Faisceaux pervers

Frédéric Déglise

19 janvier 2001

Cette note est le compte-rendu d'un exposé donné dans le cadre du séminaire «Cycles évanescents, perversité et monodromie», sous la direction de L.Illusie. Je le remercie vivement pour les nombreux conseils qui ont précédé l'exposé oral, et les nombreuses corrections qui ont suivi la rédaction de ce présent travail.

Table des matières

Soit k un corps. On se place dans la catégorie $\mathscr{S}ch_k$ des k-schémas de type fini.

Soit Λ un anneau, tel qu'il existe un entier l premier à la caractéristique de k, vérifiant $l.\Lambda = 0$. Par exemple,

$$\Lambda = \mathcal{O}_\lambda / \mathfrak{m}_\lambda^\nu$$

où $\mathcal{O}_\lambda$ est un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_\lambda$.

On notera alors $\mathscr{M}od\,(\Lambda_X)$ la des faisceaux étales de Λ-modules sur X.

Enfin, on note $\mathrm{D}^b\,(X, \Lambda)$ la catégorie dérivée bornée de $\mathscr{M}od\,(\Lambda_X)$, et $\mathrm{D}^b_c\,(X, \Lambda)$ la sous-catégorie triangulée pleine formée des complexes à faisceaux de cohomologie constructibles.

Lorsqu'on écrira des foncteurs dérivés, on supprimera souvent le symbole R qui permet de différencier le foncteur du foncteur dérivé.

Partie I

t-Structure intermédiaire

1 Définiton

Soit X un schéma dans $\mathscr{S}ch_k$, et x un point de X. On pose

$$\delta(x) = \dim\left(\overline{\{x\}}\right)$$

Considérons par ailleurs le morphisme canonique

$$i_x : \mathrm{Spec}\,(\kappa(x)) \to X$$

Celui-ci induit un foncteur dérivé

$$i_x^* : \mathrm{D}^b_c\,(X, \Lambda) \to \mathrm{D}^b_c\,(\mathrm{Spec}\,(\kappa(x))\,, \Lambda)$$

Par ailleurs, on peut encore factoriser i_x en

$$\mathrm{Spec}\,(\kappa(x)) \xrightarrow{j} \overline{\{x\}} \xrightarrow{i} X$$

Ce qui nous permet de définir

$$i_x^! : \mathrm{D}^b_c\,(X, \Lambda) \to \mathrm{D}^b_c\,(\mathrm{Spec}\,(\kappa(x))\,, \Lambda)$$

en posant : $i_x^! = j^* i^!$.

On définit alors les sous-catégories suivantes :

Définition 1.1 *Soit K un complexe dans $\mathrm{D}^b_c\,(X, \Lambda)$. On pose :*

1. $K \in {}^p\mathrm{D}_c^{b,\leq 0}(X,\Lambda)$ *ssi*

$$\textit{pour tout point } x \textit{ de } X,\ \mathrm{R}^n {i_x}^* K = 0 \textit{ si } n > -\delta(x)$$

2. $K \in {}^p\mathrm{D}_c^{b,\geq 0}(X,\Lambda)$ *ssi*

$$\textit{pour tout point } x \textit{ de } X,\ \mathrm{R}^n {i_x}^! K = 0 \textit{ si } n < -\delta(x)$$

Remarque 1.2

1. La première condition signifie encore que pour tout point x de X, la fibre de $\mathrm{H}^n K$ en un point géométrique au-dessus de x est nulle si $n > -\delta(x)$.

   Ainsi, cette condition est encore équivalente à la condition de support suivante :

   $$\dim(\mathrm{Supp}(\mathrm{H}^n K)) \leq -n$$

2. Soit $D = \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(., K_X)$ l'opérateur de dualité, où $K_X = \mathrm{R}a^!(\Lambda_k)$ pour $a : X \to k$ désigne la projection canonique. Dès lors, D est une autodualité qui échange $i_x^!$ et i_x^*. En particulier, D échange ${}^p\mathrm{D}_c^{b,\leq 0}(X,\Lambda)$ et ${}^p\mathrm{D}_c^{b,\geq 0}(X,\Lambda)$.

Théorème 1.3 *La donnée* $({}^p\mathrm{D}_c^{b,\leq 0}(X,\Lambda), {}^p\mathrm{D}_c^{b,\geq 0}(X,\Lambda))$*, couple de sous-catégories de* $\mathrm{D}_c^b(X,\Lambda)$*, est une t-structure sur* $\mathrm{D}_c^b(X,\Lambda)$*.*

Ainsi,

Définition 1.4 *La t-structure* $({}^p\mathrm{D}_c^{b,\leq 0}(X,\Lambda), {}^p\mathrm{D}_c^{b,\geq 0}(X,\Lambda))$ *sur* $\mathrm{D}_c^b(X,\Lambda)$ *est appelée t-structure de perversité intermédiaire (ou autoduale).*

2 Démonstration

Le principe de la démonstration est de construire une filtration de $\mathrm{D}_c^b(X,\Lambda)$ par des sous-catégories pleines sur lesquelles on peut construire une t-structure par la méthode du recollement, d'en déduire une t-structure sur $\mathrm{D}_c^b(X,\Lambda)$ par passage à la limite et de vérifier que c'est la bonne.

2.1 Stratification

Définition 2.1 *Soit X un schéma dans $\mathscr{S}ch_k$. On appelle stratification de X un ensemble fini $\mathcal{S}$ de parties de X, appellées strates, telles que :*

1. *pour toute strate S, S est une partie localement fermée de X.*
2. *pour toute strate S, si l'on note $\bar{k}/k$ une cloture algébrique de k, le schéma $(S_{\bar{k}})_{red}$ est lisse sur $\bar{k}$ et équidimensionnelle.*
3. *$\mathcal{S}$ est une partition de X. Ainsi, l'ensemble sous-jacent à X vérifie*

$$X = \bigsqcup_{S \in \mathcal{S}} S$$

4. *pour toute strate S, l'adhérence de S dans X est réunion de strates :*

$$\bar{S} = \bigsqcup_{T \in \mathcal{S}, T \subset \bar{S}} T$$

On dit alors que $(X, \mathcal{S})$ (ou encore X par abus) est un schéma stratifié, et les éléments de $\mathcal{S}$ s'appellent les stratifications de X.

Dans la suite de l'exposé, lorsque U sera une partie localement fermée de X, on la considérera encore comme un schéma en la munissant de l'unique structure de sous-schéma réduit de X. Par ailleurs, le topos étale de U ne dépend pas de la structure de sous-schéma de X mise sur U, par invariance du topos étale pour les homéomorphismes universels.

Remarque 2.2 D'après l'axiome (4), une strate de dimension minimale (parmis les autres strates) est fermée, et une strate qui contient un point maximal est ouverte.

Exemple 2.3 Soit U une partie localement fermée de X, $\mathcal{S}$ une stratification de X. Si U est réunion de strates, alors la stratification $\mathcal{S}$ induit une unique stratification sur U_{red}.

On a bien sûr une relation d'ordre évidente sur les stratifications :

Définition 2.4 *Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux stratifications de X. On dira que $\mathcal{S}'$ est plus fine que $\mathcal{S}$ ssi $\mathcal{S}' \supset \mathcal{S}$.*

2.2 Système filtrant pour $\mathrm{D}_c^b(X, \Lambda)$

Si $j : U \to X$ est une immersion, F un faisceau dans $\mathscr{M}od(\Lambda_X)$, on notera $F|_U = j^*F$ le faisceau induit sur U.

Définition 2.5 *On définit un système inductif filtrant $\mathcal{C}$:*
Les éléments de $\mathcal{C}$ sont les couples $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ tels que

1. *$\mathcal{S}$ est une stratification de X.*
2. *$\mathcal{L}$ est une application qui à toute strate S dans $\mathcal{S}$ associe un ensemble fini $\mathcal{L}(S)$ de classes d'isomorphie de $\mathscr{M}od(\Lambda_S)$, vérifiant pour tout $[F] \in \mathcal{L}(S)$*
   (a) *F est un faisceau de Λ-modules localement constant constructible.*
   (b) *F est simple dans la catégorie des Λ-modules localement constant constructibles sur S.*

L'ordre sur $\mathcal{C}$ est donné par la relation : $(\mathcal{S}', \mathcal{L}') \geq (\mathcal{S}, \mathcal{L})$ ssi

1. *$\mathcal{S}'$ est une stratifcation plus fine que $\mathcal{S}$*

2. $\forall S' \in \mathcal{S}'$, $\forall S \in \mathcal{S}$, *si* $S' \subset S$, *alors* $\forall F \in \mathcal{L}(S)$, $[F|_{S'}] \in \mathcal{L}(S')$

Remarques 2.6

1. Il est immédiat que ce système est filtrant.
2. Les propriétés exigées sur F ne dépendent effectivement que de la classe d'isomorphie de F.
3. La deuxième condition imposée sur F signifie encore que toute suite de composition de F est réduite à un cran.
4. Si $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ est un couple dans $\mathcal{C}$, si U est une partie localement fermée de X, réunion de strate dans $\mathcal{S}$, notant $\mathcal{S}_U$ la stratification induite sur U, alors le couple $(\mathcal{S}_U, \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_U})$ vérifie les axiomes de la définition pour U. De plus, tout couple plus fin que $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ induit de même un couple sur U.

2.3 Faisceaux et complexes $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructibles

Définition 2.7 *Soit* $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ *un couple dans* $\mathcal{C}$, *et* F *un faisceau dans* $\mathscr{M}od\,(\Lambda_X)$.

On dira que F *est* $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$*-constructible ssi pour toute strate* S, $F|_S$ *est obtenu par extensions succesives de faisceaux dont la classe d'isomorphie est dans* $\mathcal{L}(S)$.

Cela revient à dire que les faisceaux simples associés à F (par une suite de composition quelconque) ont leur classe d'isomorphie dans $\mathcal{L}(S)$.

Remarque 2.8 Puisque la catégorie des faisceaux constructibles est stable par extension, on voit que tout faisceau $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructible est bien constructible.

Lemme 2.9 *Soit* $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ *un couple dans* $\mathcal{C}$. *Alors, la sous-catégorie pleine de* $\mathscr{M}od\,(\Lambda_X)$ *formée des faisceaux* $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$*-constructibles est stable par noyaux, conoyaux et extensions.*

2.10 Compte tenu de ce lemme, on peut étendre ces définitions aux catégories dérivées comme suit :

Définition 2.11 *Soit* $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ *un élément de* $\mathcal{C}$.

On note $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X, \Lambda)$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{D}^b(X, \Lambda)$ *formée des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont* $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$*-constructibles. On dira encore qu'un tel complexe* K *est* $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$*-constructible.*

Si U *est une partie localement fermée de* X, *réunion de strates dans* $\mathcal{S}$, *on notera encore* $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(U, \Lambda)$ *la catégorie triangulée des complexes sur* U *à cohomologie* $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$*-constructibles sur* U.

Soit $f : K \to L$ un morphisme de complexes bornés tel que K et L aient leur faisceaux de cohomologie $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructibles. En utilisant le lemme 2.9, on voit que le cône de F est encore un objet de $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X, \Lambda)$. Ainsi, on peut munir $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X, \Lambda)$ d'une structure de catégorie triangulée telle que ce soit une sous-catégorie triangulée de $\mathrm{D}^b(X, \Lambda)$.

Ceci signifie que si l'on se donne un triangle distingué de $\mathrm{D}^b(X, \Lambda)$,

$$K' \to K \to K'' \xrightarrow{+1}$$

si K' et K sont $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructibles, il en est de même de K''.

Enfin, la catégorie triangulée $\mathrm{D}^b_c(X, \Lambda)$ est réunion filtrante, indexée par $\mathcal{C}$, des sous-catégories pleines $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X, \Lambda)$. En effet, si K est un complexe dans $\mathrm{D}^b_c(X, \Lambda)$, puisqu'il est borné, on peut considérer une stratification $\mathcal{S}$ de X telle que tous les faisceaux de cohomologie de K soit localement constants sur chaque strate. Si S est une strate dans $\mathcal{S}$, on définit alors $\mathcal{L}(S)$ comme l'ensemble des quotients simples d'une suite de composition de $F|_S$, de sorte que $F \in \mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X, \Lambda)$.

Soit maintenant U et V des parties localement fermées de X, $U \subset V$. Soit $j : U \to V$ le morphisme d'immersion associé.

On rappelle que l'on dispose d'une suite de foncteurs $(j_!, j^*, j_*, j^!)$ entre les deux catégories $\mathscr{M}od(\Lambda_U)$ et $\mathscr{M}od(\Lambda_V)$ telle que, j^* et $j_!$ sont des foncteurs exacts, et j_* et $j^!$ sont des foncteurs exacts à gauche. Par ailleurs, j_* et $j_!$ sont pleinement fidèles.

Lemme 2.12 *Soit $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ un élément de $\mathcal{C}$, et $j : U \to V$ une immersion entre parties localement fermées de X réunion de strates, alors*

1. *Si K est un complexe dans $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(V, \Lambda)$, $j^*(K)$ est dans $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(U, \Lambda)$.*
2. *Si K est un complexe dans $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(U, \Lambda)$, $j_!(K)$ est dans $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(V, \Lambda)$.*

Preuve : Si S est une strate de U, K un complexe $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructible sur V, $(j^*K)|_S = K|_S$ est $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructible.

Si K est un complexe $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructible sur U, S une strate de V, $(j_!K)|_S = K|_S$ si $S \subset U$ et est nul sinon. $\square$

Ainsi, les foncteurs j^* et $j_!$ sont compatibles à la filtration de $\mathrm{D}^b_c(X, \Lambda)$ par $\mathcal{C}$. Par contre, il n'en est pas de même des foncteurs j_* et $j^!$, ce que l'on peut corriger en raffinant la filtration de $\mathrm{D}^b_c(X, \Lambda)$.

2.4 Raffinement de la filtration de $\mathrm{D}^b_c(X, \Lambda)$

Définition 2.13 *On note $\mathcal{C}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ formé des couples $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ tels que*

$$\forall S \in \mathcal{S},\ \forall F \in \mathcal{L}(S),\ \forall n,\ \mathrm{R}^n i_*(F) \text{ est } (\mathcal{S}, \mathcal{L})\text{-constructible}$$

où $i : S \to X$ désigne l'immersion canonique.

Autrement dit, $\mathrm{R}i_*(F)$ est un objet de $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$.

On va voir que cette restriction suffit à garantir les propriétés de fonctorialité qu'on attend. Plus précisément :

Lemme 2.14 *Soit $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ un élément de $\mathcal{C}_0$. Soit U et V des parties localement fermées de X réunion de strates, telles que $U \subset V$. Soit $j : U \to V$ l'immersion canonique, alors*

1. *Si K est un complexe dans $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(U,\Lambda)$, $j_*(K)$ est dans $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(V,\Lambda)$.*
2. *Si K est un complexe dans $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(V,\Lambda)$, $j^!(K)$ est dans $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(U,\Lambda)$.*

Preuve : On démontre 1.(b). Soit K un complexe dans $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(U,\Lambda)$.

On commence par se ramener au cas où $V = X$. En effet, supposons le théorème démontré dans ce cas, et soit $i : V \to X$ l'immersion canonique. Dès lors, $(ji)_*(K)$ est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible sur X. Par ailleurs, $j^*j_* = Id$, et utilisant l'exactitude de j^*, on en déduit $i_*K = j^*j_*i_*K$ est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible sur V.

On considère donc $j : U \to X$, et on raisonne par récurrence sur le nombre r de strate de U :

Si $r = 1$, U est une strate de X. On utilise la suite spectrale :

$$\mathrm{R}^p j_*(\mathrm{H}^q(K)) \Rightarrow \mathrm{R}^{p+q} j_* K$$

Par définition, $\mathrm{H}^q(K)$ est un faisceau $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible. Il est donc extension finie de faisceaux dans $\mathcal{L}(U)$.

Or, par hypothèse, pour tout faisceau F de $\mathcal{L}(U)$, $\mathrm{R}^p j_*(F)$ est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible. Dès lors, $\mathrm{R}^p j_*(\mathrm{H}^q(K))$ est extension finie de faisceaux $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructibles, donc est lui-même $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible.

La convergence de la suite spectrale permet de déduire que les gradués de $\mathrm{R}^{p+q} j_* K$ sont $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructibles, donc $\mathrm{R}^{p+q} j_* K$ est lui-même $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible.

Si $r > 1$, considérons S une strate ouverte de U, et $k : S \to U$ l'immersion canonique. Soit L dans $\mathrm{D}^b(X,\Lambda)$ défini par le triangle distingué

$$K \xrightarrow{ad} k_*k^*K \to L \xrightarrow{+1}$$

D'après le cas $r = 1$ ci-dessus, k_*k^*K est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible. Donc, d'après la remarque 2.3, L est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible. Or, L est à support dans le fermé $U - S$, sous-schéma stratifié strict de U. Dès lors, notant j' la restriction de j à $U - S$, $j_*(L) = {j'}_*(L|_{U-S})$ est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible, d'après l'hypothèse de récurrence. Enfin, on peut considérer le triangle distingué, obtenu par application de $\mathrm{R}j_*$

$$j_*K \xrightarrow{ad} j_*k_*k^*K \to j_*L \xrightarrow{+1}$$

Toujours d'après le cas $r = 1$, $(jk)_* k^* K$ est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible, donc par application de la remarque 2.3 au triangle tourné, on conclut que le complexe $j_* K$ est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible.

On démontre enfin le cas de $j^!$. Soit K un complexe $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible sur V. On se ramène au cas où $V = X$. Supposons ce cas démontré, on peut l'appliquer au complexe $j_! K$: notant $i : V \to X$, on sait que $(ij)^! j_! K$ est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible sur U. Il suffit de remarquer que $j^! j_! = Id$ (par le morphisme d'adjonction).

Supposons donc $V = X$, $j : U \to X$, et K un complexe $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible sur X. Or, j se décompose en $U \to \bar{U} \to X$. $\bar{U}$ étant réunion de strates, on peut se ramener à supposer que j est ouverte ou fermé. Si j est ouvert, $j^! = j^*$ est déjà traité. Supposons donc j fermé, et considérons k l'inclusion de l'ouvert complémentaire, on a un triangle distingué :

$$j_* j^! K \xrightarrow{ad} K \xrightarrow{ad} k_* k^* L \xrightarrow{+1}$$

D'après les cas qui précèdent, $k_* k^* K$ est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible, donc $j_* j^! K$ est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ constructible, donc $j^! K = j^* j_* j^! K$ est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible. □

Enfin, il suffit maintenant de voir que $\mathcal{C}_0$ donne une filtration de $\mathrm{D}^b_c(X,\Lambda)$:

Lemme 2.15 *$\mathcal{C}_0$ est une partie cofinale de $\mathcal{C}$.*

PREUVE : Soit $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ un couple dans $\mathcal{C}$. Il s'agit de démontrer que l'on peut raffiner la stratification $\mathcal{S}$, rajouter des classes d'isomorphie (en nombre fini) de faisceaux localement constants sur chaque strate du raffinement pour obtenir un couple $(\mathcal{S}',\mathcal{L}')$ dans $\mathcal{C}_0$.

Soit n la dimension de X. On commence par introduire une notation qui sera pratique au cours de la démonstration :

$$(\mathcal{S},\mathcal{L})_{\geq r}$$

désignera le couple $(\mathcal{S}_{\geq r},\mathcal{L}_{\geq r})$ où $\mathcal{S}_{\geq r}$ est l'ensemble des strates dans $\mathcal{S}$ de dimension supérieure ou égale à r, et $\mathcal{L}_{\geq r}$ est la restriction de $\mathcal{S}$ à cet ensemble de strates.

On va construire une suite $(\mathcal{S}_{n+1},\mathcal{L}_{n+1}) \leq (\mathcal{S}_n,\mathcal{L}_n) \leq ... \leq (\mathcal{S}_0,\mathcal{L}_0)$ de couples de $\mathcal{C}$ telle que

1. $(\mathcal{S}_{n+1},\mathcal{L}_{n+1}) = (\mathcal{S},\mathcal{L})$.
2. $(\mathcal{S}_{r-1},\mathcal{L}_{r-1})_{\geq r} = (\mathcal{S}_r,\mathcal{L}_r)_{\geq r}$
3. Notant
$$X_{\geq r} = \bigsqcup_{T \in \mathcal{S}_{r\,\geq r}} T$$

> Pour toute strate S dans $\mathcal{S}_r$, si $\dim S \geq r$, notant $i : S \to X_{\geq r}$ l'immersion canonique, pour faisceau F dans $\mathcal{L}_r(S)$, $\mathrm{R}i_*F$ est $(\mathcal{S}_r, \mathcal{L}_r)$-constructible
>
> ie $(\mathcal{S}_r, \mathcal{L}_r)_{\geq r}$ vérifie la condition de $\mathcal{C}_0$ pour $X_{\geq r}$.

Ainsi, $(\mathcal{S}_0, \mathcal{L}_0)$ conviendra.

On effectue une récurrence descendante sur r, les propriétés (2) et (3) étant vide pour $r = n+1$.

Supposons la construction effectuée jusqu'au rang r, et construisons $(\mathcal{S}_{r-1}, \mathcal{L}_{r-1})$. On introduit le sous-espace intermédiaire

$$X'_{\geq r-1} = X_{\geq r} \bigsqcup \left(\bigsqcup_{S \in \mathcal{S} \ | \ \dim S = r-1} S \right)$$

Notons que les strates de dimension $r-1$ dans $X'_{\geq r-1}$ sont fermées. Soit T une telle strate :

Considérons S une strate de $\mathcal{S}_r$ telle que $\dim S \geq r$, et $F \in \mathcal{L}_r(F)$. Considérons l'immersion $i : S \to X'_{\geq r-1}$. D'après le théorème de constructiblité, $\mathrm{R}i_*(F)|_T$ est constructible. Dès lors, il existe une stratification de T telle que les faisceaux cohomologie de $\mathrm{R}i_*(F)|_T$ (en nombre fini) soient tous localement constant sur chaque strate de T.

Considérant tous les couples (S, F) comme précédemment, on trouve donc une stratification de T telle que la condition ci-dessus est garantie pour tous les couples (S, F).

On construit dès lors $\mathcal{S}_{r-1}$ en remplaçant chaque strate de dimension $r-1$ par la stratification obtenue ci-dessus. De plus, on construit $\mathcal{L}_{r-1}$, plus fine que $\mathcal{L}_r$, contenant pour chacune des nouvelles strates les faisceaux localement constants qui apparaissent ci-dessus (ie pour chaque $\mathrm{R}^m i_* F|_T$).

On a donc $\mathcal{S}_{r-1 \geq r} = \mathcal{S}_{r \geq r}$.

Considérons finalement, suivant ce qu'on attend,

$$X_{\geq r-1} = X_{\geq r} \bigsqcup \left(\bigsqcup_{S \in \mathcal{S}_{r-1} \ | \ \dim S = r-1} S \right)$$

Ainsi, $X'_{\geq r-1} - X_{\geq r-1}$ est la réunion des strates de dimension inférieure à $r-2$ que l'on a rajoutées.

Vérifons la propriété 3. Soit S une strate de $X_{\geq r-1}$ dans $\mathcal{S}_{r-1}$, et F un faisceau dans $\mathcal{L}_{r-1}(S)$.

Si $\dim S = r-1$, S est fermée dans $X_{\geq r-1}$ et i_* est le prolongement par 0, donc l'assertion est claire.

Si $\dim S > r-1$, S appartient à $\mathcal{S}_r$ et F appartient en fait à $\mathcal{L}_r(S)$. Considérons les immersions

$$S \xrightarrow{i} X_{\geq r-1} \xrightarrow{j} X'_{\geq r-1}$$

Par construction, $(ji)_*F$ est $(\mathcal{S}_{r-1}, \mathcal{L}_{r-1})$-constructible sur $X'_{\geq r-1}$, donc $i_*F = j^*j_*i_*F$ est $(\mathcal{S}_{r-1}, \mathcal{L}_{r-1})$-constructible sur $X_{\geq r-1}$. □

Corollaire 2.16 *Dès lors, on obtient l'écriture de $\mathrm{D}^b_c(X,\Lambda)$ comme réunion filtrante :*

$$\mathrm{D}^b_c(X,\Lambda) = \bigcup_{(\mathcal{S},\mathcal{L})\in\mathcal{C}_0} \mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$$

2.5 t-Structure par recollement sur chaque cran de la filtration

On va définir sur chaque cran de la filtraion de $\mathrm{D}^b_c(X,\Lambda)$ une t-structure en utilisant la méthode du recollement :

Définition 2.17 *Soit $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ un couple dans $\mathcal{C}_0$. Soit K un complexe dans $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$. On pose*

1. $K \in {}^r\mathrm{D}^{b,\leq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$ *ssi*

   pour toute strate S, $\mathrm{R}^n(i_S{}^*K) = 0$ si $n > -\dim S$

2. $K \in {}^r\mathrm{D}^{b,\geq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$ *ssi*

   pour toute strate S, $\mathrm{R}^n(i_S{}^!K) = 0$ si $n < -\dim S$

Proposition 2.18 *Soit $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ un couple dans $\mathcal{C}_0$. Le couple $({}^r\mathrm{D}^{b,\leq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda), {}^r\mathrm{D}^{b,\geq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda))$ forme une t-structure sur $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$.*

Preuve : Il s'agit de montrer que les données précédentes fournissent bien une t-structure sur $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$. Pour celà, on utilise le procédé de recollement.

Raisonnons par récurrence sur le nombre de strate r de X.

Si $r = 1$, la t-structure définie est simplement la t-structure canonique (décalée de $-\dim X$).

Si $r > 1$, soit F une strate fermée propres de X et U l'ouvert complémentaire qui est un sous-schéma stratifié de X. D'après l'hypothèse de récurrence, la définition précédente donne des t-structures sur $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(U,\Lambda)$ et $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(F,\Lambda)$. Puisque $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ est dans $\mathcal{C}_0$, appliquant la proposition 2.14, la fonctorialité entre ces deux catégories d'une part, et $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$ d'autre part, nécessaire au formalisme de recollement des t-structures, est garantie.

On munit donc $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$ de la t-structure recollée à partir de $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(F,\Lambda)$ et $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(U,\Lambda)$. Il s'agit simplement de vérifier que cette dernière t-structure est celle de la définition précédente.

A ce point de l'exposé, ceci est une formalité. Considérons K un complexe dans $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$, $i : F \to X$ et $j : U \to X$ les immersions canoniques :

1. On montre d'abord que la condition (1) de la définition est équivalente à la conjonction des deux conditions suivantes

   pour tout strate S de U, $n < -\dim S$ implique $\mathrm{H}^n\left(i_S^{U!}(j^*K)\right) = 0$

   pour tout strate S de F, $n < -\dim S$ implique $\mathrm{H}^n\left(i_S^{F!}(i^!K)\right) = 0$

   C'est évident car $i_S^{U!}j^* = i_S^!$ (j est ouverte) et $i_S^{F!}i^! = i_S^!$.
2. De même, on montre que la condition (2) de la définition est équivalente à la conjonction des deux conditions suivantes

   pour tout strate S de U, $n > -\dim S$ implique $\mathrm{H}^n\left(i_S^{U*}(j^*K)\right) = 0$

   pour tout strate S de F, $n > -\dim S$ implique $\mathrm{H}^n\left(i_S^{F*}(i^*K)\right) = 0$

   Ce qui est encore plus évident. □

2.6 Compatibilité des t-structures

Compte tenu du corollaire 2.16, on peut construire une t-structure sur $\mathrm{D}^b_c(X,\Lambda)$ à partir des t-structures construites au paragraphe précédent à condition que celles-ci soient compatibles. Plus précisément :

Lemme 2.19 *Soit* $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ *et* $(\mathcal{S}',\mathcal{L}')$ *des éléments de* $\mathcal{C}_0$ *tels que* $(\mathcal{S}',\mathcal{L}') \geq (\mathcal{S},\mathcal{L})$.

Alors, on a les inclusions entre sous-catégories pleines

1. ${}^r\mathrm{D}^{b,\leq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) \subset {}^r\mathrm{D}^{b,\leq 0}_{(\mathcal{S}',\mathcal{L}')}(X,\Lambda)$

2. ${}^r\mathrm{D}^{b,\geq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) \subset {}^r\mathrm{D}^{b,\geq 0}_{(\mathcal{S}',\mathcal{L}')}(X,\Lambda)$

Preuve : Pour la première inclusion, soit K un complexe dans ${}^r\mathrm{D}^{b,\leq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$. Soit S' une strate de X dans $\mathcal{S}'$. Par hypothèse, S' est incluse dans une strate S appartenant à $\mathcal{S}$. De plus, si $n > -\dim S$, on a par hypothèse : $i_S^*(\mathrm{H}^n K) = 0$.

Or, $-\dim S' \geq -\dim S$, donc si $n > -\dim S'$, on a encore $i_{S'}^*(\mathrm{R}^n K) = 0$ (puisque $i_{S'}$ se factorise par i_S).

Prrouvons la deuxième inclusion. Soit K un complexe dans ${}^r\mathrm{D}^{b,\leq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$. Soit S' une strate de X dans $\mathcal{S}'$, et S une strate de $\mathcal{S}$ qui contient S'. Soit $i : S' \to X$ l'immersion canonique, qui se décompose en $S \xrightarrow{j} S' \xrightarrow{k} X$.

On veut démontrer

$$\mathrm{R}^n i^! K = 0 \quad \text{si } n < -\dim S'$$

On utilise le fait que $\mathrm{R}i^! = \mathrm{R}j^!\mathrm{R}k^!$.

En effet, pour q quelconque, le faisceau $\mathrm{R}^q k^! K$ est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible d'après le lemme 2.15. Il est donc obtenu par extension itérée de faisceaux dont la classe d'isomorphie est dans $\mathcal{L}(S)$, donc localement constant. Or, $j : S \to S'$ est une immersion entre schémas lisses sur $\bar{k}$, de codimension constante c sur $\bar{k}$, on peut donc appliquer le théorème de pureté à j, et on en déduit :

$$\mathrm{R}j^! \left(\mathrm{R}^q k^! K\right) = j^* \mathrm{R}^q k^! K(-d)[-2d] \tag{1}$$

Ainsi, la cohomologie de $\mathrm{R}k^! K$ est concentrée en degrés strictement inférieurs à $-\dim S$, d'après l'hypothèes sur K. D'après (1), la cohomologie de $\mathrm{R}j^!(\mathrm{R}k^! K)$ est donc concentrée en degrés strictement inférieurs à $-\dim S + 2d$.

Ainsi, $\mathrm{R}^n i^! K$ est nul si $n < -\dim S + 2d$. On conclut en utilisant $\dim S' = \dim S - d \geq \dim S - 2d$. $\square$

2.7 Les t-structures coïncident

Définition 2.20 *On définit une t-structure sur* $\mathrm{D}^b_c(X,\Lambda)$ *en posant :*

1. $K \in {}^r\mathrm{D}^{b,\leq 0}_c(X,\Lambda)$ *ssi*

   il existe un couple $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ *dans* $\mathcal{C}_0$ *tel que* $K \in {}^r\mathrm{D}^{b,\leq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$
2. $K \in {}^r\mathrm{D}^{b,\geq 0}_c(X,\Lambda)$ *ssi*

   il existe un couple $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ *dans* $\mathcal{C}_0$ *tel que* $K \in {}^r\mathrm{D}^{b,\geq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$

Pour achever la démonstration, il s'agit maintenant de vérifier que cette t-structure coïncide avec celle donnée dans I.1.

On démontre donc les égalités

$${}^r\mathrm{D}^{b,\leq 0}_c(X,\Lambda) = {}^p\mathrm{D}^{b,\leq 0}_c(X,\Lambda)$$

$${}^r\mathrm{D}^{b,\geq 0}_c(X,\Lambda) = {}^p\mathrm{D}^{b,\geq 0}_c(X,\Lambda)$$

Commençons par la première, et démontrons $\subset$: soit K dans ${}^r\mathrm{D}^{b,\leq 0}_c(X,\Lambda)$. Il existe donc un couple $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ dans $\mathcal{C}_0$ tel que K est dans ${}^r\mathrm{D}^{b,\leq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$. Dès lors, soit x un point de X, S une strate dans $\mathcal{S}$ qui contient x. Quitte à rafiner $(\mathcal{S},\mathcal{L})$, on peut supposer que x est générique dans S. Dès lors, si $n > -\delta(x)$ ie $n > -\dim S$, alors, $\mathrm{R}^n i^* K = 0$. Donc la fibre de $\mathrm{R}^n i^* K = (\mathrm{H}^n K)|_S$ en x est nulle, ce qui signife encore que la fibre de $\mathrm{H}^n K$ en x est nulle.

De même, on démontre $\supset$: soit K dans ${}^p\mathrm{D}^{b,\leq 0}_c(X,\Lambda)$. Soit $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ un couple dans $\mathcal{C}_0$ tel que K est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible. On peut même supposer que les faisceaux de cohomologie $\mathrm{H}^n K$ soient localement constants sur chaque strate. Dès lors, si S est une strate dans $\mathcal{S}$, pour tout point x de S, par hypothèse, la fibre de $\mathrm{H}^n K$ en x est nulle. Donc le support de $\mathrm{H}^n K$

n'intersecte pas S, et on en déduit que $\mathrm{H}^n K|_S$ est nul.

Il nous reste donc la deuxième égalité. Commençons par $\subset$. Soit donc K dans ${}^r\mathrm{D}_c^{b,\geq 0}(X,\Lambda)$ et $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ un couple dans $\mathcal{C}_0$ tel que K soit dans ${}^r\mathrm{D}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}^{b,\geq 0}(X,\Lambda)$. Soit x un point de X, et S la strate qui le contient. Quitte à raffiner $(\mathcal{S},\mathcal{L})$, on peut supposer que x est générique dans S. Dès lors, S étant ouvert dans son adhérence, $S\cap\bar{x}$ est ouvert dans $\bar{x}$. Soit $n<-\delta(x)=-\dim S$. Par hypothèse, $\mathrm{R}^n i_S^! K=0$. On en déduit que $\mathrm{R}^n i_{S\cap\bar{x}}^! K=0$. Dès lors, $S\cap\bar{x}$ étant ouvert dans $\bar{x}$, ceci implique $\mathrm{R}^n i_x^! K=0$.

Pour l'inclusion inverse. Soit K un complexe dans ${}^p\mathrm{D}_c^{b,\geq 0}(X,\Lambda)$. Soit $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ un couple dans $\mathcal{C}_0$ tel que K soit $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible et soit S une strate dans $\mathcal{S}$. Considérons un point générique de S (ou plutôt de $\bar{S}$), x. Pour $n<-\dim S=\delta(x)$, par hypothèse, $\mathrm{R}^n i_x^! K=0$. Ceci revient à dire qu'il existe U ouvert dans $\bar{x}$ tel que $\mathrm{R}^n i_U^! K=0$. En procédant de même pour tous les points génériques de S, on obtient un ouvert dense de $\bar{S}$, U, tel que $\mathrm{R}^n i_U^! K=0$. On en déduit donc que $\mathrm{R}^n i_{\bar{S}}^! K=0$, ce qui implique, S étant ouvert dans $\bar{S}$, $\mathrm{R}^n i_S^! K=0$. $\square$

Ce qui achève la démonstration !

Partie II

Faisceaux pervers

Définition 2.21 *On note $\mathscr{P}er(X,\Lambda)$ le coeur de la catégorie $\mathrm{D}_c^b(X,\Lambda)$ munie de la t-structure de perversité autoduale. Les objets de $\mathscr{P}er(X,\Lambda)$ sont appelés faisceaux pervers.*

Remarque 2.22

1. Si X est partout de dimension d,

$$ {}^p\mathrm{D}^{\leq 0}\subset \mathrm{D}^{\leq 0} $$

$$ {}^p\mathrm{D}^{\geq 0}\subset \mathrm{D}^{\geq -2d} $$

   Ainsi, un faisceau pervers est un objet de $\mathrm{D}^{[-2d,0]}$, soit un complexe à cohomologie constructible concentrée en degré $[-2d,0]$.

2. On a déjà signalé (remarque 1) que l'opérateur de dualité D échange ${}^p\mathrm{D}_c^{b,\leq 0}(X,\Lambda)$ et ${}^p\mathrm{D}_c^{b,\geq 0}(X,\Lambda)$. En particulier, il induit une autodualité de $\mathscr{P}er(X,\Lambda)$.

Exemple 2.23

1. Si X est lisse purement de dimension d,

$$ \Lambda_X[d] $$

est pervers (en effet, il suffit de considérer que X est stratifié par la seule strate X).

2. Si x est un point fermé de X,

$$i_{x*}(\Lambda_x)$$

est pervers (il suffit d'appliquer la définition 1.1).

Proposition 2.24 *Les faisceaux pervers forment un champ sur le site étale de X.*

PREUVE : On commence par montrer que les morphismes se recollent. Soit K et L deux faisceaux pervers, il s'agit de montrer que le préfaisceau qui à un schéma étale U/X associe le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_c^b(U,\Lambda)}(K|_U, L|_U)$ est un faisceau.

En effet, puisque

$$\mathrm{H}^i\left(\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{D}_c^b(U,\Lambda)}(K|_U, L|_U)\right) = 0$$

si $i < 0$, la suite spectrale spectrale du local au global en bidegré $(0,0)$ donne l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_c^b(U,\Lambda)}(K|_U, L|_U) \simeq \mathrm{H}^0\left(U; \mathrm{H}^0(\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{D}_c^b(X,\Lambda)}(K, L))\right)$$

Pour démontrer que les objets se recollent, on utilise la fonctorialité établie au paragraphe suivant et nous renvoyons le lecteur à [BBD81] paragraphe 2.2.19. □.

Enfin, ajoutons le théorème suivant du à Beilinson.

Théorème 2.25 (Beilinson) *Considérons le foncteur t-exact*

$$\mathscr{P}er(X,\Lambda) \to \mathrm{D}_c^b(X,\Lambda)$$

Alors, celui-ci induit une équivalence de catégories triangulées, compatible aux t-structures

$$\mathrm{D}^b(\mathscr{P}er(X,\Lambda)) \to \mathrm{D}_c^b(X,\Lambda)$$

Partie III
Prolongement intermédiaire

3 Fonctorialité élémentaire

On rappelle les définitions suivantes :

Définition 3.1 *Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux catégories triangulées munies chacune d'une t-structure, $T : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$ un foncteur exact. On dit que*

1. *T est t-exact à gauche ssi $T\left(\mathscr{D}^{\geq 0}\right) \subset \mathscr{D}'^{\geq 0}$*
2. *T est t-exact à droite ssi $T\left(\mathscr{D}^{\leq 0}\right) \subset \mathscr{D}'^{\leq 0}$*

Dans la situation de la définition, notant $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les coeurs de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, si $T : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$ est t-exact à gauche (resp. à droite), le foncteur $H^0(T) : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ qui s'en déduit est t-exact à gauche (resp. à droite).

3.2 Soit $f : X \to Y$ un morphisme quasi-fini (ie à fibres finies) entre schémas dans $\mathscr{S}ch_k$. On dispose des foncteurs $f_!$, f^*, f_*, $f^!$ entre les catégories $\mathrm{D}_c^b(X, \Lambda)$ et $\mathrm{D}_c^b(Y, \Lambda)$ (si f est fini, $f_* = f_!$).

Proposition 3.3 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme quasi-fini, où X et Y sont des schémas dans $\mathscr{S}ch_k$. On considère les foncteurs $(f_!, f^*, f_*, f^!)$ entre les catégories triangulées, munies des t-structures de perversité autoduale, ${}^p\mathrm{D}_c^b(X, \Lambda)$ et ${}^p\mathrm{D}_c^b(Y, \Lambda)$:*

1. *f^* et $f_!$ sont t-exacts à droite.*
2. *f_* et $f^!$ sont t-exacts à gauche.*

Preuve : Il suffit d'appliquer la remarque 1.

Considérons le cas de f^*. Soit K un complexe dans ${}^p\mathrm{D}_c^{b,\leq 0}(Y, \Lambda)$. Soit S_n le support de $\mathrm{H}^n K$. Par hypothèse, $\dim S_n \leq -n$ pour tout entier n. Or f^* est exact (pour la t-structure naturelle), donc $\mathrm{H}^n(f^*K) = f^*(\mathrm{H}^n K)$ a pour support $f^{-1}(S_n)$. Comme f est quasi-fini, $\dim f^{-1}(S_n) \leq \dim S_n$ ce qui suffit pour conclure en appliquant la remarque 1 à f^*K sur X.

Considérons maintenant le cas de $f_!$. Soit K un complexe dans ${}^p\mathrm{D}_c^{b,\leq 0}(X, \Lambda)$ et S_n le support de $\mathrm{H}^n K$. De même, $\mathrm{H}^n(f_!K) = f_!(\mathrm{H}^n K)$, et ce faisceau a pour support $\overline{f(S_n)}$ qui est de dimension $\dim S_n$ car f est quasi-fini. D'où la conclusion.

Enfin, $\mathrm{R}f_*$ étant adjoint à droite de f^* et $\mathrm{R}f^!$ adjoint à droite de $f_!$, les deux derniers cas se déduisent facilement en utilisant la relation ${}^p\mathrm{D}_c^{b,\geq 0}(X, \Lambda) = \left({}^p\mathrm{D}_c^{b,<0}(X, \Lambda)\right)^{\perp}$, où $\perp$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathrm{D}_c^b(X, \Lambda)$ formée des objets K tels que

$$\mathrm{Hom}\left({}^p\mathrm{D}_c^{b,<0}(X, \Lambda), K\right) = 0$$

(et idem pour Y). $\square$

3.4 Si $f : X \to Y$ est un morphisme quasi-fini, on notera suivant [BBD81],

$${}^p f_!, {}^p f_* : \mathscr{P}er(X, \Lambda) \to \mathscr{P}er(Y, \Lambda)$$

$$ {}^pf^!, {}^pf^* : \mathscr{P}er(Y,\Lambda) \to \mathscr{P}er(X,\Lambda) $$

les foncteurs induits entre les catégories de faisceaux pervers correspondantes : ${}^p\mathrm{H}^0 f_!$ et ${}^p\mathrm{H}^0 f^*$ sont exacts à droite, ${}^p\mathrm{H}^0 f^!$ et ${}^p\mathrm{H}^0 f_*$ sont exacts à gauche.

On obtient par ailleurs le corollaire suivant :

Corollaire 3.5 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme, où X et Y sont des schémas dans $\mathscr{S}ch_k$.*

1. *Si f est fini, alors $f_* = f_!$ est t-exact.*
2. *Si f est étale, alors $f^* = f^!$ est t-exact.*

4 Prolongement intermédiaire

4.1 Définition ; exemples

Définition 4.1 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme quasi-fini, K un faisceau pervers sur X.*

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} f_!K \arrow[r, "\beta_K"] \arrow[d, "(1)"'] & f_*K \\ {}^p\mathrm{H}^0(f_!K) \arrow[r, dashed, "\alpha_K"'] \arrow[ur, dashed, "(3)"] & {}^p\mathrm{H}^0(f_*K) \arrow[u, "(2)"'] \end{tikzcd}$$

On appelle prolongement intermédiaire de K le faisceau pervers

$$ f_{!*}(K) = \mathrm{Im}(\alpha_K) $$

Explicitons la construction :

1. L'application (1) est l'application $f_!K \to {}^p\tau_{\geq 0}(f_!K)$. Comme $f_!$ est t-exact à droite, et que K est dans ${}^p\mathrm{D}_c^{b,\leq 0}(X,\Lambda)$, ${}^p\tau_{\geq 0}(f_!K) = {}^p\mathrm{H}^0(f_!K)$.
2. L'application (2) est l'application ${}^p\tau_{\leq 0}(f_*K) \to f_*K$, f_* étant t-exact à gauche.
3. L'application (3) est l'unique relèvement (à isomorphisme unique près) de β_K, qui existe car f_*K est positif.
4. L'application α_K est l'unique relèvement de (3), ${}^p\mathrm{H}^0(f_!K)$ étant négatif.

L'application β_K étant naturelle en K, il en est de même de α_K compte tenu des unicités dans (3) et (4). Dès lors, on a définit un foncteur

$$ f_{!*} : \mathscr{P}er(X,\Lambda) \to \mathscr{P}er(Y,\Lambda) $$

Exemple 4.2 Soit X un schéma dans $\mathscr{S}ch_k$ purement de dimension d, k algébriquement clos. Alors, il existe un ouvert U dense dans X et lisse sur k. On définit le complexe d'intersection de X comme le faisceau pervers sur X :

$$\underline{IC}_X = j_{!*}\left(\Lambda_U[d]\right)$$

où $j : U \to X$ désigne l'immersion ouverte canonique.

On donnera une indication après la proposition suivante pour démontrer que cette définition ne dépend pas du choix de U.

4.3 L'opérateur de dualité D échange $f_!$ et f_*, et transforme image en coimage. Il en résulte que

$$Df_{!*} = f_{!*}D$$

Dès lors, le complexe d'intersection de X est autodual : $D\left(\underline{IC}_X\right) \simeq \underline{IC}_X$.

4.2 Cas d'une immersion ouverte

Si U est un ouvert de X, $Y = X - U$ le fermé complémentaire, pour tout objet K de $\mathrm{D}^b_c(X, \Lambda)$, il existe un couple $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ dans $\mathcal{C}_0$ tel que U est réunion de strates, et K soit $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructible.

On rappelle que dans ce cas ${}^p\tau^Y_{\leq -1}$ désigne le foncteur de troncation associé à la t-structure sur $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X, \Lambda)$ obtenue en recollant les deux t-structures suivantes :

1. $\left({}^r\mathrm{D}^{b,\geq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(Y, \Lambda), {}^r\mathrm{D}^{b,\leq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(Y, \Lambda)\right)$ sur $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(Y, \Lambda)$ (ie la t-structure perverse).
2. $\left(0, \mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(U, \Lambda)\right)$ sur $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(U, \Lambda)$ (ie une t-structure dégénérée).

De même, le foncteur ${}^p\tau^Y_{\geq -1}$ désigne le foncteur de troncation associé à la t-structure sur $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X, \Lambda)$ obtenue en recollant les deux t-structures suivantes :

1. $\left({}^r\mathrm{D}^{b,\geq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(Y, \Lambda), {}^r\mathrm{D}^{b,\leq 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(Y, \Lambda)\right)$ sur $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(Y, \Lambda)$.
2. $\left(\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(U, \Lambda), 0\right)$ sur $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(U, \Lambda)$.

Proposition 4.4 *Soit U un ouvert de X, $Y = X - U$ le fermé complémentaire et $U \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i} Y$ les immersions correspondantes.*

Soit K est un faisceau pervers sur U, $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ un couple dans $\mathcal{C}_0$ tel que K soit $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructible, et U réunion de strates, alors

$$j_{!*}K = {}^p\tau^Y_{\leq -1}(j_*K)$$

Pour la preuve, on sous-entend $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ pour des raisons de notations évidentes.

Preuve : Considérons le morphisme ${}^p\tau^Y_{\leq -1}(j_*K) \to {}^p\tau^Y_{\leq 0}(j_*K)$. Revenant à la définition du foncteur de troncation, on calcule son cone

$$i_* \left({}^p\tau_{\geq 0}(i^* j_* K)\right)$$

Dualement, le cone du morphisme ${}^p\tau^Y_{\geq -1}(j_!K) \to {}^p\tau^Y_{\geq 0}(j_!K)$ est

$$i_* \left({}^p\tau_{\leq 0}(i^! j_! K)\right)$$

On dispose donc des deux triangles distingués

$${}^p\tau^Y_{\leq -1}(j_*K) \to {}^p\tau^Y_{\leq 0}(j_*K) \to i_* \left({}^p\tau_{\geq 0}(i^* j_* K)\right) \xrightarrow{+1} \tag{2}$$

$$i_* \left({}^p\tau_{\leq 0}(i^! j_! K)\right) \to {}^p\tau^Y_{\geq 0}(j_!K) \to {}^p\tau^Y_{\geq 1}(j_!K) \xrightarrow{+1} \tag{3}$$

On rappelle le lemme suivant (cf [BBD81] lemme 1.4.14) :

Lemme 4.5 *Soit K un objet de $\mathrm{D}^b_c(U, \Lambda)$. Alors il existe un unique L dans $\mathrm{D}^b_c(X, \Lambda)$ tel que :*

1. *$j^*L = K$; on dit que L prolonge K.*
2. *i^*L est dans ${}^p\mathrm{D}^{b,<0}_c(Y)$.*
3. *$i^!L$ est dans ${}^p\mathrm{D}^{b,>0}_c(Y)$.*

C'est l'unicité qui nous intéresse dans ce lemme, car les complexes ${}^p\tau^Y_{\leq -1}(j_*K)$ et ${}^p\tau^Y_{\geq 1}(j_!K)$ vérifient ces trois conditions vis-à-vis de K. On en déduit

$$L = {}^p\tau^Y_{\leq -1}(j_*K) = {}^p\tau^Y_{\geq 1}(j_!K)$$

Or, ${}^p\tau^Y_{\leq -1}(j_*K)$ est concentré en degrés $[-1, 0]$ et ${}^p\tau^Y_{\geq 1}(j_!K)$ est concentré en degrés $[0, 1]$ d'après les deux triangles distingués précédents. On en déduit donc que L est un faisceau p-pervers. Tous les objets des triangles distingués 2 et 3 sont donc dans le coeur de $\mathrm{D}^b_c(X, \Lambda)$, et ces triangles induisent donc des suites exactes courtes dans $\mathscr{P}er(X, \Lambda)$:

$$0 \to L \to {}^p\mathrm{H}^0(j_*K) \to i_* \left({}^p\tau_{\geq 0}(i^* j_* K)\right) \to 0$$

$$0 \to i_* \left({}^p\tau_{\leq 0}(i^! j_! K)\right) \to {}^p\mathrm{H}^0(j_!K) \to L \to 0$$

La suite exacte de $\mathscr{P}er(X, \Lambda)$

$$0 \to i_* \left({}^p\tau_{\leq 0}(i^! j_! K)\right) \to {}^p\mathrm{H}^0(j_!K) \to {}^p\mathrm{H}^0(j_*K) \to i_* \left({}^p\tau_{\geq 0}(i^* j_* K)\right) \to 0$$

permet donc de conclure que L est l'image du morphisme ${}^p\mathrm{H}^0(j_!K) \to {}^p\mathrm{H}^0(j_*K)$. $\square$

Remarque 4.6 La preuve de cette proposition montre donc

1. On a deux triangles distingués dans $\mathrm{D}_c^b(X, \Lambda)$

$$j_{!*}K \to {}^p\mathrm{H}^0(j_*K) \to i_*\left({}^p\mathrm{H}^0(i^*j_*K)\right) \xrightarrow{+1}$$

$$i_*\left(\mathrm{H}^0(i^!j_!K)\right) \to {}^p\mathrm{H}^0(j_!K) \to j_{!*}K \xrightarrow{+1}$$

2. Le complexe $j_{!*}(K)$ est l'unique prolongement de K (dans toute la catégorie $\mathrm{D}_c^b(X, \Lambda)$) vérifiant
   (a) $i^*(j_{!*}K)$ est dans ${}^p\mathrm{D}_c^{b,<0}(Y)$.
   (b) $i^!(j_{!*}K)$ est dans ${}^p\mathrm{D}_c^{b,>0}(Y)$.

Revenant à l'exemple 4.1, cette dernière remarque permet de montrer que le complexe d'intersection $\underline{IC}_X$ de X ne dépend pas de l'ouvert U lisse choisi.

En effet, supposons X lisse sur k, irréductible et de dimension d, U ouvert non vide de X, alors $\Lambda_X[d]$ est un prolongement de $\Lambda_U[d]$ qui vérifient les conditions additionnelles précédentes (pour la première, c'est évident, et pour la deuxième, on applique le théorème de pureté). On en déduit comme annoncé, $\Lambda_X[d] = j_{!*}(\Lambda_U[d])$.

Corollaire 4.7 *Soit U un ouvert de X, $Y = X - U$ le fermé complémentaire et $U \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i} Y$ les immersions correspondantes. Supposons que*

1. *Y est lisse de dimension d sur k*
2. *Les faisceaux $i^*\mathrm{H}^q(j_*K)$ sont localement constants pour $q \geq -d$.*

Alors, si K est un faisceau pervers sur U

$$j_{!*}K = \tau^Y_{\leq -d-1}(j_*K)$$

où $\tau^Y_{\leq -d-1}(j_*K)$ est défini par le triangle distingué

$$\tau^Y_{\leq -d-1}(j_*K) \to j_*K \to i_*\tau_{\geq -d}(i^*j_*K) \xrightarrow{+1}$$

PREUVE : Il s'agit de vérifier que $\tau^Y_{\leq -d-1}(j_*K)$ est bien le tronqué pervers ${}^p\tau^Y_{\leq -1}(j_*K)$ de la proposition précédente. Or ceci est évident si l'on considère Y comme une strate de X, ie on considère un couple $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ dans $\mathcal{C}_0$ tel que Y est une strate dans $\mathcal{S}$, en imposant que les faisceaux $i^*\mathrm{H}^q(j_*K)$ sont dans $\mathcal{L}(Y)$. □

Exemple 4.8 Un exemple d'application de la proposition précédente est le cas d'une courbe lisse X/k.

Soit U un ouvert non vide de X, $Y = X - U$ le fermé complémentaire et $U \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i} Y$ les immersions correspondantes. Alors, pour tout faisceau F localement constant constructible sur U,

$$j_{!*}(F[1]) = j_*(F)[1]$$

En effet, on peut se réduire au cas où F est le faisceau constant Λ_U sur U. Posons $K = \Lambda_U[1]$, et appliquons le corollaire précédent. On obtient un triangle distingué

$$j_{!*}K \to j_*K \to i_*\tau_{\geq 0}(i^*j_*K) \xrightarrow{+1}$$

Or i^*j_*K est le complexe formé de $i^*\mathrm{R}^0 j_*(\Lambda_U)$ en degré -1 et $i^*\mathrm{R}^1 j_*(\Lambda_U)$ en degré 0. Dès lors, son tronqué en degrés ≥ 0 se réduit à $i^*\mathrm{R}^1 j_*(\Lambda_U)$ placé en degré 0, d'où $i_*\tau_{\geq -1}(i^*j_*K)$ est quasi-isomorphe à $\mathrm{R}^1 j_*(\Lambda_U)$ placé en degré 0. Ce qui permet de conclure.

On retrouve en particulier le fait que le complexe $j_*(F)[1]$ est autodual, qui avait été remarqué dans [Del80].

Exemple 4.9 Considérons X un schéma sur k de dimension d. On suppose qu'il existe un carré

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

tel que U (resp. U') est un ouvert lisse de X (resp. X'), f est fini et induit un isomorphisme de U' sur U, et X' est lisse.

Dans ce cas particulièrement favorable, le complexe d'intersection de X est donné par la formule :

$$\underline{IC}_X = f_*(\Lambda_{X'}[d])$$

En effet, f étant fini, on $f_* = f_!$, d'où $f_{!*} = f_*$ et l'on obtient :

$$\begin{aligned} (fj')_{!*}(\Lambda_{U'}[d]) &= f_{!*}j'_{!*}(\Lambda_{U'}[d]) \\ &= f_*\left(j'_{!*}(\Lambda_{U'}[d])\right) \\ &= f_*(\Lambda_{X'}[d]) \end{aligned}$$

La dernière égalité vient de ce que X' est lisse, compte tenu de la remarque 4.7.

Références

[BBD81] A.A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I).* Astérisque 100, 1981.

[Del80] P. Deligne. La conjecture de weil ii. In *Pub. Math. de l'IHES*, volume 52. 1980.