre* E est la donnée d'une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de CW-complexes pointés et d'une suite de morphismes pointés :

$$\sigma_n : \Sigma E_n \longrightarrow E_{n+1},$$

appelés *morphismes de suspension.*

Un morphisme de spectres $f : E \to F$ est une suite de morphismes pointés $(f_n : E_n \to F_n)_{n\geq 0}$ compatibles aux morphismes de suspension, ce que l'on traduit par les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \Sigma E_n \arrow[r, "\sigma_n^E"] \arrow[d, "\Sigma f_n"'] & E_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\ \Sigma F_n \arrow[r, "\sigma_n^F"] & F_{n+1} \end{tikzcd}$$

On notera $\mathscr{S}p$ la catégorie des spectres.

Exemple VII.1.16. — 1. Soit X un CW-complexe pointé. On lui associe un spectre, note $\Sigma^\infty X$ avec la suite $(\Sigma^n X)_{n\geq 0}$ munie des morphismes de suspension évidents :

$$\sigma_n : \Sigma\Sigma^n X = \Sigma^{n+1} \wedge X.$$

On l'appelle le spectre des *suspensions infinies* de X.

2. Soit A un groupe abélien. Nous avons déjà vu (Paragraphe V.2.15) que la suite des espaces d'Eilenberg-Mac Lane $(K(A, n))_{n\geq 0}$ forme un spectre noté HA, le spectre d'Eilenberg-Mac Lane à coefficients dans A.

Comme pour les espaces, on associe aux spectres des groupes d'homotopie :

Définition VII.1.17. — Soit E un spectre et $n \in \mathbb{Z}$ un entier. On définit le n-ème groupe d'homotopie de E comme le groupe abélien suivant :

$$\pi_n(E) = \varinjlim_{i\geq \max(0,-n)} \pi_{n+i}(E_i)$$

où i est un entier suffisament grand pour que le terme apparaissant dans la limite inductive soit défini, et les morphismes de transition de la limite inductive sont donnés par la composé suivante :

$$\pi_{n+i}(E_i) = [S^{n+i}, E_i] \xrightarrow{\Sigma} [S^{n+i+1}, \Sigma E_i] \xrightarrow{\sigma_{i*}} [S^{n+i+1}, E_{i+1}] = \pi_{n+i+1}(E_{i+1}).$$

Il est clair que les groupes d'homotopie des spectres sont fonctoriels covariants.

Exemple VII.1.18. — 1. Soit X un espace pointé et $\Sigma^\infty X$ le spectre des suspensions infinies de X. Alors, par définition, $\pi_n\big(\Sigma^\infty X\big)$ est le *n-ème groupe d'homotopie stable* de X définit en III.2.27. Notons que du fait qu'un CW-complexe n'ayant que des cellules de dimension supérieure à n n'a pas de groupes d'homotopie en degré $< n$ (Cor. III.2.16), on déduit que pour tout entier $n < 0$,

$$\pi_n\big(\Sigma^\infty X\big) = 0.$$

2. Étant donné un groupe abélien A, on déduit facilement de la définition des espaces d'Eilenberg-Mac Lane (cf. Deféfinition V.2.14 jointe à V.2.1) le calcul suivant :

$$\pi_i(HA) = \begin{cases} A & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une notion importante pour les spectres est la suivante :

Définition VII.1.19. — Un spectre E est appelé un Ω-spectre si pour tout $n \geq 0$, le morphisme obtenu par adjonction à partir des morphismes de suspension :

$$\omega_n : E_n \to \Omega(E_{n+1})$$

est une équivalence faible.

Pour les Ω-spectres, il est facile de calculer les groupes d'homotopie.

Lemme VII.1.20. — *Soit E un Ω-spectres.*
Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$\pi_n(E) = \begin{cases} \pi_0(E_n) & si\ n \geq 0, \\ \pi_0(E_{-n}) & si\ n < 0. \end{cases}$$

Démonstration. — Avec les notations de la définition, précédente, on peut exprimer un morphisme de transition de la tour qui permet de calculer le groupe d'homotopie $\pi_n(E)$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} {[S^{n+i}, E_i]} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[rrd, "\omega_{n*}"'] & {[S^{n+i+1}, \Sigma E_i]} \arrow[r, "\sigma_{n*}"] & {[S^{n+i+1}, E_{i+1}]} \arrow[d, "\sim"] \\ & & {[S^{n+i}, \Omega E_{i+1}].} \end{tikzcd}$$

Ainsi, ce morphismes de transition est un isomorphisme et la limite inductive de la tour est isomorphe à l'un quelconque des éléments de la tour. Le lemme en résulte. □

Sur le modèle de la catégorie homotopique — compte tenu du théorème de Whitehead, Th. V.1.11) qui pour les CW-complexe compare les équivalences d'homotopies aux équivalences faibles — on introduit la définition suivante :

Définition VII.1.21. — Un morphisme $f : E \to F$ de spectres est appelée une *equivalence faible* si pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme induit

$$f_* : \pi_n(E) \to \pi_n(F)$$

est un isomorphisme.

On définit la *catégorie homotopique stable* $\mathscr{SH}$ comme la catégorie des spectres $\mathscr{S}p$ localisée par rapport aux équivalences faibles. Si E et F sont des spectres, on pose

$$[E, F] = \mathrm{Hom}_{\mathscr{SH}}(E, F).$$

Notons que cette définition s'accompagne naturellement du théorème suivant :

Théorème VII.1.22. — *Il existe sur la catégorie des spectres une structure de catégorie de modèles dont les équivalences faibles sont les morphismes définis ci-dessus, et les fibrations sont les morphismes de spectres $(f_n)_{n\geq 0}$ tels que pour tout $n \geq 0$, f_n est une fibration de fibre F_n telle que $(F_n)_{n\geq 0}$ est un Ω-spectre.*

Ce théorème est due initialement à Bousfield et Friedlander (1978). On en trouve une démonstration moderne dans [**?**]. On notera en particulier que pour cette structure de catégorie de modèles, les spectres fibrants sont exactement les Ω-spectres. En particulier, un corollaire du théorème est le résultat suivant : pour tout spectre E, il existe une cofibration triviale :

$$i : E \to E'$$

tel que E' est un Ω-spectre — axiome (M2) des catégories de modèles, Définition VII.1.5.

VII.1.c. Propriété universelle. —

VII.1.23. — D'après le premier point de l'Exemple VII.1.16, il existe un foncteur :

$$\Sigma^\infty : \mathscr{T}op_* \to \mathscr{S}p.$$

Par définition, ce foncteur transforme équivalence faible en équivalences faibles — une équivalence d'homotopie $f : X \to Y$ induit en particulier une équivalence d'homotopie stable, par définition (voir la Définition III.2.27 ou la remarque qui suit cette définition).

Il induit donc un foncteur canonique (compte tenu de la présentation V.1.15 de la catégorie homotopique) :

$$\Sigma^\infty : \mathscr{H}_* \to \mathscr{SH}$$

d'après la propriété universelle des catégories localisées.

Remarque VII.1.24. — Il est moins évident, mais néanmoins vrai que le foncteur Σ^∞ admet un adjoint à droite Ω^∞, définit comme suit. Pour un spectre E, on choisit une résolution $i : E \to E'$ telle que i est une cofibration triaviale et E' un Ω-spectre. Alors,

$$\Omega^\infty(E) = E'_0. \tag{VII.1}$$

Une autre formule pour ce type d'homotopie est la suivante :

$$\Omega^\infty(E) = \varinjlim_{n\geq 0} \big(\Omega^n E_n\big) \tag{VII.2}$$

où les morphismes de transition sont induits par les morphismes $\omega_n : E_n \to \Omega E_{n+1}$ adjoints aux morphismes de suspension.

Ceci justifie la notation, et le nom du foncteur Ω^∞, foncteur des *lacets infinis*. Cette notion est particulièrement pertinente lorsqu'on considère l'espace

$$\Omega^\infty \, \Sigma^\infty(X) = \varinjlim_{n\geq 0} \big(\Omega^n \Sigma^n X\big)$$

pour un espace pointé X.

On en déduit une manière de calculer certains morphismes dans la catégorie homotopique stable :

Proposition VII.1.25. — *Soit X un espace pointé et E un spectre.*

1. *Si E est un Ω-spectre, alors :*

$$[\Sigma^\infty X, E] = [X, E_0].$$

2. *Si X est compact, alors, pour tout entier $n \geq 0$,*

$$[\Sigma^\infty X, E] = \varinjlim_{i\geq 0} \, [S^i \wedge X, E_i]$$

où les morphismes de transition sont donnés par la construction suivante :

$$[S^i \wedge X, E_i] \xrightarrow{\Sigma} [S^{i+1} \wedge X, \Sigma E_i] \xrightarrow{\sigma_{i*}} [S^{i+1} \wedge X, E_{i+1}].$$

En effet, on applique simplement l'adjonction : $[\Sigma^\infty X, E] = [X, \Omega^\infty E]$. Les deux calculs résultent donc repsectivement des formules (VII.1) et (VII.2).

VII.1.26. — On peut décaler de deux manières un spectre E. On pose ainsi, pour tout entier $n \geq 0$:

$$(\Sigma E)_n = E_{n+1},$$

$$(\Sigma^{-1} E)_n = \begin{cases} E_{n-1} & \text{si } n > 0 \\ * & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les morphismes de suspensions sur ces spectres décalés sont induits par ceux de E.

On notera que si E est un Ω-spectre, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\pi_n(\Sigma E) &= \pi_{n-1}(E),\\ \pi_n(\Sigma^{-1}E) &= \pi_{n+1}(E).\end{aligned}\tag{VII.3}$$

Proposition VII.1.27. — *Les foncteurs Σ et Σ^{-1} définit ci-dessus, induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre :*

$$\Sigma : \mathscr{SH} \leftrightarrows \mathscr{SH} : \Sigma^{-1}.$$

De plus, pour tout espace pointé X, il existe une équivalence faible canonique :

$$\Sigma^\infty(\Sigma X) \xrightarrow{\sim} \Sigma\big(\Sigma^\infty(X)\big).$$

Démonstration. — La première partie est évidente : d'après la structure de catégorie de modèles du théorème VII.1.22, la catégorie $\mathscr{SH}$ est encore la catégorie obtenue à partir des Ω-spectres en inversant les équivalences faibles. Or, sur les Ω-spectres, les foncteurs

Or il est clair que les foncteurs Σ et Σ^{-1} respectent les équivalences faibles entre d'après les isomorphismes (VII.3). Il induisent donc des endofoncteurs de la catgorie $\mathscr{SH}$. Pour montrer que ce sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, on remarque tout d'abord qu'il existe des flèches canoniques et fontorielles en un spectre E :

$$\begin{aligned}\Sigma\Sigma^{-1}E &\to E\\ E &\to \Sigma^{-1}\Sigma E.\end{aligned}$$

Si E est un Ω-spectre, il résulte immédiatement des isomorphismes (VII.3) que ces morphismes sont des équivalences faibles et cela conclut.

Le dernier point est évident compte tenu des définitions. □

À l'aide de la théorie des catégories de modèles, on peut démontrer le résultat suivant, que j'énonce sous une forme imprécise , la forme précise est contenue dans les commentaires et la remarque :

***Théorème VII.1.28* (Hovey)**. — *La catégorie homotopique $\mathscr{SH}$ — plutôt la catégorie de modèle $\mathscr{S}p$ du théorème VII.1.22 — est la catégorie homotopique universelle munie d'un endofoncteur Σ qui est une équivalence de catégories et d'un foncteur entre catégorie homotopiques — d'un foncteur* dérivable *$\mathscr{T}op_* \to \mathscr{S}p$ —*

$$\Sigma^\infty : \mathscr{T}op_* \to \mathscr{SH}$$

qui commute à Σ.

Ainsi, la catégorie $\mathscr{SH}$ est obtenu en inversant formellement le foncteur de suspension Σ.

Remarque VII.1.29. — Pour que ce théorème soit précis, il faut considérer les foncteurs entre catégories de modèles qui induisent un foncteur sur les catégories homotopiques associées (on dit : dérivable à gauche, ou plutôt de Quillen à gauche) et considérer les catégories de modèles à équivalence près : on identifie deux catégories de modèles qui donne la même catégorie homotopique.

Définition VII.1.30. — Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note Σ^n la puissance n-ème de l'automorphisme Σ de $\mathscr{SH}$.

Il est commode de poser : $S^n = \Sigma^n S^0$, vu comme un objet de $\mathscr{SH}$.

Pour tout spectre E et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, l'isomorphisme suivant résulte immédiatement du lemme VII.1.20 et des définitions :

$$[S^n, E] = \pi_n(E).$$

Par ailleurs, on obtient finalement le lien entre les spectres de Spanier-Whitehead et les spectres définis ici :

Proposition VII.1.31. — *Il existe un unique foncteur pleinement fidèle*

$$\mathscr{SH}_f \to \mathscr{SH}$$

qui à un spectre de Spanier-Whitehead (X, n) *associe le spectre* $\Sigma^n \Sigma^\infty(X)$.

En effet, cela résulte de la définition des morphismes dans la catégorie des spectres de Spanier-Whitehead et du point 2 de la proposition VII.1.25.

VII.1.d. Propriétés supplémentaires. —

VII.1.32. — Rappelons que la catégorie homotopique $\mathscr{T}op_*$ admet un smash-produit $\wedge$ et un espace de fonctions map vérifiant la propriété suivante :

$$[X \wedge Y, Z] = [X, \mathrm{map}_*(Y, Z)].$$

De plus, pour tout morphisme $f : X \to Y$ d'espaces pointés, on dispose d'une suite homotopiquement coexacte (cf. IV.3.8) :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\pi} \Sigma X$$

Ces propriétés s'étendent à la catégorie homotopique stable comme suit.

Théorème VII.1.33. —

1. *Il existe un unique smash-produit sur la catégorie* $\mathscr{SH}$ *tel que pour tous espaces pointés* X *et* Y,

$$\Sigma^\infty X \wedge \Sigma^\infty Y = \Sigma^\infty(X \wedge Y),$$

et admettant un espace de fonctions, $\mathrm{map}(F, G)$ *fonctoriel en les spectres* F *et* G *:*

$$[E \wedge F, G] = [E, \mathrm{map}(F, G)].$$

2. *La catégorie* $\mathscr{SH}$ *admet une unique structure triangulée (cf. Definition IV.3.12) telle pour tout morphisme* $f : X \to Y$*, la suite suivante est un triangle distingué :*

$$\Sigma^\infty X \xrightarrow{\Sigma^\infty f} \Sigma^\infty Y \xrightarrow{\Sigma^\infty i} \Sigma^\infty C(f) \xrightarrow{\Sigma^\infty \pi} \Sigma(\Sigma^\infty X).$$

On remarquera en particulier que l'unicité du smash-produit implique que pour tout spectres E et F, il existe un isomorphisme :

$$E \wedge F \xrightarrow{\sim} F \wedge E \qquad \text{(VII.4)}$$

fonctoriel en E et F — car c'est vrai pour les espaces pointés. On dit que le smash-produit est *symmétrique.*

VII.1.34. — *Indications de preuve.*– Ce théorème a mis plusieurs années à voir le jour sous cette forme générale. Notamment, la construction du smash-produit sur les spectres a été un problème qui a mobilisé les forces des topologues pendant près de toute la deuxième moitié du XXème siècle.

Pour construire le smash-produit, on doit modifier la définition des spectres de manière à obtenir un smash-produit, sans passer à la catégorie homotopique dans un premier temps, qui soit symmétrique. On utilise pour cela la catégorie des *spectres symmétriques.* On renvoie le lecteur à l'article [**?**] pour cette construction.

Pour la structure triangulée, cela résulte de la construction — en particulier du fait que le foncteur Σ est inversible. On renvoie le lecteur au chapitre 7 du livre [**Hov99**].

Exemple VII.1.35. — Rappelons qu'on a définit (Paragraphe III.2.25) les groupes d'homotopie stables des sphères par la formule :

$$\pi_n^S(S^0) = \varinjlim_{i\to\infty} \pi_{n+i}(S^i).$$

Donc par définition,

$$\pi_n^S(S^0) = [\Sigma^n\Sigma^\infty S^0, \Sigma^\infty S^0].$$

On déduit du théorème précédent une structure d'algèbre sur $\pi_*^S(S^0)$. Si l'on considère des classes d'homotopie stables :

$$a : \Sigma^n\Sigma^\infty S^0 \to \Sigma^\infty S^0,$$
$$b : \Sigma^m\Sigma^\infty S^0 \to \Sigma^\infty S^0,$$

on peut en effet définir leur produit $a \cup b$ par la formule :

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^n\Sigma^\infty S^0 \wedge \Sigma^m\Sigma^\infty S^0 \arrow[r, "a\wedge b"] \arrow[d, "\sim"'] & \Sigma^\infty S^0 \wedge \Sigma^\infty S^0 \arrow[d, "\sim"] \\
\Sigma^{n+m}\Sigma^\infty S^0 \arrow[r, "a\cup b"] & \Sigma^\infty S^0.
\end{tikzcd}$$

Mentionnons le théorème de nilpotence suivant dû à Nishida.

***Théorème VII.1.36* (Nishida, 1973)**. — *Toute classe d'homotopie stable $a \in \pi_n^S(S^0)$ est nilpotente : il existe un entier $n \geq 0$ tel que $a^n = 0$.*

VII.2. Théories cohomologiques

VII.2.a. Propriétés homotopiques et représentabilité. —

Définition VII.2.1. — Soit E un spectre, X un espace pointé et $n \in \mathbb{Z}$ un entier. On définit la cohomologie de X à coefficients dans E en degré n par la formule :

$$E^n(X) = [\Sigma^\infty X, \Sigma^n E].$$

On définit l'homologie de X à coefficients dans E en degré n par la formule :

$$E_n(X) = [S^n, \Sigma^\infty X \wedge E].$$

Il est clair que la cohomologie est contravariante et l'homologie est covariante.

Exemple VII.2.2. — 1. La théorie homologique associée à S^0 est donéne par les groupes d'homotopie stable : $(S^0)_n(X) = \pi_n^S(X)$.

2. Soit A un groupe abélien. Nous avons déjà vu (Corollaire V.2.17) que la théorie cohomologique associée au spectra d''Eilenberg-Mac Lane HA est la cohomologie singulière (réduite) à coefficients dans A.

   De même, la théorie homologique associée à HA est l'homologie singulière réduite : pour tout espace pointé X, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel :

$$\tilde{H}_n^{sing}(X, A) \xrightarrow{\sim} (HA)_n(X) = [S^n, \Sigma^\infty X \wedge HA].$$

Le deuxième point de l'exemple précédent résulte du calcul de la cohomologie (resp. homologie) associée à un CW-complexe si elle est ordinaire (théorème d'Eilenberg-Steenrod). Pour appliquer ce théorème, on a besoin des propriétés suivantes des théories homologiques/cohomologiques associée à un spectre.

Théorème VII.2.3. — *Soit E un spectre et E^* (resp. E_*) la théorie cohomologique (resp. homologique) associée. Alors les propriétés suivantes sont vraies :*

1. Homotopy.– *si* $f : X \to Y$ *est une équivalence d'homotopie faible, alors* $f^* : E^*(Y) \to E^*(X)$ *(resp.* $f_* : E_*(X) \to E_*(Y)$*) est un isomorphisme.*
2. Suspension.– *il existe un isomorphisme fonctoriel en* X *:*
$$E^n(\Sigma X) \xrightarrow{\sim} E^{n-1}(X)$$
$$E_n(\Sigma X) \xrightarrow{\sim} E_{n-1}(X).$$
3. Additivité.– *si* $(X_i)_{i\in I}$ *est une famille d'espaces pointés, le morphismes canonique :*
$$E^*(\vee_{i\in I}X_i) \to \prod_{i\in I} E^*(X_i) \qquad \textit{resp.} \ \bigoplus_{i\in I} E_*(X_i) \to E_*(\vee_{i\in I}X_i)$$
est un isomorphisme.
4. Excision et exactitude.– *pour toute cofibration* $f : A \to X$*, la suite suivante est exacte :*
$$E^n(X/A) \xrightarrow{\pi(f)^*} E^n(X) \xrightarrow{f^*} E^n(A) \xrightarrow{i(f)^*} E^{n+1}(X/A)$$
$$\textit{resp.} \ E_n(A) \xrightarrow{f_*} E_n(X) \xrightarrow{\pi(f)_*} E_n(X/A) \xrightarrow{i(f)_*} E_{n-1}(A).$$

Démonstration. — L'assertion 1 est claire et l'assertion 2 résulte de la proposition VII.1.27. L'assertion 3 est une conséquence de la proposition VII.1.25, et de la commutation des groupes d'homotopie aux sommes (qui résulte du fait que S^n est compacte). L'assertion 4 est contenue dans le théorème VII.1.33, car dans une catégorie triangulée $\mathscr{T}$, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(-, L)$ (resp $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(K, -)$ transforme triangles distingués en suites exactes longues. □

Il existe une réciproque au théorème précédent dans le sens suivant.

***Théorème VII.2.4* (Brown).** — *Soit* $\tilde{H}^* : (\mathscr{T}op_*)^{op} \to \mathscr{A}b^{\mathbb{Z}}$ *un foncteur* $\mathbb{Z}$*-gradué contravariant à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens.*

On suppose que E^* *vérifie les propriétés 1 à 4 du théorème précédent. Alors, il existe un unique spectre* E *muni et un isomorphisme naturel en* X *:*

$$\tilde{H}^n(X) \xrightarrow{\sim} E^n(X) = [\Sigma^\infty X, \Sigma^n E]. \tag{VII.5}$$

On dit que E représente la théorie cohomologique (réduite) $\tilde{H}^*$.

Indication de preuve. — La preuve utilise les mêmes ingrédients que la construction des espaces d'Eilenberg Mac-Lane. On commence par montrer qu'il existe un CW-complexe E_n tel que $\tilde{H}^n(X) = [X, E_n]$ pour tout CW-complexe X, en utilisant la méhtode du recollement des cellules (on s'appuie sur les propriétés 1, 3 et 4 pour cela). Alors, E_n est caractérisé de manière unique et la propriété de suspension implique qu'il existe une équivalence d'homotopie :

$$E_n \xrightarrow{\omega_n} \Omega(E_{n+1})$$

ce qui donne par adjonction les morphismes de suspensions du spectre E. C'est alors un Ω-spectre et l'isomorphisme (VII.5) résulte de la construction des E_n et du calcul de la proposition VII.1.25.

Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [**Swi75**, chap. 9]. □

VII.2.5. — La catégorie homotopique stable est donc essentiellement la catégorie des théorie cohomologiques satisfaisant de bonnes propriétés (1 à 4 ci-dessus). un point important de l'existence de cette catégorie est qu'elle permet de construire de nouvelles théories cohomologiques/homologiqes, que l'on appelle en général théories cohomologiques/homologiques généralisées, lorsqu'elles ne satisfont par l'axiome des dimensions, c'est-à-dire, lorsque le groupe abélien gradué

$$E^*(S^0) = E_{-*}(S^0).$$

n'est pas concentré en degré 0.

VII.2.b. Produits. — La définition suivante est centrale en homotopie stable.

Définition VII.2.6. — Un *spectre en anneaux* est la donnée d'un spectre et de morphismes
- *Unité.–* $\eta : S^0 \to E$,
- *Multiplication.–* $\mu : E \wedge E \to E$

satisfaisant les axiomes suivants [(2)] exprimés par les diagrammes commutatifs suivants :

neutre
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "(\eta,1_E)"] \arrow[dr, equal] & E \wedge E \arrow[d, "\mu"] & E \arrow[l, "(1_E,\eta)"'] \arrow[dl, equal] \\ & E & \end{tikzcd}$$

associativité
$$\begin{tikzcd} E \wedge E \wedge E \arrow[r, "\mu\wedge 1_E"] \arrow[d, "1_E\wedge\mu"'] & E \wedge E \arrow[d, "\mu"] \\ E \wedge E \arrow[r, "\mu"] & E \end{tikzcd}$$

inverse
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "(1_E,\nu)"] \arrow[dr, equal] & E \wedge E \arrow[d, "\mu"] & E \arrow[l, "(\nu,1_E)"'] \arrow[dl, equal] \\ & E & \end{tikzcd}$$

On dira que (E, η, μ) est commutatif si par ailleurs, il vérifie l'axiome du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E \wedge E \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\mu"'] & & E \wedge E \arrow[dl, "\mu"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

où le morphismes vertical est l'isomorphisme de symmétrie (VII.4) dans le cas particulier $E = F$.

Dans la suite du cours, tous les spectres en anneaux seront commutatifs et nous dirons donc simplement « spectre en anneaux » pour « spectre en anneaux commutatif ».

Exemple VII.2.7. — Le spectre S^0 a une structure de spectres en anneaux évidente.

On peut construire sur les espaces d'Eilenberg-Mac Lane un produit

$$K(A, n) \wedge K(A, m) \xrightarrow{\mu} K(A, n + m)$$

qui induit une structure de spectres en anneax sur le spectre HA. On fera attention que les axiomes des spectres en anneaux sont vérifiés pour HA uniquement dans la catégorie $\mathscr{SH}$, c'est-à-dire à équivalence faible près — si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre, on peut toutefois trouver un modèle tels que les diagrammes ci-dessus soient commutatifs au sens fort.

Définition VII.2.8. — Soit E un spectre en anneau. On peut définir les produits suivants :

1. *Cup-produit.–* pour tout $x, y \in E^n(X) \times E^m(X)$, on définit le cup-produit de x et y comme la classe de cohomologie $x \cup y \in E^{n+m}(X)$ définie par la composition suivante
$$\Sigma^\infty X \xrightarrow{\delta} \Sigma^\infty X \wedge \Sigma^\infty X \xrightarrow{x\wedge y} \Sigma^n E \wedge \Sigma^m E = \Sigma^{n+m} E \wedge E \xrightarrow{\mu} \Sigma^{n+m} E$$
où δ est induit par l'application diagonale $X \to X \wedge X$.
2. *Cap-produit.–* pour tout $x, y \in E^n(X) \times E_m(X)$, on définit le cap-produit de x et y comme la classe d'homologie $x \cap y \in E_{m-n}(X)$ définie par la composition suivante :
$$S^{m-n} \xrightarrow{\Sigma^{-n} y} \Sigma^{-n}\Sigma^\infty X \wedge E \xrightarrow{\Sigma^{-n} x \wedge 1_E} \Sigma^\infty X \wedge E \wedge E \xrightarrow{1\wedge\mu} \Sigma^\infty X \wedge E.$$

En particulier, le groupe abélien gradué $E^*(S^0)$ à une structure d'anneau. On le note simplement E^* et on l'appelle l'*anneau de coefficients* de E.

De manière évidente, $E^n(S^0) = E_{-n}(S^0)$. Pour cette raison, on utilisera aussi la convention *homologique* pour la numérotation de la graduation de l'anneau de coefficients, suivant la règle : $E_n = E^{-n}$.

2. Rappelons que nous avons déjà rencontrés ces axiomes dans le cours sur les H-groupes (cf. §II.1.1) ;

On notera que pour tout espace pointé X, $E^*(X)$ est une E^*-algèbre graduée. Par ailleurs, on peut vérifier facilement que le cap-produit induit sur $E_*(X)$ un structure de E^*-module gradué :

$$E^n \otimes E_m(X) \to E_{m-n}(X).$$

Remarque VII.2.9. — On peut reformuler la terminologie déjà vue précédemment : une théorie cohomologique munie de produits — plutôt : un spectre en anneaux — est dite *ordinaire* si son anneau de coefficients est concentré dans la graduation de degré 0. Elle est dite *généralisée* dans le cas contraire.

Notons que les groupes de cohomotopie stables :

$$\pi^n(X) = [\Sigma^\infty X, S^n]$$

représenté par le spectre en anneaux S^0, forment une théorie cohomologique généralisée.

Références

[GZ67] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*, volume 35 of *Ergebnisse der Mathematik*. Springer-Verlag, 1967.

[Hov99] M. Hovey. *Model Categories*, volume 63 of *Math. surveys and monographs*. Amer. Math. Soc., 1999.

[Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[Swi75] Robert M. Switzer. *Algebraic topology—homotopy and homology*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 212.

---

deuxième semestre 2015/2016

Frédéric Déglise, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* `frederic.deglise@ens-lyon.fr`
Url : `http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/`