Introduction à la topologie de Nisnevich

Frédéric Déglise

25 novembre 1999

Introduction

Si X est un schéma quelconque, on note $\mathscr{S}ch_X$ la catégorie des X-schémas de type fini. Par ailleurs, on note $\mathscr{L}_X$ la sous-catégorie de $\mathscr{S}ch_X$ formée des X-schémas lisses, et $\mathscr{E}t_X$ la sous-catégorie de $\mathscr{L}_X$ formée des X-schémas étales.

Si $\mathscr{C}$ est une catégorie quelconque et $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathscr{C}$, on note $\mathscr{C}_\mathcal{T}$ le site correspondant et $\widetilde{\mathscr{C}_\mathcal{T}}$ le topos correspondant.

Par ailleurs, on note respectivement Zar, Et et Can les topologies *de Zariski*, *étale* et *canonique* sur $\mathscr{S}ch_X$. On notera de même les topologies respectives induites sur $\mathscr{L}_X$ et $\mathscr{E}t_X$.

Enfin, on adopte la convention habituelle suivant laquelle X_{Zar} désigne le site des ouverts de X (ou encore les objets immergés dans X), et X_{Et} celui des X-schémas étales.

Partie 1

Notion de voisinage en topologie étale

1.1 Points géométriques

Définition 1.1.1 *On appelle point géométrique tout spectre d'un corps séparablement clos.*

On note encore $\mathscr{G}eo$ la sous-catégorie pleine des schémas formée des points géométriques.

1.1.1 Préliminaires : topos étale sur un corps

On étudie le cas particulier du site $\widetilde{X}_{\mathrm{Et}}$ où X est le spectre d'un corps k, noté $\widetilde{k}_{\mathrm{Et}}$.

Lemme 1.1.2 *Soit X un schéma net et de type fini sur k, alors il existe L_1, ..., L_n extensions finies séparables de k telles que*

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathrm{Spec}\,(L_i)$$

Preuve : En effet, X étant noethérien, on est ramené au cas d'une k-algèbre A nette et de type fini sur k. Alors $\Omega^1_{A/k} = 0$ implique que A ne contient pas d'éléments transcendants, donc A est une k-algèbre finie. A est alors produit de ses composants locaux.

On peut donc supposer, en remplaçant A par ses composants locaux, que A est une k-algèbre locale, finie et nette, dont le corps résiduel est k. Alors, $\mathscr{M}/\mathscr{M}^2 = \Omega^1_{B/k} \otimes_B k = 0$ où $\mathscr{M}$ est son idéal maximal. D'après le lemme de Nakayama, $\mathscr{M}$ est nul et A est un corps, nécessairement séparable sur k $\square$

Remarque 1.1.3 Soit F un objet du topos $\widetilde{k}_{\mathrm{Et}}$. F étant en particulier un faisceau pour Zariski, il commute aux sommes disjointes finies ; sa valeur sur les extensions finies séparables de k suffit donc à le caractériser. On notera encore F le foncteur induit sur la catégorie des extensions finies séparables de k, notée $\widetilde{k}^s_{\mathrm{Et}}$ (ie la partie «semi-simple» de $\widetilde{k}_{\mathrm{Et}}$).

Dans le cas d'un point géométrique, le topos étale est particulièrement simple ; c'est même un topos ponctuel :

Proposition 1.1.4 *Soit $X = \mathrm{Spec}\,(\Omega)$ un point géométrique, alors le foncteur suivant*

$$\widetilde{\Omega}_{\mathrm{Et}} \to \mathscr{E}ns, F \mapsto F(\Omega)$$

est un isomorphisme de catégorie. C'est le foncteur fibre canonique associé à X, qui correspond à l'unique point du topos $\widetilde{\Omega}_{\mathrm{Et}}$.

Preuve : En effet, tout objet de Ω_{Et} est une somme finie de copies de $\mathrm{Spec}\,(\Omega)$. En conséquence, la catégorie Ω_{Et} est équivalente à la catégorie $\mathbb{N}$ des ensembles finis. Par ailleurs, $\widetilde{\Omega}_{\mathrm{Et}}$ est simplement la catégorie des foncteurs sur $\mathbb{N}$ commutant aux sommes disjointes (finies). Un tel foncteur est bien déterminé de manière unique par sa valeur sur l'ensemble 1. □

Plus précisément, on peut donner la structure de tout topos étale associé à un corps :

Proposition 1.1.5 *Soit $\bar{k}$ une cloture séparable de k, $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu de k (groupe pro-fini totalement discontinu, indépendant à isomorphisme près du choix de $\bar{k}$).*

On a une équivalence de catégorie

$$\widetilde{k}_{\mathrm{Et}} \xrightarrow{j} G - \textit{ensembles discrets} = \mathscr{B}_G$$

Preuve : On pose, si F est un faisceau étale sur k, $j(F) = \varinjlim_{L/k \text{ finie},\ L\subset\bar{k}} F(L)$. Alors $j(F)$ est un ensemble sur lequel G opère continument.

Réciproquement, soit E un G-ensemble discret. On considère le préfaisceau F_E défini sur la sous-catégorie de $\widetilde{k}^s_{\mathrm{Et}}$ formée des extensions finies séparables de k inclue dans $\bar{k}$ par

$$F_E(L) = E^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/L)}$$

Or le foncteur d'inclusion de cette sous-catégorie dans $\widetilde{k}^s_{\mathrm{Et}}$ est une équivalence de catégorie. On peut donc prolonger F_E à $\widetilde{k}^s_{\mathrm{Et}}$ de manière *essentiellement* unique, puis à $\widetilde{k}_{\mathrm{Et}}$ de manière unique en un foncteur commutant aux sommes disjointes (finies). Alors, F_E est un faisceau.

1.2 Point géométrique d'un schéma

Définition 1.2.1 *On note $\mathscr{G}eo/X$ la sous-catégorie pleine des schémas au-dessus de X formée des points géométriques au-dessus de X.*

Tout objet de $\mathscr{G}eo/X$ est encore appelé point géométrique de X

Exemple 1.2.2 Si x est un point de l'espace topologique X, et $\kappa(\bar{x})$ une cloture séparable du corps résiduel de x le morphisme canonique $\bar{x}$ qui s'en déduit est un point géométrique de X. Par ailleurs, on a un foncteur de $\mathscr{G}eo/X$ dans l'ensemble discret sous jacent à X (le foncteur image du morphisme associé). Les points géométriques de X décrits plus haut sont exactement les objets minimaux (et non pas initiaux) de $\mathscr{G}eo/X$.

On a alors un foncteur de $\mathscr{G}eo/X$ dans la catégorie des points du topos $\widetilde{X}_{\mathrm{Et}}$, qui à un point géométrique associe le foncteur entre topos qui s'en déduit (ce dernier est bien un foncteur fibre d'après la proposition 1.1.2). Plus précisément, si $\bar{x}$ est un point géométrique de X, on note $\bar{x}^*$ le foncteur de $\widetilde{X}_{\mathrm{Et}} \to \widetilde{\Omega}_{\mathrm{Et}}$ (c'est le foncteur image inverse du morphisme de topos associé à l'application de définition de $\bar{x}$), alors la fibre d'un faisceau étale F sur X au point x est

$$F_{\bar{x}} = (\bar{x}^*(F))(\Omega)$$

Proposition 1.2.3 *On considère le morphisme canonique de $\widetilde{X}_{\mathrm{Et}} \to \widetilde{X}_{\mathrm{Zar}}$. Alors, celui-ci induit une équivalence de catégorie*

$$\mathrm{pt}\left(\widetilde{X}_{\mathrm{Et}}\right) \to \mathrm{pt}\left(\widetilde{X}_{\mathrm{Zar}}\right)$$

PREUVE : La démonstration repose sur le fait que tout foncteur fibre d'un site $\mathscr{C}$ est limite inductive filtrante de foncteurs représentés par les voisinages du point associé au foncteur fibre. Par ailleurs, un tel foncteur fibre induit une fonction booleïenne sur les ouverts du topos associé au site $\mathscr{C}$.

Dès lors, la catégorie des points du topos étale de X est équivalente à l'ensemble sous-jacent à X ordonné par la relation de spécialisation. De plus, la famille des points de X est une famille conservative de points.

Si $\bar{x}$ désigne un point géométrique d'image x dans X, on a vu que $\bar{x}$ définissait de manière canonique un point de $\widetilde{X}_{\mathrm{Et}}$. Ce point est isomorphe au point associé à x par la proposition précédente.

Remarque 1.2.4 La proposition précédente jointe à la proposition 1.1.5 implique en particulier la réciproque de la proposition 1.1.4 suivante : $\widetilde{X}_{\mathrm{Et}}$ est ponctuel ssi X est un point géométrique.

1.3 Voisinages

On rappelle que, dans un topos $\mathscr{E}$, les voisinages d'un point du topos sont exactement les préfaisceaux de $\mathscr{E}^0$ au-dessus du foncteur fibre associé au point. On va voir qu'on peut se contenter des voisinages suivants :

Définition 1.3.1 *Soit $\bar{x}$ un point géométrique de X. Un voisinage étale de $\bar{x}$ est un couple (V, u) où V est un schéma étale et de type fini au-dessus de X, et u un élément de $V(\Omega)$, ou encore un point géométrique de V au-dessus de $\bar{x}$ (les morphismes que nous regardons sont en effet toujours des X-morphismes) :*

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d] \\ \Omega \arrow[ur] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Si x est l'image de $\bar{x}$ dans X, il est encore équivalent de se donner un X-schéma V étale de type fini et un point v de V au-dessus de x tel que Ω soit une extension séparablement close de $\kappa(v)$ (ainsi qu'une extension séparablement close de $\kappa(x)$ par définition). On note $\mathscr{V}_{\bar{x}}(X)$ la catégorie des voisinages de $\bar{x}$ dans X, les morphismes étant les morphismes au-dessus de X et de $\bar{x}$.

Plus généralement, un voisinage étale minimal de $\bar{x}$ dans X est un couple (V, v) où V est un X-schéma étale de type fini, et v un point au-dessus de x dont le corps résiduel est égal à Ω. On note $\mathscr{V}_{\bar{x}}^m(X)$ la sous-catégorie pleine correspondante. On note enfin $\mathscr{V}_{\bar{x}}^{am}(X)$ la sous-catégorie pleine des voisinages affines.

Alors $\mathscr{V}_{\bar{x}}^{am}(X) \subset \mathscr{V}_{\bar{x}}^m(X) \subset \mathscr{V}_{\bar{x}}(X) \subset \mathscr{V}_{\bar{x}}(\widetilde{X}_{\mathrm{Et}})$ est une suite de sous-catégories pleines cofinales, dont la dernière est la catégorie des voisinages du point définit par $\bar{x}$ dans le topos $\widetilde{X}_{\mathrm{Et}}$ au sens habituel. Toutes ces catégories sont filtrantes.

Proposition 1.3.2 *Soit $\bar{x}$ un point géométrique minimal de X, et F un objet de $\widetilde{X}_{\mathrm{Et}}$, la fibre de F en $\bar{x}$ se calcule par la formule*

$$F_{\bar{x}} \simeq \varinjlim_{(V,v) \in \mathscr{V}_{\bar{x}}^{am}(X)^0} F(V)$$

Preuve : si l'on note $\mathscr{E} = \widetilde{X}_{\mathrm{Et}}/\varphi_{\bar{x}}$ et φ le foncteur fibre associé au point $\bar{x}$,la catégorie $\mathscr{V}_{\bar{x}}(X)$ est égale (ou isomorphe si l'on veut) à la catégorie $\mathscr{E}^0/\varphi$ où l'on interprète φ comme un préfaisceau sur $\mathscr{E}^0$. En particulier, c'est un fait général que

$$\varinjlim_{F \in \mathscr{E}^0/\varphi} F \simeq \varphi$$

Il suffit maintenant de se restreindre à la sous-catégorie cofinale $\mathscr{V}_{\bar{x}}^{am}(X)$ pour conclure. $\square$

Partie 2

Topologie de Nisnevich

2.1 Voisinage de Nisnevich

2.1.1 Définitions

On va modifier la notion de voisinage étale pour arriver à la topologie de Nisnevich :

Définition 2.1.1 *Soit X un schéma et $x \in X$ un point. On appelle voisinage de Nisnevich de x dans X tout couple (V, y) où V est un schéma étale et de type fini sur X, y un point au-dessus de x telle que l'extension résiduelle $\kappa(y)/\kappa(x)$ associée à f soit triviale.*

On utilisera particulièrement le lemme de «structure» suivant pour les voisinages de Nisnevich :

Lemme 2.1.2 *On se place dans la catégorie $\mathscr{S}ch_S$ (ou simplement des S-schémas localement de présentation finie sur S).*

Soit X un S-schéma irréductible, x le point générique de X. Soit (V, y) un S-schéma pointé au-dessus de (X, x), définit par le S-morphisme pointé $f : (V, y) \to (X, x)$ (non nécessairement étale). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *f induit un isomorphisme de $\kappa(x)$ dans $\kappa(y)$*
2. *Il existe un ouvert U de X contenant x, et un morphisme $s : (U, x) \to (V, y)$ qui est une section de $f|_{f^{-1}(U)}$: $f \circ s = Id_U$*

Preuve : Il suffit d'appliquer le lemme suivant

Lemme 2.1.3 *Soit S un schéma quelconque et s un point de S. Soit (X, x) et (Y, y) deux (S, s)-schémas, Y étant localement de présentation finie sur S.*
Soit $\mathcal{F}((X, x), (Y, y))$ le germe des S-morphismes de X dans Y envoyant x

sur y (ie les S-morphismes de schémas définis sur un voisinage ouvert de x, envoyant x en y). Alors on a une bijection

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}\left((X,x),(Y,y)\right) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{loc}-\mathcal{O}_{S,s}}\left(\mathcal{O}_{Y,y},\mathcal{O}_{X,x}\right) \\ f & \mapsto & f_x^\sharp \end{array}$$

On peut supposer X réduit en remplaçant f par f_{red}. Dès lors, x étant le point générique de X, $\mathcal{O}_{X,x} = \kappa(x)$. Soit φ l'application

$$\mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \kappa(y) \xrightarrow{(\bar{f}_y^\sharp)^{-1}} \kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}$$

D'après le lemme, ce morphisme local correspond à un S-morphisme s définit sur un voisinage ouvert de x. Par ailleurs, si l'on se restreint à un ouvert U encore plus petit, compte tenu de ce que $(f \circ s)_x^\sharp = Id$, s définit bien une section de $f|_U$. $\square$

Remarque 2.1.4 Le cas des k-algèbres étales locales de corps résiduel k montre qu'on ne peut pas espérer obtenir une telle section sur un ouvert en général (mais seulement un ouvert localement fermé).

Définition 2.1.5 *On définit maintenant la topologie de Nisnevich sur $\mathscr{S}ch_S$, notée* Nis *comme la topologie engendrée par les familles couvrantes*

$$(V_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$$

telle que

(N_1) *f_i est un S-morphisme étale*

(N_2) *Pour tout point x de X, il existe i tel que V_i est un voisinage de Nisnevich de X en x.*

La topologie Nis s'insére dans l'ordre suivant (ordre «plus fin» sur les topologies de $\mathscr{S}ch_S$) :

$$\mathrm{Can} \geq \mathrm{Et} \geq \mathrm{Nis} \geq \mathrm{Zar}$$

En particulier, tout préfaisceau représentable sur $\mathscr{S}ch_S$ est un faisceau pour Nis.

2.1.2 Exemple du topos de Nisnevich sur un corps

On étudie maintenant le cas du site k_{Nis}, c'est-à-dire le site des k-schémas étales de type fini muni de la toplogie de Nisnevich. On va voir que le topos qui s'en déduit est équivalent au topos de Zariski.

Lemme 2.1.6 *Soit F un préfaisceau sur $\mathscr{E}t_k$, alors il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. *F commute aux sommes disjointes finies*
2. *F est un faisceau pour la topologie de Zariski*
3. *F est un faisceau pour la topologie de Nisnevich*

PREUVE : (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) est claire. Par ailleurs, pour (1) $\Rightarrow$ (3), il suffit de remarquer que tout recouvrement de X pour la topologie de Nisnevich peut-être raffiné par le recouvrement trivial formé du singleton (Id_X). $\square$

Corollaire 2.1.7 *Soit $\widetilde{k}^s_{\mathrm{Et}}$ la catégorie des extensions finies séparables de k, alors le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{k}_{\mathrm{Nis}} & \to & \widehat{\left(\widetilde{k}^s_{\mathrm{Et}}\right)^0} \\ F & \mapsto & F \circ \mathrm{Spec} \end{array}$$

est une équivalence de catégorie du topos de Nisnevich vers le topos des copréfaisceaux sur la catégorie des extensions finies séparables de k

Corollaire 2.1.8 *Soit Y un k-schéma étale fini quelconque, alors le foncteur sections globales*

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(Y;.) : \widetilde{k}_{\mathrm{Nis}} & \longrightarrow & \mathscr{E}ns \\ F & \longmapsto & F(Y) \end{array}$$

est exact.

2.2 Base pour la topologie de Nisnevich

Par ailleurs, tout recouvrement de X pour la topologie de Zariski sur $\mathscr{S}ch_S$ admet un sous-recouvrement fini (car X est noethérien donc quasi-compact). Le lemme de structure nous permet de déduire une propriété semblable pour Nis. Plus précisément,

Lemme 2.2.1 (de stratification) *Soit $\left(X_i \xrightarrow{f_i} X\right)_{i\in I}$ un recouvrement de X pour la topologie de Nisnevich sur $\mathscr{S}ch_S$.*

Alors il existe un suite finie décroissante de fermés de X (appelée «stratification» de X)

$$X \supset_{\neq} Z_{j_0} \supset_{\neq} ... \supset_{\neq} Z_{j_n} \supset_{\neq} Z_{j_{n+1}} = \emptyset$$

tel que $\{j_0, ..., j_{n+1}\} \subset I$ et pour tout indice m, $f_{j_m}|_{Z_{j_m} - Z_{j_{m+1}}}$ admet une section.

Preuve : On applique le lemme de structure en un point générique x de X, j_0 étant l'indice du voisinage lui correspondant dans le recouvrement considéré. On obtient alors un ouvert U_{j_0} de X contenant x tel que f_{j_0} admet une section définie sur U_{j_0}.

On applique maintenant cette construction au fermé $Z_{j_0} = X - U_{j_0}$. On obtient ainsi une suite strictement décroissante de fermés de X, donc ce procédé est nécessairement fini puisque X est noethérien. $\square$

Maintenant, si $f : V \to X$ admet une section sur un sous-schéma X' de X, alors c'est un voisinage de Nisnevich de X en tous points de X'. En particulier, puisque la famille d'ouverts $(U_j)_{j\in J}$ recouvre X, $(f_j)_{j\in J}$ est déjà un recouvrement pour Nisnevich de X.

En fait le lemme de stratification donne même un résultat plus précis sur la topologie de Nisnevich.

Définition 2.2.2 *On appelle* carré distingué (élémentaire) *dans $\mathscr{L}_S$ tout diagramme cartésien dans $\mathscr{S}ch_S$*

$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook, "i"] & X \end{tikzcd}$$

tel que

1. *i est une immersion ouverte*
2. *p est étale*
3. *Si l'on note $Z = X - U$ sous-espace de X muni de sa structure de sous-schéma réduit, p induit un isomorphisme $p^{-1}(Z) \to Z$.*

   La famille couvrante (i, p) de X est alors appelée «élémentaire»

Proposition 2.2.3 *Les recouvrements associés aux carrés distingués forment une base pour la topologie de Nisnevich.*

Preuve : On note $T'(X)$ l'ensemble des familles couvrantes élémentaires de X, et $\mathcal{T}'$ la topologie la moins fine sur $\mathscr{S}ch_S$ telle que ces familles soient couvrantes.

On doit montrer que $\mathcal{T}' = \text{Nis}$. Or, toute famille couvrante élémentaire étant couvrante pour Nisnevich, on a $\mathcal{T}'$ est moins fine que Nis. Réciproquement, soit $\left(V_i \xrightarrow{f_i} X\right)_{i\in I}$ un recouvrement pour Nisnevich. On cherche à voir que le crible R engendré par cette famille est un crible couvrant pour $\mathcal{T}'$. D'après la remarque qui suit le lemme de stratification, on peut donc supposer que I est fini, et par suite, on peut supposer que R est engendré par une unique application, $f = \sum_{i\in I} f_i : Y = \coprod_{i\in I} V_i \to X$.

On raisonne par récurrence sur la longeur d'une chaîne de stratification de X. Soit Z le premier terme d'une stratification de longueur n de X. Par définition, f admet une section sur $U = X - Z$, notée s. On note encore $Y' = f^{-1}(U) - Im(s)$, et $V = Y - Y'$. Dès lors, $(i : U \to X, V \xrightarrow{f} X)$ forment un recouvrement élémentaire de X (en effet, $f^{-1}(U) \bigcap V = Im(s)$). Par ailleurs, $Y \times_X U \to U$ admet une stratification de longueur $n-1$ (donnée par la stratification d'ordre n de X déjà choisie), donc est couvrante pour la topologie $\mathcal{T}'$. Or le crible couvrant R est obtenu par composition des familles couvrantes $((Y \times_X U \to U), (Id_V))$ avec la famille couvrante $(U \to X, V \to X)$, il appartient dont à $\mathcal{T}'$. $\square$

On obtient une forme agréable de ce théorème en notant de plus que la collection des familles couvrantes élémentaires est stable par changement de base. Donc, d'après le corollaire 2.3 de [AJM73], exposé II, pour voir que F est un faisceau pour $\mathcal{T}'$, il suffit de le tester sur les familles couvrantes élémentaires.

Corollaire 2.2.4 *Soit F un préfaisceau sur $\mathscr{S}ch_S$. Alors, F est un faisceau pour la topologie de Nisnevich ssi F transforme tout carré distingué en un diagramme cartésien ie*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d] & F(V) \arrow[d] \\ F(U) \arrow[r] & F(U \times_X V) \end{tikzcd}$$

Partie 3

Localisation en topologie de Nisnevich : Anneaux henséliens

On va faire l'étude du topos $\widetilde{X}_{\text{Nis}}$ de manière analogue au cas de la topologie étale.

3.1 Points

Définition 3.1.1 *Soit x un point de X et F un faisceau, objet de $\widetilde{X}_{\text{Nis}}$.*

Si $\mathscr{V}_x^a(X_{\text{Nis}})$ désigne la catégorie des voisinages affines de Nisnevich de X en x, on définit le foncteur fibre suivant :

$$F_x \simeq \varinjlim_{(V,v)\in\mathscr{V}_x^a(X_{\text{Nis}})^0} F(V)$$

Plus généralement, considérant le morphisme d'immersion $i : x \to X$, il induit un morphisme de topos $\widetilde{x}_{\text{Nis}} \to \widetilde{X}_{\text{Nis}}$. Par ailleurs, pour tout Y $\kappa(x)$-schéma étale et de type fini, le foncteur section globale $\Gamma(Y;.)$ est exact et commute aux limites inductives ; il induit donc un morphisme de topos $\mathscr{E}ns \to \widetilde{x}_{\text{Nis}}$.

On obtient en particulier, pour tout $\kappa(x)$-schéma Y étale de type fini, un point du topos $\widetilde{X}_{\text{Nis}}$. Si L est une extension finie séparable de $\kappa(x)$, on notera x_L le point du topos de Nisnevich associé.

Le foncteur fibre définit plus haut est alors le foncteur fibre associé au point $x_{\kappa(x)}$.

On obtient dès lors la proposition :

Proposition 3.1.2

1. *La famille $(x_L)_{x,L}$ est une famille conservative de points pour le topos $\widetilde{X}_{\text{Nis}}$.*
2. *Soit $F \to G$ est un morphisme dans $\widetilde{X}_{\text{Nis}}$. Si pour tout x point de X, le morphisme induit $F_x \to G_x$ est un isomorphisme, alors $F(X) \to G(X)$ est un isomorphisme.*

Preuve : On montre seulement la deuxième affirmation, la première s'en déduisant de manière évidente.

Soit $u : F \to G$ un morphisme de faisceau.

On montre d'abord que si pour tout point x de X, u_x est injective alors u est un monomorphisme. Tout d'abord, $u_X : F(X) \to G(X)$ est injective. Soit donc s, t deux X-sections de F, telles que $u_X(s) = u_X(t)$. Alors pour tout x point de X, considérant le morphisme canonique $F(X) \to F_x$, $u_x(s_x) = u_x(t_x)$, donc $s_x = t_x$ dans l'ensemble F_x. Par le calcul de la proposition précédente, celà implique qu'il existe (V, v) voisinage de Nisnevich de X en x telle que $s|_V = t|_V$. Par ailleurs, appliquant ceci en tous points de X, on obtient un recouvrement pour Nisnevich de $V_i \to X$ tel que $s|_{V_i} = t|_{V_i}$, ce qui implique $s = t$ (puique F est un faisceau pour Nisnevich).

Supposons maintenant que pour tout point x, u_x est un isomorphisme, et montrons que u est alors un isomorphisme. Comme précédemment, il suffit de voir que u_X est surjective. Soit donc s' une section dans $G(X)$, comme u_x est surjectve, il existe un élément α dans F_x d'image s'_x. Encore une fois, le calcul de F_x montre que α se relève sur un voisinage (de Nisnevich) de x, noté V_x. On note encore s_{V_x} la V-section de F dont la fibre est α. Dès lors, le système des s_{V_x} et s_{V_y} coïncident sur $V_x \times_X V_Y$ car elles ont même image par u qui est déjà un monomorphisme. Comme F est un faisceau pour Nisnevich, le système des $(s_{V_x})_{x \in X}$ se relève en une section s dans $F(X)$, dont l'image par u_x est égale à s'. $\square$

Remarque 3.1.3 Ainsi, dans le langage des topos, les voisinages généralisent exactement la notion de voisinage dans les espaces topologiques, et l'image des éléments de $F(X)$ dans la fibre F_x correspond exactement au germe de la section. Les raisonnements classiques se généralisent ipso-facto.

3.2 Fibres et anneaux henséliens

Comme le schéma X, le topos $\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}}$ est canoniquement annelé (ce qui est déjà valable pour la topologie étale et même pour la topologie fpqc) :

Définition 3.2.1 *On définit $\mathscr{O}_{\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}}}$ comme l'anneau du topos $\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}}$ définit par, X' étant un X-schéma (étale et de type fini sur X)*

$$\mathscr{O}_{\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}}}(X') = \Gamma(X'; \mathscr{O}_{X'})$$

Dès lors, si x est un point de X, la fibre de $\mathscr{O}_{\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}}}$ en x est un anneau, qu'on appelle anneau local du topos $\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}}$ au point x. Par ailleurs, la formule de la proposition 3.1.2 permet le calcul de cette fibre

$$\mathscr{O}_{\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}},x} \simeq \varinjlim_{(V,v) \in \mathscr{V}_x^a(X_{\mathrm{Nis}})^0} \mathscr{O}_{\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}}}(V) \simeq \varinjlim_{A \in \mathcal{I}} A$$

où $\mathcal{I}$ est la catégorie des $\kappa(x)$-algèbres locales étales de corps résiduel $\kappa(x)$.

Ces anneaux locaux sont bien connus en algèbre :

3.3 Anneaux henséliens

Définition 3.3.1 *Un anneau A est* hensélien *ssi*

1. *A est local*
2. *toute A-algèbre finie B est décomposée :*

$$B \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in \mathrm{Spem}(B)} B_x$$

Remarque 3.3.2 A étant local et B étant une A-algèbre finie, l'ensemble des idéaux maximaux de B est fini.

On utilisera particulièrement la caractérisation suivante des anneaux henséliens :

Proposition 3.3.3 *Soit A un anneau local, k son corps résiduel, $X =$ $\mathrm{Spec}\,(A)$ et m son point fermé ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A hensélien*
2. *Pour tout morphisme étale $Y \xrightarrow{f} X$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
   - *(a) f admet une section*
   - *(b) Y est un voisinage de Nisnevich de X en m*

   Ce que l'on peut encore exprimer en disant qu'une section en haut du diagramme suivant se descend sur X

$$\begin{tikzcd} Y \times_X m \arrow[r] \arrow[d] & m \arrow[l, bend right] \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Utilisant cette caractérisation, il est immédiat que l'anneau $\mathscr{O}_{\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}},x}$ est hensélien.

Par ailleurs, soit $\mathscr{A}_l$ la catégorie des anneaux locaux munis des morphismes locaux. Si A est un anneau local d'idéal maximal m, $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Spec}(A)}_{\mathrm{Nis}},m}$ définit alors un foncteur sur $\mathscr{A}_l$, que l'on note plus traditionnellement ^{h}. En effet,

Proposition 3.3.4 *Soit $\mathscr{A}_l$ la catégorie des anneaux locaux munis des morphismes locaux et $\mathscr{A}_h$ la sous-catégorie pleine formée des anneaux henséliens.*

Alors le foncteur ^{h} est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli o de $\mathscr{A}_h$ dans $\mathscr{A}_l$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_l}(A, oB) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_h}\left(A^h, B\right)$$

On établit ainsi du même coup l'existence du foncteur classique d'hensélisation (c'est essentiellement la démonstration de [GD70] et de [Ray]) et le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.5 *La fibre du topos annelé $\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}}$ en un point x quelconque de X est l'hensélisé de la fibre du topos annelé $\widetilde{X}_{\mathrm{Zar}}$ en x.*

$$\mathscr{O}_{\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}},x} = \mathscr{O}^h_{X,x}$$

Remarque 3.3.6 De même, il est bien connu que la fibre du topos annelé $\widetilde{X}_{\mathrm{Et}}$ en un point géométrique $\bar{x} = \mathrm{Spec}\,(\Omega)$ de X, d'image x dans X, est simplement l'hensélisé strict de la fibre du topos annelé $\widetilde{X}_{\mathrm{Zar}}$ en x pour l'extension $\Omega/\kappa(x)$.

Corollaire 3.3.7 *Soit $f : V \to X$ un morphisme étale, x un point de X ; alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un voisinage de Nisnevich de X en x*
2. *Le morphisme $V \times_X \mathrm{Spec}\left(\mathscr{O}^h_{X,x}\right) \to \mathrm{Spec}\left(\mathscr{O}^h_{X,x}\right)$ admet une section.*

Partie 4

Cohomologie dans le topos de Nisnevich

On rappelle que si (E, A) est un topos annelé, la catégorie des objets-A-modules de E est abélienne. De plus, pour tout objet X de E, le foncteur $\Gamma(X; .) = \mathrm{Hom}_E(X, .)$ des sections au-dessus de X est exact à gauche et additif. On note $H^q(X; .)$ le $q^{\text{ième}}$ foncteur dérivé droit.

On se place dans le petit site X_{Nis} de X. Cette restriction est justifiée par la proposition suivante :

4.1 Petit et gros site de Nisnevich

Le foncteur d'inclusion de $\mathscr{E}t_X$ dans $\mathscr{S}ch_X$ commute aux produits fibrés et transforme familles couvrantes (pour la topologie de Nisnevich) en familles couvrantes. Il est donc continu et induit un morphisme de site

$$u : \mathscr{S}ch_X \to X_{\mathrm{Nis}}$$

Alors, notant $u_*, u^* : \widetilde{X}_{\mathrm{Nis}} \to \widetilde{\mathscr{S}ch_X}_{\mathrm{Nis}}$ le morphisme de topos qui s'en déduit, le foncteur u^* est pleinement fidèle, donc pour tout faisceau pour Nisnevich sur $\mathscr{S}ch_X$

$$H^*_{\mathrm{Nis}}(\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}}, u^*(F)) \simeq H^*(\mathscr{S}ch_X, F)$$

Ainsi, il est équivalent de calculer la cohomologie de X pour la topologie de Nisnevich dans le petit ou le gros site de Nisnevich associé à X.

4.2 Suite exacte de Mayer-Vietoris

On considère le cas particulier des objets-groupes abéliens de $\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}}$. Si U est un objet quelconque de $\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}}$, on note encore $\mathbb{Z}_{\mathrm{Nis}}[U]$ l'objet-groupe abélien de $\widetilde{X}_{\mathrm{Nis}}$ libre engendré par U.

Dès lors, étant donné l'adjonction de définition de $\mathbb{Z}_{\text{Nis}}$, pour tout groupe abélien F et tout objet U de $\widetilde{X}_{\text{Nis}}$

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}.\widetilde{X}_{\text{Nis}}}(\mathbb{Z}_{\text{Nis}}[U], F) \simeq \operatorname{Hom}_{\widetilde{X}_{\text{Nis}}}(U, oF)$$

d'où un isomorphisme canonique

$$Ext^i(\mathbb{Z}_{\text{Nis}}[U], F) \simeq H^i(U; F) \tag{4.1}$$

Proposition 4.2.1 *Pour tout carré élémentaire $(U \to X, V \to X)$, on a une suite exacte longue de Mayer-Vietoris*

$$\begin{aligned} \ldots \to & H^i_{\text{Nis}}(X; F) \to H^i_{\text{Nis}}(U; F) \oplus H^i_{\text{Nis}}(V; F) \to H^i_{\text{Nis}}(U \times_X V; F) \\ & \to H^{i+1}_{\text{Nis}}(X; F) \to \ldots \end{aligned}$$

Preuve :

Lemme 4.2.2 *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ V \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

est cocartésien dans la catégorie $\widetilde{X}_{\text{Nis}}$

En effet, il suffit de voir que pour tout point x de X, le diagramme d'ensembles déduit par le foncteur fibre au points x est cocartésien, ce qui est évident vu que $U_x \to X_x$ est injective et $U_x \bigsqcup V_x \to X_x$ est surjective.

On peut aussi voir que le fait d'être cocartésien en tant que diagramme de faisceau se traduit immédiatement par le fait que l'image du carré élémentaire par F est cartésien.

Dès lors, il en est de même du diagramme obtenu par application du foncteur $\mathbb{Z}_{\text{Nis}}[.]$, ce qui se traduit par la suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z}_{\text{Nis}}[U \times_X V] \to \mathbb{Z}_{\text{Nis}}[U] \oplus \mathbb{Z}_{\text{Nis}}[V] \to \mathbb{Z}_{\text{Nis}}[X] \to 0$$

On obtient donc le théorème grâce à l'isomorphisme 4.1 $\square$

4.3 Dimension cohomologique du topos de Nisnevich

Notons d'abord que le corollaire 2.1.8 implique : pour tout corps k et tout faisceau abélien pour la topologie de Nisnevich sur la catégorie des k-algèbres étales,

$$H^n_{\text{Nis}}(\operatorname{Spec}(k); F) = 0 \text{ si } n > 0$$

C'est là une différence essentielle avec la topologie étale, pour laquelle la cohomologie de $\operatorname{Spec}(k)$ coïncide avec la cohomologie galoisienne de k. On peut même ajouter :

Proposition 4.3.1 *Soit X un schéma connexe, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *X est un schéma local hensélien.*
2. *pour tout faisceau abélien dans $\widetilde{X}_{\text{Nis}}$, pour tout $n > 0$, $H^n_{\text{Nis}}(X; F) = 0$*

Ainsi, les anneaux locaux henséliens sont exactement les schémas qui ont la cohomologie d'un point.

Enfin, on peut calculer la dimension cohomologique du topos de Nisnevich de X :

Théorème 4.3.2 *Soit X un schéma noethérien quasi-séparé, de dimension d (non nécessairement affine). Alors, pour tout faisceau abélien F dans $\widetilde{X}_{\text{Nis}}$*

$$H^n_{\text{Nis}}(X; F) = 0 \quad \textit{si } n > d$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur d.

C'est évident si $d = 0$, puisqu'alors, X est une somme finie de spectre de corps.

Supposons donc que le théorème est vrai pour les rangs inférieurs à $d-1$. Soit X de dimension d, on note $X^0 = \coprod_{x \text{ point de dimension } d} \operatorname{Spec}(\kappa(x))$ et $j : X^0 \to X$ la flèche évidente.

On obtient alors par adjonction une flèche $F \to j_* j^* F$ dont on note K le noyau et C le conoyau. Pour tout point x de dimension d dans X, $F_x \to (j_* j^* F)_x$ est un isomorphisme, donc $K_x = C_x = 0$.

Dès lors, si on note $\mathcal{I}$ la catégorie des faisceaux abéliens de Y-schémas où Y est un sous-schéma de X de dimension strictement inférieure à d,

$$K \simeq \varinjlim_{(K',i,j) \in \mathcal{I}/K} i_* K'$$

où K' est un faisceau dans $\mathcal{I}$, $i : Y \to X$ le morhpisme de sous-schéma qui lui correspond, et j un monomorphisme de faisceau de $i_* K' \to K$.

Or, X étant quasi-séparé et quasi-compact,

$$\begin{aligned} H^n(X; K) &\simeq H^n\left(X; \varinjlim_{(K',i,j) \in \mathcal{I}/K} i_* K'\right) \\ &\simeq \varinjlim_{(K',i,j) \in \mathcal{I}/K} H^n\left(X; i_* K'\right) \\ &\simeq \varinjlim_{(K',i:Y \to X,j) \in \mathcal{I}/K} H^n\left(Y; K'\right) \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme provenant du fait que i est simplement une immersion. Donc, par hypothèse de récurence, $H^n(X; K) = 0$ si $n > d-1$, et il en est de même pour C.

On introduit maintenant I comme l'image de la flèche $F \to j_* j^* F$; on a donc deux suites exactes :

$$0 \to K \to F \to I \to 0$$
$$0 \to I \to j_* j^* F \to C \to 0$$

Considérant les deux suites exactes longues associées, on obtient dès lors pour $n > d$,

$$H^n(X; F) \simeq H^n(X; j_* j^* F)$$

Or par ailleurs, pour tout $n > 0$

$$H^n(X; j_* j^* F) \simeq H^n(X; (\mathscr{R} j_*) j^* F) \simeq H^n(X^0; j^* F)$$

Ce qui conclut la démonstration compte tenu du fait que X^0 est dimension 0. $\square$

Bibliographie

[AJM73] Grothendieck A., Verdier J.L., and Artin M. *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas*, volume 269,270,305. Springer, 1972-73.

[GD70] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Eléments de géométrie algébrique*, volume IV. Publications de l'IHES, 1970.

[Mil80] J.S. Milne. *Etale cohomology*, volume 33. Princeton Math. studies, 1980.

[Nis89] Y. Nisnevich. The completely decomposed toplogy on schemes and the associated descent spectral sequence ni algebraic k-theory. In *Algebraic K-Theory : connections with Geometry and Topology*, pages 241–342, 1989.

[Ray] M. Raynaud. *Anneaux locaux henséliens.*