Faisceaux en groupes fortement $\mathbb{A}^1$-invariants

Raphaël Ruimy

25 octobre et 15 novembre 2019

Le but de cet exposé est de présenter la partie 2.2 du livre de Fabien Morel [Mor12]. Cette partie étudie les faisceaux non-ramifiés et donne en particulier une condition suffisante pour qu'un faisceau en groupes non-ramifié soit $\mathbb{A}^1$-invariant.

Soit k un corps que l'on ne suppose pas nécessairement parfait.

Si on ne précise rien, un faisceau est un faisceau pour la topologie de Nisnevich sur Sm_k.

Un faisceau en groupes est *non-ramifié* si le faisceau d'ensembles sous-jacent l'est (au sens de l'exposé précédent).

On rappelle qu'un faisceau en groupes $\mathscr{G}$ est *fortement $\mathbb{A}^1$-invariant* si pour tout X lisse sur k, les applications induites pour $i = 1, 2$ par la projection $\mathbb{A}^1_X \to X$

$$H^i_{Nis}(X, \mathscr{G}) \to H^i_{Nis}(\mathbb{A}^1_X, \mathscr{G})$$

sont des bijections.

On commence par quelques définitions préliminaires.

Définition 1. *Soit $(E_i, *_i)$ une famille d'ensemble pointés, alors le* produit faible *des E_i est*

$$\prod{}' E_i = \left\{ (e_i) \in \prod E_i \ / \ e_i = *_i \text{ sauf pour un ensemble fini de } i \right\}.$$

Définition 2. *Soit G un groupe, $H < G$ un sous-groupe, $(E, *_E)$ et $(F, *_F)$ des ensembles pointés tels que E est muni d'une action de G et donc de la flèche*

$$\begin{aligned} G &\to E \\ g &\mapsto g \cdot *_E \end{aligned}$$

et F est muni de l'action triviale.

On note $G \Rightarrow E$ la flèche et l'action de G dans E.

On dit que la suite

$$1 \to H \to G \Rightarrow E$$

est exacte *si le sous-groupe d'isotropie de l'action de G sur E est H.*

Si de plus on a une application G-équivariante d'ensembles pointés

$$(E, *_E) \to (F, *_F)$$

dont le noyau est l'orbite du point base de E sous l'action de G, on dit que

$$1 \to H \to G \Rightarrow E \to F$$

est exacte.

Enfin, si de plus, $E \to F$ induit une injection $G \backslash E \to F$, on dit que la suite est fortement exacte.

Proposition 3. *Soit $(\mathscr{C}, \mathscr{T})$ un site, et*

$$1 \to \mathscr{H} \to \mathscr{G} \Rightarrow \mathscr{E} \to *$$

une suite exacte de fasceaux au sens où $\mathscr{G}$ est un faisceau en groupes, $\mathscr{H}$ est un sous-faisceau en groupes, $(\mathscr{E}, *_E)$ est un faisceau d'ensembles pointés tels que $\mathscr{E}$ est muni d'une action de $\mathscr{G}$, et localement la suite est exacte au sens précédent.

Alors, on a une suite exacte longue

$$1 \to \mathscr{H}(X) \to \mathscr{G}(X) \Rightarrow \mathscr{E}(X) \to H^1_{\mathscr{T}}(X, \mathscr{H}) \to H^1_{\mathscr{T}}(X, \mathscr{G}).$$

Démonstration. [Gir66, p. 3.2.2] □

Définition 4. *Soit donc $\mathscr{G}$ un faisceau de groupes non-ramifié. Pour toute valuation discrète, v sur $F \in \mathscr{F}_k$, on pose*

$$H^1(\mathscr{O}_v, \mathscr{G}) := \mathscr{G}(F)/\mathscr{G}(\mathscr{O}_v).$$

Remarquons que cet ensemble pointé est muni d'une action à gauche de $\mathscr{G}(F)$.

Plus généralement, si X est essentiellement lisse sur k, on pose

$$H^1_y(X, \mathscr{G}) := H^1(\mathscr{O}_{X,y}, \mathscr{G}).$$

Par l'axiome (**A2**), si X est irréductible de corps des fonctions $\mathscr{G}(F)$, l'action à gauche de $\mathscr{G}(F)$ sur $\prod_{y \in X^{(1)}} H^1_y(X, \mathscr{G})$ préserve le produit faible $\prod'_{y \in X^{(1)}} H^1_y(X, \mathscr{G})$.

De plus le sous-groupe d'isotropie du point base de $\prod'_{y \in X^{(1)}} H^1_y(X, \mathscr{G})$ sous $\mathscr{G}(F)$ est

$$\bigcap_{y \in X^{(1)}} \mathscr{G}(\mathscr{O}_{X,y}) = \mathscr{G}(X)$$

d'après l'axiome (**2**) de la définition d'un faisceau d'ensembles non-ramifié.

Par conséquent, la suite

$$1 \to \mathscr{G}(X) \to \mathscr{G}(F) \rightrightarrows \prod_{y \in X^{(1)}}' H^1_y(X, \mathscr{G})$$

est exacte.

Définition 5. *Si on ne suppose plus X irréductible, notons*

$$\mathscr{G}^{(0)}(X) := \prod_{x \in X^{(0)}}' \mathscr{G}(k(x)) = \prod_{x \in X^{(0)}} \mathscr{G}(k(x))$$

et

$$\mathscr{G}^{(1)}(X) := \prod_{y \in X^{(1)}}' H^1_y(X, \mathscr{G}).$$

Proposition 6. *$\mathscr{G}^{(0)}$ est un faisceau Nisnevich en groupes non ramifié sur Sm_k. $\mathscr{G}^{(1)}$ est un faisceau Zariski d'ensembles pointés sur Sm_k^{Sm}.*

De plus la suite

$$1 \to \mathscr{G}(X) \to \mathscr{G}^{(0)}(X) \rightrightarrows \mathscr{G}^{(1)}(X)$$

exacte pour tout X.

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ est un morphisme, $y \in Y^{(0)}$ et $x \in X^{(0)}$.

— Si $x \in f^{-1}(y)$ on a un morphisme $k(y) \to k(x)$ et donc un morphisme

$$\mathscr{G}(k(y)) \to \mathscr{G}(k(x)).$$

— si $x \notin f^{-1}(y)$, on a le morphisme trivial $\mathscr{G}(k(y)) \to \mathscr{G}(k(x))$.

D'où un morphisme de groupes

$$\mathscr{G}^{(0)}(Y) \to \mathscr{G}^{(0)}(X).$$

Ceci fait de $\mathscr{G}^{(0)}$ un préfaisceau sur Sm_k.

Le caractère non-ramifié est clair. Pour montrer que $\mathscr{G}^{(0)}$ est un faisceau on peut donc supposer X irréductible.

Alors, si

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d, "p"] \\ V \arrow[r, hook, "i"] & X \end{tikzcd}$$

est un carré Nisnevich distingué,

$$\mathscr{G}^{(0)}(X) \to \mathscr{G}^{(0)}(V) \text{ et } \mathscr{G}^{(0)}(X') \to \mathscr{G}^{(0)}(V')$$

sont des isomorphismes, donc le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}^{(0)}(V') & \longleftarrow & \mathscr{G}^{(0)}(X') \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathscr{G}^{(0)}(V) & \longleftarrow & \mathscr{G}^{(0)}(X) \end{array}$$

est cocartésien.

Passons à $\mathscr{G}^{(1)}$: soit $f : X \to Y$ lisse avec X et Y irréductibles $y \in Y^{(1)}$ et $x \in X^{(1)}$. Soit $E = k(Y)$ et $F = k(X)$, v la valuation associée à x et w celle associée à y.

— Si $x \notin f^{-1}(y)$, on a un morphisme trivial :

$$H^1_y(Y, \mathscr{G}) \to H^1_x(X, \mathscr{G}).$$

— Si $y = f(x)$, comme $\mathscr{G}$ est non-ramifié, il vérifie l'axiome (**A1**) ce qui donne par lissité de f une flèche

$$H^1_y(Y, \mathscr{G}) \to H^1_x(X, \mathscr{G}).$$

Comme dans le cas général, si on note X_α les composantes irréductibles de X, $\mathscr{G}^{(1)}(X) = \prod \mathscr{G}^{(1)}(X_\alpha)$ Ceci fait de $\mathscr{G}^{(1)}$ un préfaisceau. Le fait que c'est un faisceau Zariski est alors évident.

Enfin l'exactitude de la suite de l'énoncé découle du fait que $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}^{(0)}$ et $\mathscr{G}^{(1)}$ vérifient l'axiome (**0**) et que si X est irréductible,

$$1 \to \mathscr{G}(X) \to \mathscr{G}(k(X)) \rightrightarrows \prod_{y \in X^{(1)}}{}' H^1_y(X, \mathscr{G})$$

est exacte. □

Définition 7. *Soit X un k-schéma lisse et $z \in X^{(2)}$. On définit :*

$$H^2_z(X, \mathscr{G}) := \left\{ \textit{orbites de } \prod_{y \in X_z^{(1)}}{}' H^1_y(X, \mathscr{G}) \textit{ sous l'action de } \mathscr{G}(F) \right\}.$$

où $F = k(X_z) = \mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{X,z})$. Notons que

$$X_z^{(1)} = \{ y \in X^{(1)} / z \in \overline{y} \}.$$

On a bien sûr une flèche

$$\prod_{y\in X_z^{(1)}}{}' H_y^1(X,\mathscr{G}) \to H_z^2(X,\mathscr{G}).$$

En composant avec la projection $\prod'_{y\in X^{(1)}} H_y^1(X,\mathscr{G}) \to \prod'_{y\in X_z^{(1)}} H_y^1(X,\mathscr{G})$ et en prenant le produit de ces flèches, on en déduit une flèche canonique d'ensembles pointés

$$\prod_{y\in X^{(1)}}{}' H_y^1(X,\mathscr{G}) \to \prod_{z\in X^{(2)}} H_z^2(X,\mathscr{G})$$

On introduit à présent l'axiome (**A2′**) : la flèche canonique précédente se factorise par $\prod'_{z\in X^{(2)}} H_z^2(X,\mathscr{G})$.

Dans ce qui suit, on suppose que $\mathscr{G}$ vérifie (**A2′**).

Définition 8. *On pose si $X \in \mathrm{Sm}_k$,*

$$\mathscr{G}^{(2)}(X) := \prod_{z\in X^{(2)}}{}' H_z^2(X,\mathscr{G}).$$

On a alors un complexe

$$C^*(X,\mathscr{G}) : 1 \to \mathscr{G}(X) \to \mathscr{G}^{(0)}(X) \rightrightarrows \mathscr{G}^{(1)}(X) \to \mathscr{G}^{(2)}(X)$$

Proposition 9. *$\mathscr{G}^{(2)}$ est un faisceau Zariski sur Sm_k^{Sm}.*

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ lisse avec X et Y irréductibles $y \in Y^{(2)}$ et $x \in X^{(2)}$. Notons $i : k(Y) \to k(X)$.

— Si $x \notin f^{-1}(y)$, on a un morphisme trivial :

$$H_y^2(Y,\mathscr{G}) \to H_x^2(X,\mathscr{G}).$$

— Si $y = f(x)$, on a une flèche

$$\phi : \prod_{t\in Y_y^{(1)}}{}' H_t^1(Y,\mathscr{G}) \to \prod_{u\in X_x^{(1)}}{}' H_u^1(X,\mathscr{G})$$

Si

$$(x_t) \in \prod_{t\in Y_y^{(1)}}{}' H_t^1(Y,\mathscr{G}) \text{ et } g \in \mathscr{G}(E)$$

alors,

$$\phi(g\cdot(x_t)) = \mathscr{G}(i)(g)\cdot\phi(x_t).$$

Par conséquent, les orbites de $\displaystyle\prod_{t\in Y_y^{(1)}}{}' H_t^1(Y,\mathscr{G})$ sont envoyées dans des orbites de $\displaystyle\prod_{u\in X_x^{(1)}}{}' H_u^1(X,\mathscr{G})$.

Comme $\mathscr{G}^{(2)}$ vérifie (**0**), c'est un préfaisceau. Son caractère de faisceau Zariski est alors évident. □

Remarque 10. *Si X est local et essentiellement lisse de dimension $\leqslant 2$, alors $C^*(X,\mathscr{G})$ est fortement exact.*

En effet dans ce cas, soit z le point fermé de X,

$$\mathscr{G}^{(2)}(X) = H_z^2(X,\mathscr{G})$$

qui est par définition l'ensemble des orbites de l'action $\mathscr{G}^{(0)}(X) \Rightarrow \mathscr{G}^{(1)}(X)$.

Définition 11. *Soit $\mathscr{Z}^1(-,\mathscr{G})$ le faisceautisé du préfaisceau orbite du point base de $\mathscr{G}^{(1)}$ sous l'action de $\mathscr{G}^{(0)}$ pour la topologie de Zariski sur Sm_k^{Sm}.*

On a donc une suite exacte de préfaisceaux

$$1 \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)} \Rightarrow \mathscr{Z}^1(-,\mathscr{G}) \to *$$

Par la proposition 3 et comme $\mathscr{G}^{(0)}$ est flasque, cela donne la suite fortement exacte :

$$1 \to \mathscr{G}(X) \to \mathscr{G}^{(0)}(X) \Rightarrow \mathscr{Z}^1(X,\mathscr{G}) \to H^1_{Zar}(X,\mathscr{G}) \to *.$$

Remarque 12. *En passant aux colimites filtrantes on voit que tout ce qui précède s'adapte au cas essentiellement lisse.*

Remarque 13. *Si X est essentiellement lisse de dimension au plus 1,*

$$\mathscr{Z}^1(X,\mathscr{G}) = \mathscr{G}^{(1)}(X)$$

car c'est le cas pour X local et donc pour tout X comme $\mathscr{Z}^1(-,\mathscr{G})$ et $\mathscr{G}^{(1)}$ sont des faisceaux.

Par conséquent,

$$H^1_{Zar}(X,\mathscr{G}) = \mathscr{G}^{(0)}(X)\backslash\mathscr{G}^{(1)}(X).$$

Cette correspondance est bien sûr fonctorielle en les tels X.

Puis si (X,z) est local essentiellement lisse de dimension 2, soit $V = X\setminus\{z\}$, alors, par la remarque 10 on obtient la bijection fonctorielle en (X,z) :

$$H_z^2(X,\mathscr{G}) = H^1_{Zar}(V,\mathscr{G}).$$

Définition 14. *Soit X essentiellement lisse sur k, on note*

$$\mathscr{K}^1(-,\mathscr{G}) = \mathrm{Ker}(\mathscr{G}^{(1)} \to \mathscr{G}^{(2)}).$$

C'est un faisceau Zariski sur Sm_k^{Sm}. On a un monomorphisme évident

$$\mathscr{Z}^1(-,\mathscr{G}) \to \mathscr{K}^1(-,\mathscr{G})$$

qui induit un isomorphisme sur les k-schémas essentiellement lisse de dimension au plus 2 par la remarque 10.

On peut se demander à quelle condition $\mathscr{K}^1(-,\mathscr{G})$ est un faisceau Nisnevich. C'est en fait équivalent à l'axiome (**A5**) suivant.

(**A5**)

(i) Pour toute extension finie séparable F/E d'éléments de $\mathscr{F}_k$ et toute valuation discrète v sur F, telle que si l'on note w la restriction de v à E, l'indice de ramification $e_{F/E}$ est 1 et le morphisme $k(w) \to k(v)$ est un isomorphisme, le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}(\mathscr{O}_w) & \subseteq & \mathscr{G}(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{G}(\mathscr{O}_v) & \subseteq & \mathscr{G}(E) \end{array}$$

induit une bijection :

$$H^1(\mathscr{O}_w,\mathscr{G}) \to H^1(\mathscr{O}_v,\mathscr{G})$$

(ii) Si $(X',z') \to (X,z)$ est un morphisme étale entre schémas locaux lisses de dimension 2, qui induit un isomorphisme $k(z') \to k(z)$, alors,

$$H^2_{z'}(X',\mathscr{G}) \to H^2_z(X,\mathscr{G})$$

a un noyau trivial.

Proposition 15. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathscr{K}^1(-,\mathscr{G})$ *est un faisceau Nisnevich.*

(ii) Pour tout X essentiellement lisse de dimension au plus 2, l'application canonique

$$H^1_{Zar}(X,\mathscr{G}) \to H^1_{Nis}(X,\mathscr{G})$$

est une bijection.

(iii) (**A5**).

Démonstration. On suppose (i) et on montre (ii) :

Dans ce cas, $\mathscr{Z}^1(-,\mathscr{G})$ est un faisceau Nisnevich sur les k-schémas essentiellement lisses de dimension au plus 2.

Donc

$$1 \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)} \Rightarrow \mathscr{Z}^1(-,\mathscr{G}).$$

est une suite exacte de faisceaux Nisnevich.

Comme $\mathscr{G}^{(0)}$ est flasque,

$$H^1_{Nis}(X,\mathscr{G}^{(0)}) = *.$$

La démonstration de ce fait est la même que celle du cas abélien.

Donc on a la suite fortement exacte :

$$1 \to \mathscr{G}(X) \to \mathscr{G}^{(0)}(X) \Rightarrow \mathscr{Z}^1(X,\mathscr{G}) \to H^1_{Nis}(X,\mathscr{G}) \to *.$$

Ce qui combiné au fait qu'on a la suite fortement exacte

$$1 \to \mathscr{G}(X) \to \mathscr{G}^{(0)}(X) \Rightarrow \mathscr{Z}^1(X,\mathscr{G}) \to H^1_{Zar}(X,\mathscr{G}) \to *$$

donne (ii).

Supposons (ii) et montrons (iii) :

D'abord, pour (**A5**)(**i**), le carré

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_v) \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(E) \arrow[r, hook] & \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_w) \end{tikzcd}$$

est Nisnevich distingué.

On a donc une suite exacte de Mayer-Vietoris (pour le démontrer, on procède encore comme dans le cas abélien) :

$$0 \to \mathscr{G}(\mathscr{O}_w) \to \mathscr{G}(E) \oplus \mathscr{G}(\mathscr{O}_v) \to \mathscr{G}(F) \to H^1_{Nis}(\mathscr{O}_w,\mathscr{G})$$

Par hypothèse,

$$H^1_{Nis}(\mathscr{O}_w,\mathscr{G}) = H^1_{Zar}(\mathscr{O}_w,\mathscr{G})$$

Or $\mathscr{O}_w$ est essentiellement lisse local de dimension 1, donc

$$H^1_{Zar}(\mathscr{O}_w,\mathscr{G}) = \mathscr{G}^{(0)}(\mathscr{O}_w)\backslash\mathscr{G}^{(1)}(\mathscr{O}_w) = *$$

Par conséquent,

$$\mathscr{G}(E)/\mathscr{G}(\mathscr{O}_w) \to \mathscr{G}(F)/\mathscr{G}(\mathscr{O}_v)$$

est un isomorphisme, d'où (**A5**)(**i**).

Pour (**A5**)(**ii**), soit $(X', z') \to (X, z)$ étale entre k-schémas locaux lisses tels que $k(z) \to k(z')$ est un isomorphisme. Soit $V = X \setminus \{z\}$ et $V' = X' \setminus \{z'\}$.

Par la remarque 13, les flèches verticales du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^2_{z'}(X', \mathscr{G}) & \longrightarrow & H^2_z(X, \mathscr{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(V', \mathscr{G}) & \longrightarrow & H^1(V, \mathscr{G}) \end{array}$$

sont des isomorphismes et la flèche horizontale est la flèche canonique entre les premiers ensembles pointés de cohomologie.

Par conséquent son noyau est constitué des Zariski-$\mathscr{G}$-torseurs qui deviennent triviaux sur V'. Or, par hypothèse, les $\mathscr{G}$-torseurs Zariski et Nisnevich coïncident sur les k-schémas essentiellement lisses de dimension au plus 2.

Un Nisnevich-$\mathscr{G}$-torseur sur $\mathscr{G}$ est la donnée de (V_j) un recouvrement Nisnevich de V et de

$$f_{ij} \in \mathscr{G}(V_i \times_V \mathscr{V}_j)$$

qui vérifient une condition de cocyle.

Il est trivial sur V' lorsqu'il existe $h_i \in \mathscr{G}(V_i \times_V V')$ tels que

$$f_{ij}|_{V_i \times_V V_j \times_V V'} = h_i^{-1} h_j.$$

Mais (V_j, X') est un recouvrement Nisnevich de X et si l'on pose

$$f_{X'i} = f_{iX'}^{-1} = h_i \in \mathscr{G}(V' \times_X V_j) \,(= \mathscr{G}(V' \times_V V_j))$$

on étend un tel $\mathscr{G}$-torseur à un Nisnevich $\mathscr{G}$-torseur sur X. On en déduit un Zariski-$\mathscr{G}$-torseur sur X qui est nécessairement trivial car tout recouvrement Zariski de X contient X lui-même puisque X est local. Par conséquent un tel $\mathscr{G}$-torseur est trivial sur V.

On en déduit (**A5**)(**ii**) et donc (iii).

Montrons que (iii) entraîne (i). On va d'abord montrer :

$$(\mathbf{A5})(\mathbf{i}) \Rightarrow \mathscr{G}^{(1)} \text{ est un faisceau Nisnevich.}$$

Notons que le sens réciproque sera vrai (mais inutile pour nous).

On considère un carré

$$\begin{array}{ccc} W & \overset{i}{\hookrightarrow} & V \\ \downarrow & & \downarrow p \\ U & \overset{j}{\hookrightarrow} & X \end{array}$$

Nisnevich distingué.

$\mathscr{G}^{(1)}$ est un faisceau si et seulement si pour tout tel carré, et pour tout $y \in X^{(1)}$

— Si $y \in U$, le carré

$$\begin{tikzcd} H^1(X,\mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{y' \in p^{-1}(y)} H^1_{y'}(V,\mathscr{G}) \arrow[d] \\ H^1_y(U,\mathscr{G}) \arrow[r] & \prod_{y' \in W \cap p^{-1}(y)} H^1_{y'}(W,\mathscr{G}) \end{tikzcd}$$

est cartésien.

— Si $y \notin U$, le carré

$$\begin{tikzcd} H^1(X,\mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{y' \in p^{-1}(y)} H^1_{y'}(V,\mathscr{G}) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \prod_{y' \in W \cap p^{-1}(y)} H^1_{y'}(W,\mathscr{G}) \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Le premier item est toujours vérifié car dans ce cas, $p^{-1}(y) \cap W = p^{-1}(y)$ et $H^1_y(U,\mathscr{G}) = H^1_y(X,\mathscr{G})$. Pour le second, $W \cap p^{-1}(y) = \emptyset$ et $p^{-1}(y)$ est réduit à un élément (disons y') donc il est équivalent à ce que

$$H^1_y(X,\mathscr{G}) \to H^1_{y'}(V,\mathscr{G})$$

soit un isomorphisme ce qui est donné par (**A5**)(**i**).

Pour montrer que $\mathscr{K}^1(-,\mathscr{G})$ est un faisceau, on considère le même carré distingué. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{G}^{(1)}(X) \arrow[rr, "\mathscr{G}^{(1)}(p)"] \arrow[dd, "\mathscr{G}^{(1)}(j)"'] \arrow[dr, "\partial_X"] & & \mathscr{G}^{(1)}(V) \arrow[dd] \arrow[dr, "\partial_V"] & \\ & \mathscr{G}^{(2)}(X) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{G}^{(2)}(V) \arrow[dd] \\ \mathscr{G}^{(1)}(U) \arrow[rr] \arrow[dr, "\partial_U"] & & \mathscr{G}^{(1)}(W) \arrow[dr, "\partial_W"] & \\ & \mathscr{G}^{(2)}(U) \arrow[rr] & & \mathscr{G}^{(2)}(W) \end{tikzcd}$$

et si $t \in \mathscr{G}^{(1)}(X)$ il suffit de montrer que

$$\partial_X(t) = 0 \Leftrightarrow \partial_V(\mathscr{G}^{(1)}(p)(t)) = 0 \text{ et } \partial_U(\mathscr{G}^{(1)}(j)(t)) = 0.$$

Le sens direct est clair, pour le sens réciproque, écrivons

$$\partial_X(t) = (h_z) \text{ avec } h_z \in H^1_z(X, \mathscr{G}).$$

— Si $z \in U$, $\partial_U(t) = 0$ entraîne que $h_z = 0$.
— Sinon, $p^{-1}(z)$ est réduit à un point z' et on est ramené au cas de V'_z et X_z qui est exactement (**A5**)(**ii**).

$\square$

Proposition 16. *On suppose que $\mathscr{G}$ satisfait* (**A5**). *Alors si x est essentiellement lisse sur k, les coditions suivantes sont équivalentes*

(i) Pour tout sous-schéma ouvert Ω de X,

$$\mathscr{Z}^1(\Omega, \mathscr{G}) \to \mathscr{K}^1(\Omega, \mathscr{G})$$

est une bijection.

(ii) Pour tout $x \in X$,

$$\mathscr{Z}^1(X_x, \mathscr{G}) \to \mathscr{K}^1(X_x, \mathscr{G})$$

est une bijection.

(iii) Pour tout $x \in X$, $C^*(X_x, \mathscr{G})$ est exact.

De plus, si c'est le cas pour tout Y étale sur X,

$$H^1_{Zar}(X, \mathscr{G}) \to H^1_{Nis}(X, \mathscr{G})$$

est une bijection.

Démonstration. L'équivalence entre les points de l'énoncé découle directement du fait que $\mathscr{Z}^1(-, \mathscr{G})$ et $\mathscr{K}^1(-, \mathscr{G})$ sont des faisceaux Zariski et de la définition de $C^*(-, \mathscr{G})$.

Si on suppose que l'on a cette condition sur tout Y étale, la suite de faisceaux sur le site Nisnevich de X (c'en est bien une par la proposition 15)

$$1 \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)} \rightrightarrows \mathscr{K}^1(-, \mathscr{G}) \to *$$

est exacte. Donc par la proposition 3, et comme $\mathscr{G}^{(0)}$ est flasque,

$$H^1_{Nis}(X, \mathscr{G}) = \mathscr{G}^{(0)}(X) \backslash \mathscr{K}^1(X, \mathscr{G}).$$

Comme de plus (par le même raisonnement sur le site de Zariski)

$$H^1_{Zar}(X, \mathscr{G}) = \mathscr{G}^{(0)}(X) \backslash \mathscr{Z}^1(X, \mathscr{G}),$$

on obtient le résultat. $\square$

Proposition 17. *On suppose $\mathscr{G}$ $\mathbb{A}^1$-invariant. Soit X essentiellement lisse sur k, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour tout sous-schéma ouvert Ω de X,

$$H^1_{Zar}(\Omega, \mathscr{G}) \to H^1_{Zar}(\mathbb{A}^1_\Omega, \mathscr{G})$$

est une bijection.

(ii) Pour tout $x \in X$,

$$H^1_{Zar}(\mathbb{A}^1_{X_x}, \mathscr{G}) = *$$

Démonstration. Si on suppose (i), on a

$$H^1_{Zar}(\mathbb{A}^1_{X_x}, \mathscr{G}) = H^1_{Zar}(X_x, \mathscr{G}) = \mathscr{G}^{(0)}(X)\backslash \mathscr{Z}^1(X, \mathscr{G}) = *$$

car X_x est local.

Si on suppose (ii), Soit Ω un ouvert de X. $\mathscr{G}$ se restreint en un faisceau sur le petit site de Zariski de $\mathbb{A}^1_\Omega$.

Notons $\pi : \mathbb{A}^1_\Omega \to \Omega$; π induit une paire de foncteurs adjoints

$$\pi^* : \mathbf{sSh}^*_{Zar}(\Omega) \rightleftarrows \mathbf{sSh}^*_{Zar}(\mathbb{A}^1_\Omega) : \pi_*$$

où $\mathbf{sSh}^*_{Zar}$ désigne la catégorie des faisceaux simpliciaux pointés sur le petit site de Zariski. Cette adjonction est de Quillen et se dérive en

$$L\pi^* : \mathrm{Ho}\left(\mathbf{sSh}^*_{Zar}(\Omega)\right) \rightleftarrows \mathrm{Ho}\left(\mathbf{sSh}^*_{Zar}(\mathbb{A}^1_\Omega)\right) : R\pi_*$$

Si U est local, on a de plus

$$L\pi^*(\mathbb{S}^n \wedge U_+) = \mathbb{S}^n \wedge \mathbb{A}^1_{U_+}$$

Ainsi, si $U = X_x$,

$$\begin{aligned}
\left[\mathbb{S}^n \wedge U_+, R\pi_*\left(B\left(\mathscr{G}|_{\mathbb{A}^1_\Omega}\right)\right)\right]_* &= \left[\mathbb{S}^n \wedge \mathbb{A}^1_{U_+}, B\left(\mathscr{G}|_{\mathbb{A}^1_\Omega}\right)\right]_* \\
&= \begin{cases} H^1_{Zar}\left(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G}\right) & n = 0 \\ \mathscr{G}\left(\mathbb{A}^1_U\right) & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} * & n = 0 \\ \mathscr{G}(U) & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases} \\
&= \left[\mathbb{S}^n \wedge U_+, B\left(\mathscr{G}|_\Omega\right)\right]_*
\end{aligned}$$

La première égalité vient de l'adjonction de Quillen, la seconde de [MV99, p. 4.1.16] et la troisième de l'$\mathbb{A}^1$-invariance et de l'hypothèse.

Par conséquent,

$$B\left(\mathscr{G}|_{\Omega}\right) \to R\pi_* B\left(\mathscr{G}|_{\mathbb{A}^1_{\Omega}}\right)$$

est une équivalence faible dans $\mathbf{sSh}_{Zar}(\Omega)$.

Encore une fois, par [MV99, p. 4.1.16],

$$H^1_{Zar}(\Omega, \mathscr{G}) = \left[\Omega_+, B\left(\mathscr{G}|_{\Omega}\right)\right]_* = \left[\Omega_+, R\pi_* B\left(\mathscr{G}|_{\mathbb{A}^1_{\Omega}}\right)\right]_* = H^1_{Zar}\left(\mathbb{A}^1_{\Omega}, \mathscr{G}\right)$$

□

On introduit un dernier axiome (**A6**) :

Si X est un k-schéma essentiellement lisse et pour tout $U = X_x$ avec x de codimension 1, le complexe : $C^*\left(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G}\right)$ est exact.

De plus,

$$\mathscr{G}(U) \to \mathscr{G}\left(\mathbb{A}^1_U\right)$$

est un isomorphisme.

Remarque 18. *Notons que par l'exposé précédent, cet axiome implique l'*$\mathbb{A}^1$*-invariance.*

De plus, $\mathscr{G}$ *vérifie les axiomes* (**A2′**), (**A5**) *et* (**A6**), *la proposition 15 donne que si* X *est lisse de dimension au plus* 1,

$$H^1_{Zar}(X, \mathscr{G}) \to H^1_{Nis}(X, \mathscr{G})$$

est une bijection.

Enfin, si on note $\mathscr{G}_{-1}$ *le faisceau* $Ker(\mathscr{G}(\mathbb{G}_m \times -) \overset{ev_1}{\to} \mathscr{G})$ *et si l'on suppose l'*$\mathbb{A}^1$*-invariance, (en particulier si l'on suppose* (**A6**), *alors l'axiome* (**A5**)(**i**) *implique que pour toute valuation discrète* v *sur* $F \in \mathscr{F}_k$, *on a une bijection non-canonique*

$$H^1(\mathscr{O}_v, \mathscr{G}) \approxeq \mathscr{G}_{-1}(k(v)).$$

En effet, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_v & \subseteq & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{O}_v^h & \subseteq & F^h \end{array}$$

satisfait les hypothèses de (**A5**)(**i**) *et donc on peut supposer* $\mathscr{O}_v$ *hensélien.*

Par conséquent on a une application $k(v) \to \mathscr{O}_v$ *(une récurrence facile sur le nombre de générateurs de* $k(v)/k$ *le démontre).*

De plus, si ϖ est une uniformisante de $\mathscr{O}_v$, le carré où les flèches verticales envoient t sur ϖ,

$$\begin{array}{ccc} k(v)[t]_{(t)} & \subseteq & k(v)(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{O}_v & \subseteq & F \end{array}$$

vérifie les conditions de (**A5**)(**i**).

Ainsi,

$$H^1_v(\mathscr{O}_v, \mathscr{G}) \approxeq \mathscr{G}(k(v)(t))/\mathscr{G}(k(v)[t]_{(t)})$$

Comme $\mathscr{G}$ est non-ramifié,

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(k(v)[t,t^{-1}]) &= \bigcap_{f \text{ irréductible unitaire dans } k(v)[t,t^{-1}]} \mathscr{G}(k(v)[t,t^{-1}]_{(f)}) \\ &= \bigcap_{f \text{ irréductible unitaire dans } k(v)[t], f\neq t} \mathscr{G}(k(v)[t]_{(f)}) \cap \mathscr{G}(k(v)(t)) \end{aligned}$$

et

$$\mathscr{G}(k(v)[t]) = \bigcap_{f \text{ irréductible unitaire dans } k(v)[t], f\neq t} \mathscr{G}(k(v)[t]_{(f)}) \cap \mathscr{G}(k(v)[t]_{(t)})$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(k(v)(t))/\mathscr{G}(k(v)[t]_{(t)}) &= \mathscr{G}(k(v)[t,t^{-1}])/\mathscr{G}(k(v)[t]) \\ &= \mathscr{G}((\mathbb{G}_m)_{k(v)})/\mathscr{G}(\mathbb{A}^1_{k(v)}) \\ &= \mathscr{G}((\mathbb{G}_m)_{k(v)})/\mathscr{G}(k(v)) \\ &= \mathscr{G}_{-1}(k(v)) \end{aligned}$$

ce qui conclut.

On passe maintenant au théorème principal de l'exposé qui donne une condition suffisante d'$\mathbb{A}^1$-invariance. Celle-ci est en fait nécessaire comme on le verra dans un futur exposé.

Théorème 19. *Soit $\mathscr{G}$ un faisceau en groupes non-ramifié qui vérifie* (**A2′**), (**A5**) *et* (**A6**), *alors $\mathscr{G}$ est fortement $\mathbb{A}^1$-invariant.*

De plus, pour tout X,

$$H^1_{Zar}(X, \mathscr{G}) \to H^1_{Nis}(X, \mathscr{G})$$

est une bijection.

On fixe $\mathscr{G}$ qui vérifie les hypothèses de l'énoncé. Pour prouver le théorème on introduit les propriétés :

$(\mathbf{H1})(\mathbf{d})$: Pour tout $U = X_x$ avec x de codimension au plus d dans un k-schéma lisse X, tel que $k(x)$ est infini, $C^*(U, \mathscr{G})$ est exact.

$(\mathbf{H2})(\mathbf{d})$: Pour tout $U = X_x$ avec x de codimension au plus d dans un k-schéma lisse X, tel que $k(x)$ est infini, $C^*\left(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G}\right)$ est exact.

Si $d \leqslant 2$, par la remarque 10, $(\mathbf{H1})(\mathbf{d})$ est vérifiée.

$(\mathbf{A6})$ implique $(\mathbf{H2})(\mathbf{1})$.

$(\mathbf{H2})(\mathbf{d})$ implique (ii) de la proposition 17.

On a de plus

Lemme 20. *Soit $d \geqslant 0$,*

1 $(\mathbf{H1})(\mathbf{d}) \Rightarrow (\mathbf{H2})(\mathbf{d})$.

2 $(\mathbf{H2})(\mathbf{d}) \Rightarrow (\mathbf{H1})(\mathbf{d+1})$.

Démonstration. (Le lemme entraîne le théorème) Par récurrence, $(\mathbf{Hi})(\mathbf{d})$ est vrai pour tout d, donc si X a des corps résiduels infinis, par la proposition 16,

$$H^1_{Zar}(X, \mathscr{G}) \to H^1_{Nis}(X, \mathscr{G}) \text{ et } H^1_{Zar}(\mathbb{A}^1_X, \mathscr{G}) \to H^1_{Nis}(\mathbb{A}^1_X, \mathscr{G})$$

sont des bijections.

De plus par $(\mathbf{H2})(\mathbf{d})$ et la proposition 17,

$$H^1_{Zar}(X, \mathscr{G}) \to H^1_{Zar}(\mathbb{A}^1_X, \mathscr{G})$$

est une bijection. Cela donne le résultat si k est infini.

Par [MV99, p. 4.1.16], $\mathscr{G}$ est fortement $\mathbb{A}^1$-invariant si et seulement si $B\mathscr{G}$ est $\mathbb{A}^1$-local. Dans ce cas

$$B\mathscr{G} \to L_{\mathbb{A}^1}(B\mathscr{G})$$

est une équivalence faible et donc

$$\mathscr{G} = \pi_1(B\mathscr{G}) = \pi_1\left(L_{\mathbb{A}^1}(B\mathscr{G})\right)$$

Supposons k fini et notons $\mathscr{G}' = \pi_1\left(L_{\mathbb{A}^1}(B\mathscr{G})\right)$.

On verra dans un prochain exposé que $\mathscr{G}'$ est non-ramifié et vérifie les axiomes $(\mathbf{A2'})$, $(\mathbf{A5})$ et $(\mathbf{A6})$.

On affirme à présent que si A est local hensélien de corps résiduel infini, alors

$$\mathscr{G}(A) \to \mathscr{G}'(A)$$

est un isomorphisme.

Cela résulte en effet d'un changement de base et du fait que le théorème est vrai pour les corps infinis. Notons qu'il est absolument crucial que ce que l'on a fait dans cet exposé soit valide sur un corps quelconque et que le théorème [Mor12, p. 6.11] le soit aussi. On le démontrera dans un prochain exposé.

Par conséquent, si R est un anneau local lisse sur k de dimension au moins 1, $F := \mathrm{Frac}(R)$ est hensélien de corps résiduel infini et donc comme on a le diagramme commutatif dont la colonne de droite est un isomorphisme,

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}(R) & \subseteq & \mathscr{G}(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{G}'(R) & \subseteq & \mathscr{G}'(F) \end{array}$$

la flèche

$$\mathscr{G}(R) \to \mathscr{G}'(R)$$

est par conséquent injective.

De plus si κ est une extension finie de k, par $\mathbb{A}^1$-invariance,

$$\mathscr{G}(\kappa) = \mathscr{G}(\kappa[T]) \subseteq \mathscr{G}'(\kappa[T]) = \mathscr{G}'(\kappa).$$

Ainsi, $\mathscr{G} \to \mathscr{G}'$ est un monomorphisme qui induit un isomorphisme sur les anneaux de corps résiduel infini.

Soit ensuite $\mathscr{O}_v$ est un anneau de valuation discrète lisse sur k de dimension au moins 1, $F := \mathrm{Frac}(\mathscr{O}_v) \in \mathscr{F}_k$.

Par la remarque 18, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}_{-1}(k(v)) & \approxeq & H^1(\mathscr{O}_v, \mathscr{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{G}'_{-1}(k(v)) & \approxeq & H^1(\mathscr{O}_v, \mathscr{G}') \end{array}$$

est commutatif à condition de choisir la même uniformisante pour définir les bijections horizontales.

Mais comme $\mathscr{G} \to \mathscr{G}'$ est un monomorphisme, $\mathscr{G}_{-1} \to \mathscr{G}'_{-1}$ aussi.

On en déduit que la flèche

$$\mathscr{G}(F)/\mathscr{G}(\mathscr{O}_v) \to \mathscr{G}'(F)/\mathscr{G}'(\mathscr{O}_v)$$

est injective.

Mais $\mathscr{G}(F) = \mathscr{G}'(F)$ et $\mathscr{G}(\mathscr{O}_v) \subseteq \mathscr{G}'(\mathscr{O}_v)$ et donc

$$\mathscr{G}(\mathscr{O}_v) = \mathscr{G}'(\mathscr{O}_v).$$

Et alors, si κ est une extension finie de k,

$$\mathscr{G}(\kappa) = \mathscr{G}(\kappa[T]) = \mathscr{G}'(\kappa[T]) = \mathscr{G}'(\kappa)$$

Comme $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ sont non-ramifiés, $\mathscr{G} = \mathscr{G}'$.

Mais alors, la composition

$$B\mathscr{G} \to L_{\mathbb{A}^1}(B\mathscr{G}) \to B\mathscr{G}'$$

est une équivalence faible et $L_{\mathbb{A}^1}(B\mathscr{G}) \to B\mathscr{G}'$ aussi, donc $B\mathscr{G} \to L_{\mathbb{A}^1}(B\mathscr{G})$ aussi et $B\mathscr{G}$ est $\mathbb{A}^1$-local ce qui termine la preuve. □

On démontre à présent le lemme.

Démonstration. Le cas où $d < 2$ étant réglé, attelons-nous au cas $d \geqslant 2$. Supposons $(\mathbf{H1})(\mathbf{d})$. Soit U irréductible lisse local de dimension au plus d et $F = k(U)$.

Écrivons les complexes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
C^*(\mathbb{A}^1_F, \mathscr{G}) & : & \mathscr{G}(\mathbb{A}^1_F) = \mathscr{G}(F) & \subseteq & \mathscr{G}(F(T)) & \twoheadrightarrow & \mathscr{G}^{(1)}(\mathbb{A}^1_F) & & \\
 & & \cup\!\mid & & \parallel & & \uparrow & & \\
C^*(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G}) & : & \mathscr{G}(\mathbb{A}^1_U) = \mathscr{G}(U) & \longrightarrow & \mathscr{G}(F(T)) & \Rightarrow & \mathscr{G}^{(1)}(\mathbb{A}^1_U) & \longrightarrow & \mathscr{G}^{(2)}(\mathbb{A}^1_U) \\
 & & \parallel & & \cup\!\mid & & \uparrow & & \uparrow \\
C^*(U, \mathscr{G}) & : & \mathscr{G}(U) & \subseteq & \mathscr{G}(F) & \Rightarrow & \mathscr{G}^{(1)}(U) & \longrightarrow & \mathscr{G}^{(2)}(U)
\end{array}$$

La première ligne est exacte par $(\mathbf{A6})$ et la troisième l'est par $(\mathbf{H1})(\mathbf{d})$.

Le but est de montrer que la ligne du milieu est exacte, c'est-à-dire que $\mathscr{G}(F(T))$ agit transitivement sur $\mathscr{K}^1(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G})$.

Soit $\alpha \in \mathscr{K}^1(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G})$, par exactitude de la ligne du haut, il existe $g \in \mathscr{G}(F(T))$ tel que $g \cdot \alpha$ a une image nulle dans $\mathscr{G}^{(1)}(\mathbb{A}^1_F)$.

Calculons alors le noyau de

$$\mathscr{G}^{(1)}(\mathbb{A}^1_U) \to \mathscr{G}^{(1)}(\mathbb{A}^1_F).$$

Soit $y \in (\mathbb{A}^1_U)^{(1)}$

- Si son image dans U est de codimension 0, c'est le point générique de U i.e., c'est $\operatorname{Spec}(F)$ et donc y est l'image d'un unique point de $\mathbb{A}^1_F$ qu'on notera encore y.
- Si son image y' dans U est de codimension 1, y correspond à $\mathbb{A}^1_{y'}$ ce que l'on note $y = y'[T]$.

Par conséquent,

$$\mathscr{G}^{(1)}(\mathbb{A}^1_U) = \mathscr{G}^{(1)}(\mathbb{A}^1_F) \times \prod_{y \in U^{(1)}}{}' H^1_{y[T]}(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G})$$

et le noyau recherché est donc $\prod'_{y \in U^{(1)}} H^1_{y[T]}(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G})$.

On prouve cela en passant pas le

Lemme 21.
$$\mathscr{K}^1(U, \mathscr{G}) = \mathscr{K}^1(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G}) \cap \prod'_{y \in U^{(1)}} H^1_{y[T]}(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G})$$

Si le lemme est vrai, $g \cdot \alpha \in \mathscr{K}^1(U, \mathscr{G})$. Alors par exactitude de la ligne du bas, il existe $h \in \mathscr{G}(F)$ tel que
$$hg \cdot \alpha = *.$$

Démonstration. (du lemme) L'inclusion directe étant évidente, l'inclusion réciproque est une conséquence du fait suivant :

Lemme 22. *La flèche*
$$\mathscr{G}^{(1)}(U) \to \prod'_{y \in U^{(1)}} H^1_{y[T]}(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G})$$

est injective et son image est
$$\mathrm{Ker}\left(\prod'_{y \in U^{(1)}} H^1_{y[T]}(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G}) \to \prod'_{z \in (\mathbb{A}^1_U)^{(2)}} H^2_z(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G}) \to \prod'_{\substack{y \in U^{(1)} \\ z \in (\mathbb{A}^1_y)^{(1)}}} H^2_z(\mathbb{A}^1_U, \mathscr{G})\right)$$

Démonstration. (du lemme dans la preuve du lemme).

Le lemme dans la preuve du lemme est une conséquence du fait que
$$H^1(\mathscr{O}_v, \mathscr{G}) \to H^1_{v[T]}(\mathbb{A}^1_{\mathscr{O}_v}, \mathscr{G})$$

est injective d'image
$$\mathrm{Ker}\left(H^1_{v[T]}(\mathbb{A}^1_{\mathscr{O}_v}, \mathscr{G}) \to \prod'_{z \in \left(\mathbb{A}^1_{k(v)}\right)^{(1)}} H^2_z(\mathbb{A}^1_{\mathscr{O}_v}, \mathscr{G})\right)$$

L'injectivité découle de
$$\begin{cases} H^1(\mathscr{O}_v, \mathscr{G}) = \mathscr{G}(F)/\mathscr{G}(\mathscr{O}_v) \\ H^1_{v[T]}(\mathbb{A}^1_{\mathscr{O}_v}, \mathscr{G}) = \mathscr{G}(F(T))/\mathscr{G}(\mathbb{A}^1_{\mathscr{O}_v}) = \mathscr{G}(F(T))/\mathscr{G}(\mathscr{O}_v) \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&x \in \operatorname{Ker}\left(H^1_{v[T]}(\mathbb{A}^1_{\mathscr{O}_v},\mathscr{G}) \to \prod_{z\in\left(\mathbb{A}^1_{k(v)}\right)^{(1)}}' H^2_z(\mathbb{A}^1_{\mathscr{O}_v},\mathscr{G})\right)\\
\Leftrightarrow &(x,e_y) \in \operatorname{Ker}\left(\prod_{y\in\left(\mathbb{A}^1_{\mathscr{O}_v}\right)^{(1)}}' H^1_y(\mathbb{A}^1_{\mathscr{O}_v},\mathscr{G}) \to \prod_{z\in\left(\mathbb{A}^1_{\mathscr{O}_v}\right)^{(2)}}' H^2_z(\mathbb{A}^1_{\mathscr{O}_v},\mathscr{G})\right)\\
\Leftrightarrow &(x,e_y) \text{ est dans la } \mathscr{G}(F(T)) - \text{oribite de } (e_{v[T]},e_y)\\
\Leftrightarrow &\exists g \in \bigcap_{w\in\mathbb{A}^1_F} \mathscr{G}(\mathscr{O}_w) = \mathscr{G}(F), g\cdot x \in \mathscr{G}(\mathbb{A}^1_{\mathscr{O}_v}) = \mathscr{G}(\mathscr{O}_v)\\
\Leftrightarrow &x \in \mathscr{G}(F)/\mathscr{G}(\mathscr{O}_v).
\end{aligned}$$

□

Revenons à la preuve du lemme. Le lemme dans la preuve du lemme implique que

$$\mathscr{K}^1(\mathbb{A}^1_U,\mathscr{G}) \cap \prod_{y\in U^{(1)}}' H^1_{y[T]}(\mathbb{A}^1_U,\mathscr{G}) \subseteq \mathscr{G}^{(1)}(U).$$

Puis, écrivons

$$\mathscr{K}^1(\mathbb{A}^1_U,\mathscr{G}) \cap \prod_{y\in U^{(1)}}' H^1_{y[T]}(\mathbb{A}^1_U,\mathscr{G}) \xrightarrow{\partial_U} \mathscr{G}^{(2)}(U) \xrightarrow{\mathscr{G}^{(2)}(\pi)} \mathscr{G}^{(2)}(\mathbb{A}^1_U)$$

La composé de ces deux flèches est la restriction de $\partial_{\mathbb{A}^1_U}$ qui est nulle sur $mclK^1(\mathbb{A}^1_U,\mathscr{G})$.

Si on montre que $\mathscr{G}^{(2)}(\pi)$ a un noyau trivial, on aura terminé la preuve de $(\mathbf{H1})(\mathbf{d}) \Rightarrow (\mathbf{H2})(\mathbf{d})$.. Cela se ramène à montrer le

Lemme 23. *Si (U,u) est local lisse sur k de dimension 2, et de corps résiduel infini,*

$$H^2_u(U,\mathscr{G}) \to H^2_{u[T]}(\mathbb{A}^1_U,\mathscr{G})$$

a un noyau trivial.

Démonstration. (du lemme ci-dessus). Notons $u' = u[T]$.

Tout d'abord, par définition,

$$H^2_{u[T]}(\mathbb{A}^1_U,\mathscr{G}) = H^2_{u'}\left((\mathbb{A}^1_U)_{u'},\mathscr{G}\right).$$

Ensuite par la remarque 13, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^2_u(U,\mathscr{G}) & \approx & H^1_{Nis}(V,\mathscr{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2_{u[T]}\left((\mathbb{A}^1_U)_{u'},\mathscr{G}\right) & \approx & H^1_{Nis}(V_T,\mathscr{G}) \end{array}$$

où $V = U \setminus \{z\}$ et $V_T = (\mathbb{A}^1_U)_{u[T]} \setminus \{u'\}$, est commutatif.

Soit donc α un $\mathscr{G}$-torseur sur V qui devient trivial sur V_T.

Remarquons que

$$V_T = \operatorname*{colim}_{u' \in \Omega \subseteq \mathbb{A}^1_U,\text{ ouvert}} \Omega \setminus (\Omega \cap \overline{u'}).$$

Il existe donc Ω ouvert de $\mathbb{A}^1_U$ contenant $u[T]$ tel que

$$\alpha|_{\Omega \setminus (\Omega \cap \overline{u'})} = *.$$

Le but est alors de trouver un sous-schéma U' de Ω tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} U' \setminus \{u'\} & \longrightarrow & U' \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & U \end{array}$$

est Nisnevich distingué i.e., tel que $U' \cap \overline{u'}$ est réduit à un point et $U' \to U$ est étale.

Pour cela on s'appuie sur le résultat suivant ([GD67, p. 17.16.3]) :

Proposition 24. *Soit $f : X \to S$ un morphisme lisse. Soient $s \in S$, x un point fermé de X_s tel que $k(x)$ soit séparable sur $k(s)$, alors il existe un voisinage ouvert W de s dans S et un sous-schéma U' de $f^{-1}(W)$ de tel que $x \in U'$ et que le morphisme $U' \to W$, restriction de f, soit étale.*

On veut l'appliquer à $X = \Omega$, $S = U$, $s = u$. Il nous manque un point x au-dessus de u tel que $k(x)$ soit séparable sur $k(u)$. Comme U est local, l'ouvert W sera U lui-même. De plus quitte à réduire U', on peut supposer $U' \cap \overline{u'}$ est réduit à un point, d'où le carré Nisnevich.

Trouvons ce point rationnel.

Comme $u' \in \Omega$, $\Omega \cap \overline{u'}$ est dense dans $\overline{u'} = \mathbb{A}^1_{k(u)}$.

Donc (par définition de la topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^1_{k(u)}$), $\mathbb{A}^1_{k(u)} \setminus \Omega \cap \overline{u'}$ est fini et donc comme $k(u)$ est infini, $\mathbb{A}^1_{k(u)}$ a une infinité de points rationnels, et donc il y en a un dans $\Omega \cap \overline{u'}$.

Le carré étant Nisnevich distingué et α étant trivial sur $U' \setminus \{u'\}$, on peut procéder comme dans la preuve de la proposition 15 pour montrer que α est trivial.

□

Le lemme est alors démontré. $\square$

Reste enfin à voir $(\mathbf{H2})(\mathbf{d}) \Rightarrow (\mathbf{H1})(\mathbf{d+1})$.

Soit X irréductible lisse sur k de dimension $d+1$, $F = k(X)$ et $u \in X$ de codimension $d+1$ et $U = X_u$.

On doit montrer l'exactitude de

$$\mathscr{G}(F) \Rightarrow \mathscr{G}^{(1)}(U) \to \mathscr{G}^{(2)}(U)$$

Soit $\alpha \in \mathscr{K}^1(U, \mathscr{G})$; on cherche donc $g \in \mathscr{G}(F)$ tel que

$$\alpha = g \cdot *.$$

Soient (y_i) les points de codimension 1 tels que la coordonnée de α correspondante est non-nulle.

Le lemme suivant (dont on verra peut-être une preuve dans un prochain exposé) va nous permettre de se ramener à l'hypothèse :

Lemme 25. *(Gabber) Soit U une localisation k-schéma lisse de dimension $d+1$, et $Y \hookrightarrow U$ un sous-schéma fermé partout de codimension 1.*

Alors il existe $t \in \mathbb{A}^d_k$ et un morphisme étale

$$U \to \mathbb{A}^1_S$$

où $S = \operatorname{Spec}\left(\mathscr{O}_{\mathbb{A}^d_k, t}\right)$.

tel que la composée

$$Y \hookrightarrow U \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$$

est toujours une immersion fermée et la composée

$$Y \hookrightarrow U \longrightarrow \mathbb{A}^1_S \longrightarrow S$$

est un morphisme fini.

En particulier, on a un morphisme étale $\chi : U \to \mathbb{A}^1_S$ où S est la localisation d'un k-schéma lisse de dimension d, tel que si $Y = (\cup \overline{y_i})_{red}$, la composée

$$Y \hookrightarrow U \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$$

est toujours une immersion fermée et la composée

$$Y \hookrightarrow U \longrightarrow \mathbb{A}^1_S \longrightarrow S$$

est un morphisme fini.

Soit $E = k(S)$. Le morphisme étale χ induit les applications verticales du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(F) \arrow[r, phantom, "\Rightarrow"] & \mathscr{G}^{(1)}(U) \arrow[r, "\partial_U"] & \mathscr{G}^{(2)}(U) \\
\mathscr{G}(E(T)) \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow"] & \mathscr{G}^{(1)}(\mathbb{A}^1_S) \arrow[u] \arrow[r, "\partial_{\mathbb{A}^1_V}"] & \mathscr{G}^{(2)}(\mathbb{A}^1_S) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Notons $y'_i = \chi(y_i) \in (\mathbb{A}^1_S)^{(1)}$. Comme $Y \to \mathbb{A}^1_S$ est une immersion fermée,

$$k(y'_i) \to k(y_i)$$

est un isomorphisme.

Par (**A5**)(**i**), pour tout i,

$$H^1_{y'_i}(\mathbb{A}^1_S, \mathscr{G}) \to H^1_{y_i}(U, \mathscr{G})$$

est un isomorphisme. Comme les seules composantes non-triviales de α son selon les y_i on en déduit $\alpha' \in \mathscr{G}^{(1)}(\mathbb{A}^1_S)$ d'image α dans $\mathscr{G}^{(1)}(U)$.

Alors, $\partial_{\mathbb{A}^1_S}(\alpha') = *$. En effet, soit $z \in (\mathbb{A}^1_S)^{(2)}$,

— Si $z \notin \chi(Y)$, tout y contenant z dans son adhérence n'est pas un des y_i et par conséquent, α' a une composante triviale selon y et donc α' a une image triviale dans $H^2_z(\mathbb{A}^1_S, \mathscr{G})$.

— Si $z \in \chi(Y)$, il existe un unique $z' \in Y$ tel que $z' = \chi(z)$. Comme $U_{z'} \to (\mathbb{A}^1_S)_z$ est étale et comme $k(z) \to k(z')$ est un isomorphisme on peut appliquer (**A5**)(**ii**) qui nous dit que l'image de α' dans $H^2_z(\mathbb{A}^1_S, \mathscr{G})$ est nulle.

Alors, $\alpha' \in \mathscr{K}^1(\mathbb{A}^1_S, \mathscr{G})$ et donc par (**H2**)(**d**), $\alpha' = h \cdot *$. En passant à χ on obtient le résultat. □

On va maintenant montrer que l'$\mathbb{A}^1$-invariance de $\mathscr{G}$ induit celle de $\mathscr{G}_{-1}$ et définir les résidus.

Tout d'abord, $\mathscr{G}_{-1}$ est un faisceau dont on vérifie facilement le caractère non-ramifié si $\mathscr{G}$ l'est.

Proposition 26. *Si $\mathscr{G}$ est $\mathbb{A}^1$-invariant, $\mathscr{G}_{-1}$ aussi.*

Démonstration. $B\mathscr{G}$ est $\mathbb{A}^1$-local. Soit $\mathscr{B}\mathscr{G}$ une résolution fibrante de $B\mathscr{G}$. On note

$$R\mathbf{Hom}_{\cdot}(\mathbb{G}_m, B\mathscr{G}) := \mathbf{Hom}_{\cdot}(\mathbb{G}_m, \mathscr{B}\mathscr{G})$$

où $\mathbf{Hom}_*$ est le Hom interne dans la catégorie de modèle des faisceaux simpliciaux. Celui-ci est adjoint au produit $\wedge$ et l'adjonction est de Quillen, on a par conséquent si U est local

$$\begin{aligned}\pi_n(R\mathbf{Hom}.(\mathbb{G}_m, B\mathscr{G}))(U) &= [\mathbb{S}^n \wedge U_+, R\mathbf{Hom}.(\mathbb{G}_m, B\mathscr{G})]_* \\ &= [\mathbb{S}^n \wedge U \wedge (\mathbb{G}_m, 1), B\mathscr{G}]_* \\ &= \begin{cases} \mathscr{G}(\mathbb{G}_m \times X)/\mathscr{G}(X) & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathscr{G}_{-1} = \pi_1(R\mathbf{Hom}.(\mathbb{G}_m, B\mathscr{G}))$.

Et donc $B\mathscr{G}_{-1}$ est la composante 0-connexe de $R\mathbf{Hom}.(\mathbb{G}_m, B\mathscr{G})$ qui est $\mathbb{A}^1$-local car $B\mathscr{G}$ l'est.

Et donc par [MV99], $B\mathscr{G}_{-1}$ est $\mathbb{A}^1$-local. □

Définissons maintenant les résidus. Soit v une valuation discrète sur un corps F. On peut choisir un schéma X lisse sur k de corps F et Y un sous-schéma partout de codimension 1 tel que Y induit v sur F. Si $k(v)$ est séparable sur k, comme c'est le corps des fonctions de Y, quitte à rétrécir X on peut supposer Y lisse sur k.

On rappelle alors le théorème de pureté :

Définition 27. *Soit E un fibré vectoriel sur X. Alors, l'*espace de Thom absolu *de X est*

$$Th_X(E) := E/(E \setminus s_0(X))$$

calculé dans $\mathscr{H}^{\mathbb{A}^1}(X)$ où s_0 désigne la section nulle de E.

*Notons $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$. L'*espace de Thom *de E est alors*

$$Th(E) := Lf_\#(Th_X(E))$$

Théorème 28. *(pureté)Si Y est un sous-schéma fermé de X, on a un isomorphisme canonique*

$$X/(X \setminus Y) = Th(N_Y X).$$

De plus, si on choisit ϖ une uniformisante de $\mathscr{O}_v$, celle-ci donne un élément non-nul de $\mathfrak{M}_v/\mathfrak{M}_v^2$ qui est la fibre de $N_Y X$ au point générique de Y, cela induit une trivialisation de $N_Y X$ au voisinage de y.

On a alors par [MV99, p. 2.17]

$$Th(N_Y X) \approxeq T \wedge Y_+$$

où $T = \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$.

Proposition 29. *Soit $\mathscr{G}$ fortement $\mathbb{A}^1$-invariant. Soit Y un k-schéma lisse.*

On a une bijection canonique

$$\mathscr{G}_{-1}(Y) \to H^1_{Nis}(T \wedge Y_+, \mathscr{G})$$

Démonstration. On a la suite cofibre :

$$\mathbb{G}_m \times X \subseteq \mathbb{A}^1 \times X \to T \wedge Y_+.$$

On en déduit une suite exacte longue :

$$0 \to \mathscr{G}(\mathbb{A}^1_Y) \to \mathscr{G}(\mathbb{G}_m \times Y) \Rightarrow H^1(T \wedge Y_+, \mathscr{G}) \to H^1(\mathbb{A}^1_Y, \mathscr{G}) \to H^1(\mathbb{G}_m \times Y, \mathscr{G})$$

Par $\mathbb{A}^1$-invariance, $H^1(\mathbb{A}^1_Y, \mathscr{G}) = H^1(Y, \mathscr{G})$ et on en déduit une section

$$H^1(\mathbb{G}_m \times Y, \mathscr{G}) \to H^1(\mathbb{A}^1_Y, \mathscr{G})$$

de $H^1(\mathbb{A}^1_Y, \mathscr{G}) \to H^1(\mathbb{G}_m \times Y, \mathscr{G})$ donnée par l'évaluation en 1.

La suite

$$0 \to \mathscr{G}(Y) \to \mathscr{G}(\mathbb{G}_m \times Y) \Rightarrow H^1(T \wedge Y_+, \mathscr{G}) \to *$$

est donc exacte.

Donc

$$H^1(T \wedge Y_+, \mathscr{G}) = \mathscr{G}(Y) \backslash \mathscr{G}(\mathbb{G}_m \times Y) = \mathscr{G}_{-1}(Y).$$

□

Corollaire 30. *Soit F un corps t v une valuation discrète sur F. Si $\mathscr{G}$ est fortement $\mathbb{A}^1$-invariant, le choix d'un élément non-nul de $\mathfrak{M}_v/\mathfrak{M}_v^2$ (c'est-à-dire de la classe d'une uniformisante de $\mathscr{O}_v$ donne une bijection canonique*

$$\mathscr{G}_{-1}(k(v)) \to H^1(\mathscr{O}_v, \mathscr{G}).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathscr{G}_{-1}(k(v)) &= \operatorname*{colim}_{X,Y} \mathscr{G}_{-1}(Y) \\ &= \operatorname{colim} H^1(T \wedge Y_+, \mathscr{G}) \\ &\approxeq \operatorname{colim} H^1(X/(X \setminus Y), \mathscr{G}) \end{aligned}$$

Or on a la suite exacte

$$0 \to \mathscr{G}(X) \to \mathscr{G}(X \setminus Y) \to H^1(X/(X \setminus Y), \mathscr{G}) \to H^1(X \setminus Y, \mathscr{G})$$

et $\operatorname{colim} \mathscr{G}(X) = \mathscr{G}(F)$, $\operatorname{colim} \mathscr{G}(X \setminus Y) = \mathscr{G}(\mathscr{O}_v)$, d'où le résultat (les colimites sont filtrantes). □

On en déduit la définition suivante :

Définition 31. *Avec les notations de la proposition, on a une application canonique*

$$\partial_v^{\varpi} : \mathscr{G}(F) \to \mathscr{G}_{-1}(k(v))$$

On l'appelle le résidu *associé à ϖ.*

Références

[Gir66] Jean GIRAUD. *Cohomologie non abélienne*. 1966.

[GD67] Alexander GROTHENDIECK et Jean DIEUDONNÉ. « Éléments de géométrie algébrique, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrieme partie ». In : *Publications mathématiques de l'IHÉS* 32 (1967), p. 5-361.

[Mor12] F. MOREL. $\mathbb{A}^1$-*Algebraic Topology over a Field*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[MV99] Fabien MOREL et Vladimir VOEVODSKY. « $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes ». In : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 90 (1999), p. 45-143.