Suite spectrale de Leray-Serre ; de la cohomologie singulière à la cohomologie motivique

Frédéric Déglise

9 décembre 1999

Plan

0.1 Introduction

On expose ici la construction de Suslin-Voevodsky, puis Voevodsky-Friedlander pour l'homologie singulière et la cohomologie motivique des schémas. La première partie s'occupe de rappeler la situation de l'homologie singulière en topologie algébrique, notamment au travers des espaces d'Eilenberg-Mac Lane, et présente la suite spectrale de Serre munie de quelques applications.

La deuxième partie construit l'homologie singulière pour les schémas de manière tout à fait analogue au cas topologique. On déduit de ces constructions la cohomologie motivique, qui est une version de la cohomologie singulière des espaces topologiques.

On a rappelé ensuite quelques résultats essentiels en cohomologie motivique, et exposé la constructin de Rost qui nous sert de base pour tenter la construction de la suite spectrale de Serre en cohomologie motivique.

Dans tout ce qui suit, on considèrera des catégories de préfaisceaux sur une catégorie $\mathscr{C}$. C'est exactement la catégorie des foncteurs contravariants

de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{E}ns$, catégorie des ensembles.
La catégorie des préfaisceaux abéliens est la sous catégorie formée des foncteurs à valeurs dans $\mathscr{A}b$, catégorie des groupes abéliens.

Partie 1

Situation en topologie

1.1 Ensembles simpliciaux et espaces topologiques

On se réfère au mémoire [Dég98] pour les notions sur les ensembles (co)simpliciaux (et plus généralement sur les objets (co)simpliciaux).

On rappelle que si $\mathscr{O}rd$ désigne la catégorie des ensembles finis totalement ordonnés munis des applications croissantes, la catégorie des ensembles simpliciaux (respectivement cosimpliciaux) est celle des préfaisceaux sur $\mathscr{O}rd$ (respectivement $\mathscr{O}rd^{op}$), notée $\mathscr{S}$.
Plus généralement, la catégorie des groupes abéliens simpliciaux est la catégorie des préfaisceaux abéliens sur $\mathscr{O}rd$. Cette catégorie équivalente à celle des complexes de groupes abéliens concentrés en degrés strictement positifs. On confondra dès lors tout groupe abélien simplicial avec le complexe de $\mathscr{A}b$ qui lui est canoniquement associé.

Remarque 1.1.1 Si F est un endofoncteur de $\mathscr{E}ns$ (respectivement $\mathscr{A}b$, il se prolonge de façon naturelle aux ensembles (respectivement groupes abéliens) simpliciaux par composition (à gauche). On confondra par la suite F et son extension simpliciale.

1.1.1 Homologie singulière

En topologie, on dispose de l'espace topologique cosimplicial standard $\Delta_{\mathbb{R}}^{\bullet}$ dont nous rappelons ici la définition :

1. $\Delta_{\mathbb{R}}^{n} = \left\{(x_0, ..., x_n) \in {\mathbb{R}^+}^n \mid x_0 + ... + x_n = 1\right\}$
2. pour toute application croissante σ de n dans m, on pose $\sigma_* : \Delta_{\mathbb{R}}^{n} \to \Delta_{\mathbb{R}}^{m}$, $(x_0, ..., x_n) \mapsto x_0.e_{\sigma(0)} + ... + x_n.e_{\sigma(n)}$ où $(e_0, ..., e_m)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^m$, ce qui définit bien une application continue.

On associe dès lors un ensemble simplicial dit *singulier* à tout espace topologique

$$\mathcal{S}_\bullet(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}op}\left(\Delta_{\mathbb{R}}^\bullet, X\right)$$

obtenu par l'application du préfaisceau canonique représenté par X (dans $\mathscr{T}op$).

En particulier, le complexe des *chaînes singulières* associé à X le complexe de groupes abéliens

$$C_*(X) = \mathbb{Z}_\bullet \mathcal{S}_\bullet(X)$$

l'homologie singulière de X (à coefficient dans $\mathbb{Z}$) est

$$H_n(X;\mathbb{Z}) = H_n\big(C_*(X)\big)$$

où l'on a noté $\mathbb{Z}_\bullet$ l'extension simpliciale du foncteur groupe abélien (ou $\mathbb{Z}$-module) libre engendré.

Si G est un groupe abélien quelconque, on définit encore l'homologie singulière de X à coefficients dans G

$$H_n(X;G) = H_n\left(G \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(X)\right)$$

et la cohomologie singulière de X à coefficient dans G

$$H^n(X;G) = H^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}b}\left(C_*(X), G\right)\right)$$

1.1.2 Espaces d'Eilenberg Mac-Lane

On se place ici dans $\mathscr{T}op_*$, la catégorie des espaces topologiques pointés. La construction qui suit est faite en vue de l'analogie future avec les variétés algébriques.

Définition 1.1.2 *Soit $n > 0$ un entier, π un groupe, abélien si $n \neq 1$. On appelle espace d'Eilenberg Mac-Lane noté $\mathrm{K}(\pi, n)$ tout espace topologique pointé tel que*

$$\pi_m\left(\mathrm{K}(\pi,n)\right) = \begin{cases} \pi & si\ m{=}n \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Exemple 1.1.3 Si G est un groupe discret, son classifiant vérifie $BG = K(G,1)$

Un tel problème se reformule pour nous comme suis : existe-il un préfaisceaux sur ${}^h\mathscr{T}op_*$ *représentable*, L_n^π, vérifiant :

$$L_n^\pi(S^m) = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n \\ 0 & sinon \end{cases}$$

En particulier, l'espace topologique $\mathrm{K}(\pi, n)$ en sera un représentant.

Rappelons maintenant la construction de Dold-Thom : soit X un espace topologique pointé, on définit la puissance $n^{\text{ème}}$ symétrique de X, espace topologique pointé,

$$SP^n(X) = X^n/\Sigma_n$$

où Σ_n opère continument sur X^n par permutation des facteurs.

On note alors

$$M(X) = \coprod_{n\geq 0} SP^n(X)$$

et on le munit d'une structure de monoïde topologique par concaténation. On note enfin, et c'est l'espace qui nous intéresse, $M^+(X)$ le groupe topologique associé au monoïde précédent.

$$L[X] = \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}op}\left(., M^+(X)\right)$$

le préfaisceau abélien représenté par $M^+(X)$

Théorème 1.1.4 (Dold-Thom) *pour tout m entier,*

$$\pi_m\left(M^+(X)\right) = H_m(X;\mathbb{Z})$$

Remarque 1.1.5 Par ailleurs, puisque $M^+(X)$ est un groupe abélien topologique, on peut calculer son homotopie directement par la formule suivante

$$\pi_m\left(M^+(X)\right) = H_m\left(S_\bullet\left(M^+(X)\right)\right)$$

Le dernier foncteur étant simplement l'homologie d'un complexe de groupes abéliens. On retiendra donc la formule suivante :

$$\begin{aligned} H_m(X;\mathbb{Z}) &= H_m\left(\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}op}\left(\Delta^\bullet_{\mathbb{R}}, M^+(X)\right)\right) \\ &= H_m\left(L[X]\left(\Delta^\bullet_{\mathbb{R}}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.1.6 : Enfin, $M^+(X)$ nous permet de poser

$$\mathrm{K}(\mathbb{Z}, n) = M^+(S^n)/_{*=0}$$

où l'on identifie le point de X avec le 0 qui satisfait effectivement la définition 1.1.2. $L_n^{\mathbb{Z}}$ est donc un quotient du préfaisceau abélien $L[S^n]$.

Le résultat suivant nous fournira alors la clé pour définir la cohomologie motivique :

$$\begin{aligned} H^{n-i}(X;\mathbb{Z}) &= H_i\left(\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}op}\left(X \times \Delta^\bullet_{\mathbb{R}}, K(\mathbb{Z}, n)\right)\right) \\ &= H_i\left(L_n^{\mathbb{Z}}\left(X \times \Delta^\bullet_{\mathbb{R}}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

On retiendra donc cette fois le préfaisceau $\mathbb{Z}(n)$ de complexes de groupes abéliens défini par :

$$\mathbb{Z}(n)^i(X) = L_n^{\mathbb{Z}}\left(X \times \Delta_{\mathbb{R}}^{n-i}\right)$$

1.1.3 Réalisation et CW-complexes

Un des faits importants de la théorie est la proposition suivante :

Proposition 1.1.7 *Le foncteur $S_\bullet$ de $\mathscr{T}op$ dans $\mathscr{S}$ admet un adjoint à droite, appelé* réalisation géométrique

Si $S_\bullet$ est un ensemble simplicial, on note $|S_\bullet|$ sa réalisation géométrique. La proposition suivante (cf [GZ60]) est très importante en topologie (c'est par ailleurs l'exemple qui a motivé la notion d'adjonction définie par Kan)

Proposition 1.1.8 *La paire d'adjoint $(|.|, S_\bullet)$ est une équivalence de catégorie entre ${}^h\mathscr{T}op$ et ${}^h\mathscr{S}$, catégorie des localisations de $\mathscr{T}op$ et $\mathscr{S}$ par rapport à leurs équivalences d'homotopies faibles respectives.*

Tout espace topologique X est donc faiblement homotope à $|S_\bullet(X)|$, réalisation d'un ensemble simplicial, par l'application d'adjonction $X \to |S_\bullet(X)|$. Un CW-complexe est un espace homéomorphe à la réalisation d'un ensemble simplicial.

1.2 Suite spectrale de Serre

1.2.1 Définition

Soit $S_\bullet$ un espace simplical. On rappelle (voir [Dég98]) que le squelette d'ordre n de $S_\bullet$ (que l'on notera ici $S_{\bullet(n)}$) est le sous-ensemble simplical de $S_\bullet$ engendré par les simplexes d'ordre inférieur à n. Par ailleurs, $S_\bullet$ est de dimension finie inférieure à n ssi il n'a pas de simplexe non dégénéré d'ordre supérieur à n.

Soit $X \xrightarrow{f} B$ une fibration dans $\mathscr{T}op$. On suppose tout d'abord que B est connexe par arc : alors la fibre de f au-dessus d'un point est indépendante (à homotopie près) du point choisie ; on la note donc F.

On fait maintenant l'hypothèse que B a le type d'homotopie d'un ensemble simplicial de dimension fini, noté $S_\bullet$; la filtration «squelettale» de $S_\bullet$ induit alors une filtration sur X :

$$X_{(n)} = (e \circ f)^{-1} \left(\left|S_{\bullet(n)}\right|\right)$$

où $e : B \to |S_\bullet|$ est l'équivalence d'homotopie faible de notre hypothèse.

On en déduit une filtration *finie* du complexe $C_*(X)$ des chaines singulière de X, qui définit donc une suite spectrale de terme général $E^n_{p,q}$, appelée suite spectrale de Serre,

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}\left(X_{(p)}\right) / H_{p+q}\left(X_{(p-1)}\right) \Rightarrow H_{p+q}(X)$$

Proposition 1.2.1 *Dans les conditions ci-dessus, si B est simplement connexe, on a un isomorphisme canonique*

$$E^2_{p,q} \xleftarrow{\sim} H_p(B; H_q(F))$$

On a donc définit une suite spectrale de termes E^2

$$H_p(B; H_q(F)) \Rightarrow H_{p+q}(X)$$

Remarque 1.2.2 Si B n'est que connexe par arc, les termes E^2 de la suite spectrale sont les groupes d'homologies de B à coefficients «tordus» dans F vu comme $\pi_1(B)$-module.

1.2.2 Applications

1.2.2.1 Homologie rationnelle des espaces d'Eilenberg-Mac Lane

Ces espaces sont, comme on l'a vu, définis par leurs groupes d'homotopie. Grâce à la suite spectrale de Serre, on peut facilement calculer leur homologie :

Proposition 1.2.3 *Si $n \in \mathbb{N}$ est impair*

$$H_i(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & si\ i = 0\ ou\ n \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Si $n \in \mathbb{N}$ est pair, il existe $\iota_n \in H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$ tel que

$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\iota_n]$$

1.2.2.2 Opérations de Steenrod

Théorème 1.2.4 *Il existe une unique famille d'applications*

$$Sq^i : H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{*+i}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

qui vérifient en particulier

1. $Sq^0 = Id$
2. $Sq^i(x) = 0$ *si* $\deg(x) < i$
3. $Sq^n(x) = x^2$ *si* $\deg(x) = n$
4. $Sq^n(xy) = \sum_{i+j=n} Sq^i(x) Sq^j(y)$ *formule de Cratan*

Trouver une opération de la forme (c'est-à-dire un morphisme de copréfaisceau)

$$H^n(.; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{n+i}(.; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

revient en fait à choisir un élément de la classe d'homotopie suivante

$$[K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n), K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n+i)]$$

Partie 2

Analogie avec les schémas

2.1 Homologie singulière et correspondances

Soit k un corps algébriquement clos, et $\mathscr{L}/k$ la catégorie des schémas lisses, séparés, de type finis au-dessus de k, et irréductibles.

2.1.1 Schéma cosimplicial standard

Remarquons tout d'abord que l'on peut définir l'analogue de $\Delta_{\mathbb{R}}^{\bullet}$

1. $\underline{\Delta}_k^n = \left\{(x_0, ..., x_n) \in k^{n+1} \mid x_0 + ... + x_n = 1\right\}$ sous-variété de k^{n+1}, vu comme un sous-schéma de $\mathbb{A}^{n+1}$
2. pour toute application croissante σ de n dans m, on définit $\sigma_* : \underline{\Delta}_k^n \to \underline{\Delta}_k^m$, $(x_0, ..., x_n) \mapsto x_0.e_{\sigma(0)} + ... + x_n.e_{\sigma(n)}$ où $(e_0, ..., e_m)$ désigne la base canonique de k^{m+1}. C'est une application polynomiale en les x_i, donc un morphisme de variété.

2.1.2 Produit symétrique

La définition de l'homologie singulière des schémas par Suslin utilise la possibilité de construire l'espace symétrique dans le cas des schémas (voir [Ser59]).

Soit X un schéma de $\mathscr{L}/k$, que l'on suppose de plus quasi-projectif. On pose :

$$SP^n(X) = X^n/\Sigma_n$$

objet quotient qui se révèle être un schéma de $\mathscr{L}/k$.

Exemple 2.1.1 On a un isomorphisme canonique

$$SP^n(\mathbb{P}_k^1) \simeq \mathbb{P}_k^n$$

Dès lors, $M(X) = \coprod_{n\geq 0} SP^n(X)$ est encore un schéma, muni d'une loi de composition qui en fait un monoïde.

On ne cherche pas, comme dans le cas topologique à mettre une structure de schéma sur $M(X)$, et l'on s'intéresse plutôt au préfaisceau représenté par $M(X)$. Il admet alors une structure de préfaisceau de monoïde, et on note $L[X]$ le préfaisceau abélien qui lui correspond (sans chercher à le représenter dans $\mathscr{L}/k$) :

$$L[X] = \mathrm{Hom}_{\mathscr{L}/k}(., M(X))^+$$

Suivant maintenant l'équation 1.1

Définition 2.1.2 *L'homologie singulière de $X \in \mathscr{L}/k$, quasi-projectif, est définie par*

$$H_m^{sing}(X;\mathbb{Z}) = H_m\left(L[X](\underline{\Delta}_k^\bullet)\right)$$

L'homologie singulière de X à coefficient dans un groupe abélien G étant naturellement

$$H_m^{sing}(X;G) = H_m\left(G \otimes_{\mathbb{Z}} L[X](\underline{\Delta}_k^\bullet)\right)$$

Le théorème suivant, qui a motivé la définition de Suslin, est démontré dans [SV96]

Théorème 2.1.3 (Suslin-Voevodsky) *Soit X un schéma projectif lisse au-dessus de $\mathbb{C}$, alors l'application évidente de $\Delta_{\mathbb{R}}^\bullet \to \underline{\Delta}_{\mathbb{C}}^\bullet$ induit un isomorphisme*

$$H_m^{sing}(X;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_m(X(\mathbb{C});\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

où $X(\mathbb{C})$ désigne la variété analytique des points complexes de X

2.1.3 Lien avec les correspondances

A la différence du cas topologique, la théorie de l'intersection joue un rôle caché dans cette définition. Plus précisément, on fait appel à la notion de correspondance :

Définition 2.1.4 *Soit X et Y deux schémas de type fini au-dessus de k*

1. *Le groupe des cycles, $Z^n(X)$ sur X est le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés de X, intègres et de dimension n.*
   On pose encore $Z(X) = \coprod_n Z_n(X)$ groupe des cycles de X.
2. *Le groupe des correspondances de X à Y est simplement* $\mathrm{Cor}(X,Y) = Z(X \times_k Y)$

Remarque 2.1.5 Si $f : X \to Y$ est un morphisme propre (respectivement plat et de dimension relative) on peut définir un *push-forward* (respectivement *pull-back*) sur les cycles, $f_* : Z(X) \to Z(Y)$ (respectivement $f^* : Z(Y) \to Z(X)$) morphisme de groupes abéliens.

La théorie de l'intersection cherche à définir dans le cas général l'intersection de deux cycles. Il apparait effectivement que l'intersection de deux sous-variétés est formée de plusieurs composantes (irréductibles) chacune ayant une certaine multiplicité, comme par exemple dans le cas de l'intersection d'une courbe définie par un polynôme à une variable avec la sous-variété $\{0\}$. Toutefois, dans le cas général, on ne peut définir correctement l'intersection de deux cycles que s'ils *s'intersectent proprement.*

On peut à l'aide de cette notion d'intersection en déduire une loi de composition sur les correspondances : soit $\phi \in \mathrm{Cor}\,(X,Y)$ et $\psi \in \mathrm{Cor}\,(Y,Z)$, utilisant les applications

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \times Z \arrow[dl, "p_{XY}"'] \arrow[d, "p_{XZ}"] \arrow[dr, "p_{YZ}"] & \\ X \times Y & X \times Z & Y \times Z \end{tikzcd}$$

Si dès lors, ${p_{XY}}^*(\phi)$ et ${p_{YZ}}^*(\psi)$ s'intersectent proprement, on pose

$$\psi \circ \phi = p_{XZ*}\left({p_{XY}}^*(\phi).{p_{YZ}}^*(\psi)\right)$$

Or c'est plus exactement les correspondances *finies* de X dans Y qui vont nous être utiles : c'est le sous-groupe abélien libre de $\mathrm{Cor}\,(X,Y)$ ayant pour base les $\phi \subset X \times_k Y$ telle que $p : X \times_k Y \to X$ restreinte à ϕ est finie, et $p(\phi)$ est une composante irréductible de X.

Pour simplifier, on notera encore $\mathrm{Cor}\,(X,Y)$ le groupe des correspondances finies. La composition est alors bien définie comme précédemment (ie les cycles projetés s'intersectent proprement, et la composition est encore une correspondance finie) et l'on note $\mathscr{L}_{\mathrm{cor}}/k$ la catégorie ayant pour objets ceux de $\mathscr{L}/k$ et pour morphismes les correspondances finies.

Remarque 2.1.6 Si $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathscr{L}/k$, son graphe est une correspondance finie ; on a donc un foncteur (fidèle, égal à l'identité sur les objets)

$$i : \mathscr{L}/k \to \mathscr{L}_{\mathrm{cor}}/k$$

Les correspondances finies prennent leur origine dans la proposition suivante :

Proposition 2.1.7 (Suslin) *Soit X, Y dans $\mathscr{L}/k$, X étant quasi-projetif sur k*

1. *si $car(k) = 0$, on a un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\mathrm{Cor}\,(Y,X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(Y, M(X))^+$$

qui induit un isomorphisme de préfaisceaux abéliens

$$\mathrm{Cor}\,(.,X) \xrightarrow{\sim} L[X]$$

2. *sinon, $p = car(k)$, on a un isomorphisme entre les $\mathbb{Z}$-modules localisés en p*

$$\mathrm{Cor}\,(X,Y)_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(X, M(Y))_p^+$$

qui induit un isomorphisme de préfaisceaux abéliens

$$\mathrm{Cor}\,(.,X)_p \xrightarrow{\sim} L[X]_p$$

Il est donc naturel de poser, dans le cas général (ie X non nécessairement quasi-projectif),

$$L[X] = \mathrm{Cor}\,(.,X)$$

la définition 2.1.1 restant inchangé.

2.2 Cohomologie motivique

2.2.1 Préfaisceau d'Eilenberg-Mac Lane

On cherche à définir des objets dans $\mathscr{L}_{\mathrm{cor}}/k$ qui serait l'analogue des $K(\mathbb{Z},n)$ en topologie.

Rappelons que S^1 est l'espace $K(\mathbb{Z},1)$; par ailleurs, si $k = \mathbb{C}$, S^1 est naturellement homéomorphe à $\mathbb{C}^*$. Dans le cas général, c'est donc $\mathbb{G}_m(k) = k^*$, le groupe multiplicatif de k qui joue le rôle de $K(\mathbb{Z},1)$.

Mais on n'a plus de tels analogues si $n > 1$. Or l'objet qui nous intéresse est bien plutôt le préfaisceau L_n représenté par $K(\mathbb{Z},n)$, que l'espace en lui-même.

Il faut encore expliciter la situation en topologie pour y arriver. L'espace S^n est en effet construit à partir de S^1. On définit le sous-espace de $(S^1)^n$:

$$P = \coprod_{i=1}^{n} (S^1)^{i-1} \times \{1\} \times (S^1)^{n-i}$$

Alors S^n est homéomorphe à l'espace $(S^1)^n$ où l'on a identifié P à un seul point (le point base de S^n).

On a donc un isomorphisme de groupe

$$K(\mathbb{Z},n) = M^+(S^n)/_{*=0} \simeq M^+\left((S^1)^n\right)/M^+(P)$$
$$M^+(P) = \oplus_{i=1}^n M^+((S^1)^{i-1} \times \{1\} \times (S^1)^{n-i})$$

Comme annoncé, on raisonne avec les préfaisceaux abéliens $\mathrm{L}\,[X] = \mathrm{Cor}\,(.,X)$. On effectue les constructions suivantes :

$$\begin{array}{lr} S^1 \simeq M^+(S^1) & \mathrm{L}\,[\mathbb{G}_m] \\ M^+\left((S^1)^n\right) & \mathrm{L}\,[\mathbb{G}_m{}^n] \\ M^+(P) & \oplus_{i=0}^n \mathrm{L}\left[\mathbb{G}_m{}^{i-1} \times \{1\} \times \mathbb{G}_m{}^{n-i}\right] = P' \end{array}$$

On obtient donc finalement l'analogue de l'espace d'Eilenberg Mac-Lane $K(\mathbb{Z},n)$, c'est-à-dire du préfaisceau qu'il représente,

$$L_n = \mathrm{L}\,[\mathbb{G}_m{}^n]\,/P'$$

2.2.2 Hypercohomologie et définition

Suivant finalement le résultat du paragraphe 1.1.7, on définit le complexe de préfaisceau abélien sur $\mathscr{L}/k$, noté $\mathbb{Z}(n)$, en réajustant les indices :

$$\mathbb{Z}(n)^i = L_n(. \times \underline{\Delta}_k^\bullet)_{n-i}$$

Dans le cas des espaces topologiques, la cohomologie du groupe simplicial $\mathbb{Z}(n)(X)$ coïncide avec l'homologie singulière de X. Dans $\mathscr{L}/k$, on a besoin de plus d'information sur le complexe $\mathbb{Z}(n)$, celle donnée par l'hypercohomologie de Zariski :

On se place dans la catégorie $\mathscr{F}$ des faisceaux (pour la toplogie de Zariski) abéliens sur $\mathscr{L}/k$, qui est une catégorie abélienne. $\mathbb{Z}(n)$ est un complexe dans cette catégorie, et suivant [CE56], on peut construire une résolution $\mathbb{Z}(n) \to I^{\bullet\bullet}$ sur cette catégorie, où $I^{\bullet\bullet}$ est un bicomplexe de faisceaux injectifs.

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\mathbb{Z}(n)^{-i} \arrow[r] \arrow[d] & I^{-i,0} \arrow[r] \arrow[d] & I^{-i,1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\mathbb{Z}(n)^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & I^{-1,0} \arrow[r] \arrow[d] & I^{-1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\mathbb{Z}(n)^{0} \arrow[r] \arrow[d] & I^{0,0} \arrow[r] \arrow[d] & I^{0,1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\mathbb{Z}(n)^{n} \arrow[r] \arrow[d] & I^{n,0} \arrow[r] \arrow[d] & I^{n,1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Le groupe d'hypercohomologie de X à coefficient dans $\mathbb{Z}(n)$ (pour la topologie de Zariski) est alors égal, en degré m, à

$$H^m\Big(\mathrm{Tot}(I^{\bullet\bullet}(X))\Big)$$

Définition 2.2.1 *La cohomologie motivique du schéma X de $\mathscr{L}/k$, notée $H^m_{\mathscr{Z}ar}(X;\mathbb{Z}(n))$ est l'hypercohomologie du complexe de faisceaux pour la topologie de Zariski $\mathbb{Z}(n)$ définie par la formule précédente*

2.3 Quelques résultats

2.3.1 Premiers résultats

1. $\mathbb{Z}(0)$ est le complexe formé du faisceau constant $\mathbb{Z}$ en degré 0 et de 0 ailleurs. En particulier

$$H^i_{\mathcal{Z}ar}(X;\mathbb{Z}(0)) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\pi_0(X)} & \text{si } i=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. $\mathbb{Z}(1)$ est le complexe formé du faisceau constant $\mathscr{O}^*$ (qui au schéma X associe le groupe des sections globales inversibles de X) en degré 1 et de 0 ailleurs. En particulier

$$H^i_{\mathcal{Z}ar}(X;\mathbb{Z}(1)) = \begin{cases} \mathscr{O}^*(X) & \text{si } i=1 \\ \mathrm{Pic}(X) & \text{si } i=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Dans le cas général,

$$H^n_{\mathcal{Z}ar}(X;\mathbb{Z}(m)) = 0 \text{ si } n-m > \max(\dim(X), m)$$

4. On a une structure produit sur l'anneau bigradué $H^*_{\mathcal{Z}ar}(X;\mathbb{Z}(*))$ induite par

$$H^i_{\mathcal{Z}ar}(X;\mathbb{Z}(n)) \otimes H^j_{\mathcal{Z}ar}(X;\mathbb{Z}(m)) \to H^{i+j}_{\mathcal{Z}ar}(X;\mathbb{Z}(n+m))$$

5. On a un isomorphisme d'anneaux gradués

$$K^M_*(k) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n_{\mathcal{Z}ar}(\mathrm{Spec}(k);\mathbb{Z}(n))$$

entre l'anneau de K-théorie de Milnor du corps k et le sous-anneau de $H^*_{\mathcal{Z}ar}(X;\mathbb{Z}(*))$

6. Pour tout n, m, on a un isomorphisme d'anneaux

$$CH^n(X) \xrightarrow{\sim} H^{2n}_{\mathcal{Z}ar}(X;\mathbb{Z}(n))$$

où $CH^n(X)$ désigne le groupe de Chow de X (formés des cycles de X de codimension n modulo équivalence rationnelle).

2.3.2 Applications

Le premier succès de la cohomologie motivique est la démonstration de la conjecture de Milnor :

Théorème 2.3.1 *L'application canonique*

$$K_*(k) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to H^*(\mathrm{Gal}(k); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

de la K-théorie de Milnor du corps k, vers la cohomologie du groupe de Galois absolu de k modulo 2 est un isomorphisme.

La méthode de démonstration consiste à voir ces deux groupes comme des groupes de cohomologie motivique, et à se ramener à un théorème de comparaison.

2.3.3 Suite spectrale

Dans [Ros96], Rost définit des groupes de Chow généralisés. Plus précisément, s'appuyant sur les propriétés du foncteur de K-théorie de Milnor (sur les corps), il définit des foncteurs de cycles généralisés, notés M, qui sont essentiellement des K_*^M-modules, appelés pour cette raison modules de cycles.

Pour X un schéma de type fini au-dessus d'un corps, il en déduit alors un complexe de cochaînes à coefficients dans M (construit à partir des cycles de codimension n dans X définis dans 2.1.3), noté $C^*(X; M)$, dont les groupes de cohomologie sont appelés groupes de Chow de X à coefficient dans M, notés $A^*(X; M)$.

Cette définition étend en particulier celle des groupes de Chow (cycles modulo équivalence rationnelle), et on a en particulier

$$A^n(X; K_{*-n}^M(X)) = CH^n(X)$$

Or, l'origine de mon travail se situe dans la définition par Rost d'une suite spectrale de Leray-Serre pour ces groupes de cohomologie.

Soit $X \xrightarrow{f} B$ un morphisme plat et de type fini, M un module de cycle.On en déduit tout d'abord une filtration finie de $C^*(X; M)$ (en $\dim(B)$ termes), et une suite spectrale associée. Par ailleurs, on peut définir une famille de modules de cycles $(A^q[f; M])_{q \in \mathbb{N}}$ telle que le terme E_2 de la suite spectrale est

$$E_2^{p,q} = A^p\big(B; A^q[f; M]\big) \Rightarrow A^{p+q}(X)$$

Bibliographie

[CE56] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological algebra.* Princeton, 1956.

[Dég98] Frédéric Déglise. Complétion par résolution cosimpliciale, sept. 1998. Mémoire de DEA, sous la direction de L.Schwartz.

[GZ60] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fraction.* Springer, 1960.

[Mor98] F. Morel. Voevodsky's proof of milnor's conjecture. *Bul. of the AMS*, 35(2) :123–143, 1998.

[MV99] F. Morel and Voevodsky V. A^1-homotopy of schemes. preprint, 1999.

[Ros96] M. Rost. Chow groups with coefficients. *Doc. Math. J.*, pages 319–393, 1996.

[Ser59] J.P. Serre. *Groupes algébriques et corps de classe.* Hermann, 1959.

[SV96] A. Suslin and V. Voevodsky. Singular homology of abstract algebraic varieties. *Inv. Math.*, 123 :61–94, 1996.

[SV99] A. Suslin and V. Voevodsky. Bloch-kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients. preprint, 1999.

[Voe95] V. Voevodsky. Triangulated categories of motives over a field. preprint, 1995.