Le Platonisme et les Mathématiques
Dossier d'épistémologie
Maîtrise de Mathématiques (J.Merker)
Ecole Normale Supérieure

Frédéric Déglise

mars 1997

Introduction

Les liens entre la philosophie et les mathématiques ont au cours de l'histoire été des plus étroits. L'école pythagoricienne, fondatrice en quelque sorte de ces deux disciplines, est symbolique de cette union fondamentale. La célèbre formule «tout est nombre» affirmant la primauté philosophique des mathématiques est le plus bel exemple de ce lien originel.

C'est elle qui conduisit Platon, dans son école, à placer au coeur des études les mathématiques. Faut-il rappeler la non moins célèbre formule «Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre» qui se trouvait sur le fronton du portique de l'Académie ?

Or ce lien originel affirmé par Platon se prolonge jusqu'à nos jours. C'est à présent la mathématique qui se tourne vers la philosophie, car elle fait face au problème de ses fondements avec la révolution du formalisme développé aux XIXème et XXème siècles. Ainsi l'héritage platonicien s'inscrit naturellement dans un mouvement moderne de réflexion sur les mathématiques, donnant naissance à un platonisme en mathématique.

Plus précisément, les mathématiciens ont cherché à trouver un critère extérieur aux mathématiques qui leur permettrait de légitimer des axiomes admissibles par tous comme un canon des mathématiques. Une telle tentative relève en effet de l'harmonie nécessaire à toute discipline humaine si elle veut progresser avec le temps.

Loin de vouloir présenter un exposé exhaustif des réponses qualifiées de platonistes et des critiques qu'on leur attribue, ce qui couvre une polémique bien trop large et ancienne pour être résumée ici, cet exposé propose un trajet qui tente d'amener au coeur du problème épistémologique du platonisme.

On analysera dans un premier temps l'histoire des mathématiques pour lire en elle la problématique du platonisme telle qu'elle est née à la fin du XIXème siècle, ce qui nous permettra de lui fixer un cadre restreint - dans un premier temps - et une position précise.

Or l'apport historique de la polémique engendrée par cette position, permet de comprendre, à la fois d'un point de vue argumentatif mathématique, puis d'un point de vue philosophique, comment cette position peut être critiquée.

Pour autant, il est juste de revenir à la philosophie de Platon lorsqu'on parle de platonisme, et on peut répondre en partie à ces critiques en établissant de manière claire la position de Platon quant aux mathématiques. C'est en partie le choix de Gödel évoqué à la fin du présent mémoire.

Partie 1

Vers un platonisme ontologique

Nous essaierons de voir au cours de ce premier mouvement comment est née la problématique du platonisme en mathématique, en considérant l'intrication des visions individuelles de certains mathématiciens marquants et du développement contingent des idées en mathématique. On posera alors une réponse à cette problématique acceptée comme *platonisme* par la communauté mathématique en dégageant ses principaux engagements.

1.1 Le pouvoir de l'intuition

1.1.1 La pré-vision de Gallois sur la notion de groupe

A l'époque d'Evariste Gallois, les mathématiciens étaient particulièrement préoccupés par la résolution des équations polynomiales. Il avait en effet été démontré que ces équations étaient intégralement résolubles en utilisant les nombres complexes [1]. Par ailleurs, on connaissait depuis le XVIème siècle des méthodes de résolution qui permettaient l'expression desdites solutions en terme de combinaison de radicaux des coefficients du polynÙme pour les équations de degré 3 et 4. On cherchait donc à appliquer les mêmes méthodes pour le degré 5 en supposant qu'elles aboutiraient à un résultat similaire.

Pourtant Evariste Gallois, alors qu'il n'avait qu'une vingtaine d'années, grâce à un regard nouveau sur la question, apporta les bases d'une nouvelle étonnante - quasi contre-nature à l'époque - pour la communauté mathématique : cette méthode était vouée à l'échec pour certaines équations de degré 5. La véritable révolution était de considérer les solutions de l'équation comme données a priori - bien qu'inconnues - et considérer les actions

[1] Le théorème «fondamental de l'algèbre» affirmant que toute équation polynomiale possède une solution complexe a été démontré par Lagrange dans ses mémoires en 1771.

possibles sur celles-ci compte-tenu de certaines restrictions. Il considéra ainsi un groupe de permutation des racines, puis il mit en évidence le parallélisme entre réduire l'équation gârce à des radicaux et exhiber des sous-groupes de permutation des racines. Il n'eut pas le temps de pousser son travail à bout à cause d'une mort tragique lors d'un duel, et Abel établit la démonstration rigoureuse à partir de ses idées quelque temps après [2]. Il possédait pourtant déjà la vision d'un fait mathématique vrai.

Plus encore, il avait inventé le concept de groupe qui fut formalisé plus tard et qui s'inscrivit dès lors comme un outil d'une portée universelle en mathématique, participant de toutes ses branches. Hors il est remarquable de constater la perception toute intuitive qu'en avait Gallois dans ses textes. L'existence des racines ayant été considérée en-dehors de toute détermination, il avait entrevu les liens que l'on pouvait former entre elles, et déduit ainsi l'impossibilité d'une résolution a priori indépendante de la notion de groupe. Plus remarquable encore est le fait que cette notion était bien la clef de la solution, et qu'il l'avait entrevue sans pour autant l'avoir possédée au départ.

1.1.2 La *genèse* de la continuité

Contrairement à la théorie de Gallois qui émergea d'une pensée individuelle, la notion de continuité a été dégagée beaucoup plus lentement et certainement plus collectivement.

Euler le premier propose une définition en terme de calcul : est continue toute fonction donnée par une équation. Or cette définition algébrique présentera rapidement ses défauts, malgré son utilité pour résoudre des équations fonctionnelles [3], notamment dans les publications des journaux d'Hindenburg et Gergonne.

Il faut attendre Cauchy pour voir s'établir une véritable esquisse de la continuité en termes analytiques. Considérant celle-ci comme un «objet qui se rattache à la considération des infiniment petits», il qualifie la continuité comme permettant le passage de la connaissance d'une fonction (continue) sur une famille de nombres denses sa connaissance globale sur les nombres réels. La définition précise d'une fonction f continue est

[2] En terme moderne, la démonstration repose sur le fait que le groupe de Galois de certaines équations du degré 5 est le groupe des permutations d'un ensemble à cinq éléments et que celui-ci ne contient pas de chaîne descendante de sous-groupes distingués les uns dans les autres dont les quotients sont abéliens (c'est la propriété d'être résoluble). C'est bien la considération de groupe agissant sur les racines qui est ici déterminante.

[3] La continuité est utile lorsqu'on a résolue une équation fonctionnelle sur les entiers, puis les rationnels, car elle permet le passage automatique aux nombres réels sachant que les rationnels en forment une partie dense.

pour chaque valeur x intermédiaire entre ces limites [bornes de l'intervalle de définition], la valeur de la différence $f(x+a-f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de a [4].

Il est frappant de constater dès lors l'adhésion qu'obtient cette définition. Et lorsqu'un peu plus tard, on s'aperçut de l'inexactitude de certains théorèmes cités par Cauchy (par exemple, la limite d'une fonction continue est continue), on chercha plutôt à préciser les conditions du théorème qu' remettre en cause la définition de Cauchy. Bien que la notion dégagée par Cauchy ait été rebaptisée «uniforme continuité» en raison de son caractère global, sa définition marque bien l'émergence d'une «idéalité» selon la position de Jean Dhombres, qui «s'impose d'elle-même» [5]peu à peu dans les considérations des mathématiciens.

1.2 La formalisation des mathématiques

1.2.1 La théorie des ensembles

Georg Cantor avait décrit avant tous son intuition sur la notion d'ensemble, et l'avance qu'il possédait sur ses contemporains lui valut une incompréhension et une méconnaissance totale de ses travaux. Pourtant il percevait déj dans l'échafaudage des mathématiques en son temps l'intérêt et la généralité d'une vision ensembliste. Il établit ainsi que l'ensemble des nombres réels était strictement plus grand que l'ensemble des nombres entiers dégageant la notion corrélative de cardinal, et plus tard encore il montra que l'ensemble des parties d'un ensemble A est strictement plus grand que A. Ses idées s'imposèrent malgré toutes les réticences pour s'acheminer vers la théorie des ensembles qui est au cúur des mathématiques actuelles.

Pourtant, celle-ci ne fut dégagée qu'avec peine compte-tenu des paradoxes qu'elle engendrait. Ainsi la considération de l'ensemble de tous les ensembles conduisait concevoir un ensemble comme pouvant appartenir lui-même, la considération de l'ensemble des ensembles définissables avec moins de cent lettres, au vue de la phrase «cet ensemble n'est pas définissable avec moins de cent lettres» menait à un paradoxe évident.

Ces problèmes furent résolus par la considération de classes par opposition aux ensembles, et la théorie des ensembles fut constituée par les axiomes de Zermelo-Fraenkel tels qu'on les connaît actuellement.

[4]cf. *Cours d'analyse de l'Ecole royale Polytechnique* (1821) - Ière partie, *Analyse algébrique* - A.L. Cauchy

[5]cf. *L'objectivité mathématique - Platonismes et structures formelles* (1995) article de Jean Dhombres.

Pourtant, cette théorie marquait l'émergence d'une scission prononcée dans la communauté mathématique, certain refusant purement de l'admettre.

1.2.2 De la consistance de la théorie de Zermelo-Fraenkel

Parallèlement, la logique s'étant développée, on était capable de décrire clairement une théorie et d'établir par la considération d'une métathéorie sa consistance, c'est–dire sa non-contradiction.

Or de nos jours, personne n'a été en mesure de se prononcer quant à la consistance des axiomes de Zermelo-Fraenkel. Quelle position adopter dès lors quant à leur «vérité» mathématique ? La nécessité de se prononcer face une théorie dont les conséquences étaient si vaste marque à notre sens le début d'une mise en question philosophique des concepts mathématique ; notamment, faut-il attribuer la notion d'ensemble une valeur ontologique a priori qui nous permettrait, en l'absence de décision formelle sur sa validité, de décider son utilisation en mathématique ?

Hilbert proposa, pour résoudre ce problème, un réductionnisme systématique qui consistait à montrer que tous les théorèmes démontrés par des procédés abstraits se réduisaient en fait à des procédés finis. Pourtant Gˆdel apporta un démenti avec son théorème d'incomplétude :

Celui-ci affirme que l'on peut écrire dans toute théorie consistante qui est une extension de l'arithmétique (principalement pour le principe de récurrence) une formule ni vraie ni fausse. Par ailleurs, on peut aussi formuler la consistance de la théorie, mais celle-ci n'est pas démontrable partir des axiomes de la théorie. Ainsi, on ne peut démontrer la consistance de l'arithmétique par des procédés «finitistes».[6]

Et par ailleurs, tout cela semble indiquer qu'on ne peut démontrer la consistance de la théorie des ensembles sans la considération d'une théorie plus vaste (bien qu'il y ait une différence fondamentale en logique entre les considérations de consistances qui sont purement métathéoriques, et les considérations du théorème de Gˆdel qui sont purement théoriques). Plus généralement, ce théorème met en lumière les problèmes d'indémontrabilité dont souffre toute théorie mathématique formelle.

---

[6]Citons pour achever cette idée le théorème de Parris-Harrington qui affirme qu'une version légèrement modifiée (hypothèse supplémentaire sur les cardinaux) du théorème de Ramsey, théorème de combinatoire simple que l'on avait démontré par des procédés d'extraction infinie (en particulier grce au lemme de Koenig), n'est pas démontrable avec les seuls axiomes de Péano.

1.2.3 L'émergence de l'indécidable

Prolongeant cette mise en question de la théorie des ensembles, l'axiome du choix vint aviver la polémique quant aux pouvoirs ou aux droits du mathématicien. Rappelons qu'il affirme la possibilité de faire le choix d'un élément dans chaque ensemble d'une famille quelconque d'ensemble (et notamment infinie). Mais par ailleurs, il est équivalent dire que tout ensemble (en particulier celui des nombres réels) possède un ordre pour lequel toute partie a un plus petit élément, affirmation beaucoup moins évidente du point de vue intuitif. La question de son acceptation devint plus polémique encore lorsque Gˆdel démontra que supposer la consistance de la théorie (ZF) + axiome du choix était équivalent supposer la consistance de (ZF). Plus tard, Cohen jeta définitivement de l'huile sur le feu en montrant l'indépendance de l'axiome du choix vis à vis de la théorie des ensembles, c'est–dire la consistance de (ZF) + négation de l'axiome du choix est équivalente à la consistance de (ZF).

De ces résultats, on déduit l'indécidabilité de certains énoncés ou axiomes mathématiques, et dès lors la nécessité cruciale pour le mathématicien de faire un choix sans le secours de la pure logique, comme cela avait été le cas auparavant.

1.3 La problématique de l'existence en mathématique : un platonisme naïf

Il ressort de notre analyse historique deux éléments primordiaux : la nécessité avec laquelle se sont imposées certaines notions en mathématiques, telle la notion de continuité ou celle de groupe, et la nécessité pour le mathématicien de faire un choix dans ce qu'il accepte de considérer.

De là une double problématique se dégage en épistémologie des mathématiques :

D'abord la question de l'existence intrinsèque des objets mathématiques - objet(s) que l'on nommait jusque l notion(s) pour éviter toute confusion. Mais aussi la question de la vérité des énoncés mathématiques, que l'on peut aussi formuler en terme d'existence de leurs conditions de vérité.

C'est primitivement la première question qui s'exprime dans les débats sur l'épistémologie des mathématiques, car une réponse conditionne a priori la seconde.

Ainsi le premier «platonisme» (et l'on justifiera le pluriel implicite de cette formulation) que l'on peut exposer, qui est une réponse directe à notre question, se trouve dans l'ouvrage collectif *Penser les mathématiques* :

Les principales affirmations du platonisme mathématique sont les suivantes : Toute question mathématique concerne des objets aussi réels (et même plus réels) que les astres, les animaux ou les végétaux : elle a donc une réponse (éventuellement inconnue) affirmative ou négative : c'est la logique bivalente et son corollaire, le principe du tiers-exclu. [...]

On voit qu'ici la solution la question ontologique pure est considérée comme impliquant une réponse quant la vérité des énoncés mathématiques : elle est assurée par l'affirmation de l'existence des objets mathématique. Pour comprendre la qualification de platonisme employée ici, il faut prendre le mot «objet» dans le sens d'idéalité qui nous rapproche de la philosophie de Platon.

Par ailleurs, un fait important d'une telle supposition est précisé dans un autre texte des auteurs Benaceraff et Putnam :

Les platoniciens sont ceux qui considèrent que les mathématiques sont la découverte de vérités concernant des structures qui existent indépendamment de l'activité ou de la pensée des mathématiciens[7].

Ici est bien précisée l'indépendance de telles idéalités («structures» doit être compris dans ce sens) vis à vis du mathématicien, notamment de son mode de pensée et de son mode de connaissance. On remarque encore cette affirmation par le fait que nos deux questions sont ici réglées d'un seul et même mouvement par la formulation : la pensée du mathématicien est un regard sur des idéalités qui permet de découvrir, de lire la vérité à leur sujet.

Une telle conception, malgré la limpidité de ses conclusions, ne peut pourtant paraître que malheureuse. La simplicité de ses considérations nous amène à qualifier ce platonisme de naïf, ne serait-ce que par égard à la philosophie de Platon.

Notre propos dans ce qui suit est de montrer pourquoi une telle position n'est pas tenable au regard des mathématiques actuelles, et de voir comment une critique philosophique s'élève contre cette position, dans le cadre de la problématique fixée pour le moment.

[7] *Philosophy of Mathematics - Selected Readings* IIème édition - 1983

Partie 2

Les aspects empiristes et constructifs de l'antiplatonisme

2.1 Les paradoxes du formalisme ensembliste : un formaliste artificieux

On a déjà vu les paradoxes émergeant de la notion d'ensemble, dans I-2)-a).

Or la théorie de Zermelo-Fraenkel est explicitement formulée, en particulier dans l'axiome de compréhension, pour palier à ces paradoxes causé par une non-considération des termes acceptables pour définir un ensemble. Ainsi, on restreint la notion d'ensemble à une catégorie particulière d'objets plus généraux qu'on appelle classes. Plus précisément, les ensembles peuvent être définis par une condition monadique quelconque pourvu qu'ils soient considérés comme des sous-ensemble d'un ensemble déj établit. Il s'avère qu' partir de la notion d'ensemble vide, conséquence des axiomes de Zermelo-Fraenkel, on soit ensuite en mesure de trouver effectivement tous les ensembles utilisés en mathématique.

Un tel déplacement du problème d'existence dans une catégorie d'objet dont les propriétés sont largement inconsidérées par la théorie apparait pour plus d'un comme un mysticisme difficilement acceptable et comme une réponse artificieuse.

Par ailleurs la théorie de Zermelo-Fraenkel nécessite l'hypothèse d'existence d'un infini dénombrable (axiome de l'infini), ce qui montre qu'une telle théorie est inapte à rendre compte de l'infini dénombrable d'une manière satisfaisante. Et même après l'ajout de cet axiome, les ensembles considérés finissent par atteindre un tel degré de complexité (par exemple o˘ w est le premier cardinal infini), qu'ils apparaissent tout fait inutile aux mathématiques les plus complexes.

Citons enfin le paradoxe de Skolem qui affirme, grce au théorème de Loweneim-Skolem [1], que la théorie des ensembles possède un modèle dénombrable. Même s'il faut ajouter le qualificatif «intuitif» ou «métathéorique» pour ce modèle (qui donc ne tombe pas, par définition, sous le scope de la théorie), on voit bien ici le caractère artificieux de ces conceptions : comment concevoir un ensemble non dénombrable avec un modèle dénombrable ?

2.2 Conséquences critiques d'un formalisme vide

Nous essaierons de nous dégager de toute volonté exhaustive quant à la présentation des critiques du platonisme. Au contraire, on présentera brièvement comment ces oppositions sont nées dans les courants principaux des réflexions sur les mathématiques, tout en apportant à notre problématique une profondeur nouvelle.

2.2.1 L'inflationnisme engendré par le platonisme

Une des critiques engagées contre le platonisme et soutenue notament par le nominalisme[2] est l'inflationisme ontologique auquel il mène, et qui nous engagerait à accepter nimporte quelle entité mathématique pourvu qu'elle soit non contradictoire. En particulier, on arriverait à ne considérer que des assertions vide de sens, totalement irréalistes et inutiles.

Ainsi le nominalisme considère en réaction à ce type de débordement :

qu'une théorie mathématique est acceptable seulement si elle peut être interprétée de manière n'impliquer aucune quantification ou référence singulière à des objets abstraits[3]

On constate bien ici la volonté d'éliminer toute référence existentielle pure à des entités «abstraites» non précisées, ce qui est refuser la position du platonisme. Précisons la position de Field sur ce problème.

Selon lui, on doit éviter de s'engager quant à l'existence d'objets abstraits en mathématique, mais pour autant, il n'exclut pas une référence explicite dans les énoncés mathématiques à des abstractions. Et pour contrer l'inflationnisme évoqué plus haut, il propose une thèse réductionniste - beaucoup

[1] Le théorème de Loweneim-Skolem, sous sa forme descendante, affirme que toute théorie décrite avec un nombre dénombrable de symboles qui posséde un modèle (on dit encore qu'elle est consistante), possède en fait un modèle dénombrable.

[2] *Science Without Numbers. A Defense of Nominalism* - H. Field - 1980

[3] *L'objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles.* 1995 - article de P. Engel - *Platonisme mathématique et antiréalisme.*

plus vaste que le programme de Hilbert - en montrant que la théorie mathématique est en fait conservative vis à vis d'une théorie sans mathématiques, dite nominaliste[4]. Ainsi tout théorème démontré en mathématiques est en fait vrai dans une théorie qui ne fait aucune référence des objets mathématiques.

Pour autant, on peut avancer que Field utilise dans sa démonstration les mathématiques et que sa thèse en est contradictoire. Aussi, on comprendra des positions plus radicales qui visent réellement à restreindre la pratique mathématique des abstractions.

2.2.2 Cognitivisme et constructivisme

Jean Petitot présente un exposé des thèses cognitiviste de P. Kitcher dans *L'objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles.*

> Selon ce dernier [Kitcher], les mathématiques constituent une activité symbolique nous permettant, par une suite d'approximations successives sédimentées dans les traditions, de structurer de plus en plus adéquatement notre expérience au moyen d'idéalité. Les mathématiques émergeraient, par ce processus d'idéalisation, de connaissance proto-mathématique (perceptives par exemple) contraintes par la réalité du monde externe et ayant eu une fonction d'amorçage

On retrouve ici la volonté de se dégager de toute ontologie en faveur des objets mathématiques cette fois par l'évocation des processus cognitifs à l'oeuvre dans notre connaissance mathématique. Par ailleurs, la contrainte de la réalité est clairement affirmée ainsi que le joug de notre perception sur nos connaissances «proto-mathématiques».

Partant de la même manière des restrictions de l'esprit humain (notamment du *finitisme* de nos actes et de nos possibilités de calcul), le constructivisme propose de ne plus reçevoir que les objets mathématiques explicitement construit par le mathématicien. En pratique, tout assertion portant sur l'existence ou la mise en relief d'un objet des mathématique doit être une construction explicite de cet objet par l'utilisation de moyens algorithmiques, ce qui nous conduit à abandonner une large partie des théorèmes d'existence des mathématiques modernes.

Celà se traduit par l'abandon du tiers-exclu, c'est-à-dire de l'assertion logique qu'une propriété mathématique est toujours soit vraie soit fausse. On pointe ici clairement l'anti-platonisme d'une telle position qui, plus qu'affirmer une inaccessibilité pour l'esprit humain d'entités mathématiques abstraites existantes, assume au contraire leur non-existence. L'argument évoqué, outre la vacuité des propositions abstraites du platonisme et de ses objets

[4]pour une explication de sa démonstration qui repose sur la notion logique de conséquence sémantique, voir l'article de Jean Petitot dans *L'objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles.* 1995.

abstraits, est l'inutilité de telles mathématiques pour l'homme au regard d'un physicisme prononcé.

On voit ici, sans qu'il soit clairement thématisé, l'empirisme d'une telle position. Mais le constructivisme ne répond que négativement au platonisme sqns pour autant lui substituer une opposition philosophique marquante. Une telle opposition se trouve pourtant naturellement dans la philosophie d'Aristote.

2.3 L'empirisme aristotélitien et le symbolisme de Wittgenstein

2.3.1 La position aristotélitienne : Les Mathématiques comme logique des possibles

Nous présenterons brièvement les traits caractéristiques de la pensée aristotélitienne, tels qu'ils sont évoqués dans l'article d'Alain Badiou extrait de *L'objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles.* Le principe ontologique d'Aristote est la substance, et l'être s'exprime toujours en terme de substance. La logique est pour lui l'instrument de compréhension de l'univers, mais elle est une donnée purement formelle qui se lit en chaque chose. Il s'en suit que les mathématiques sont une «pensée pure» et vide d'être ou plus exactement de substance. La pensée est prise comme un «cadre descriptif adéquat, o˘ l'expérience et l'opinion trouve, sans césure, de quoi se fonder en raison».

La vérité ne se trouve que dans les choses et les mathématiques ne sont qu'une logique des possibles qui permet d'en rendre compte. Ainsi le nombre est toujours donné avec les choses comme catégorie de la quantité, et ainsi des notions mathématiques.

Le point crucial est que la question ontologique évoquée dans notre problématique devient infondée dans la philosophie d'Aristote puisque les mathématiques sont étrangères toute notion d'existence, au principe de substance.

2.3.2 Le symbolisme de Wittgenstein

La position de Wittgenstein sur les mathématiques est similaire celle d'Aristote en ce sens que l'on peut lire dans le *Tractatus logico-philosophicus* :

6.21 - La proposition des mathématiques n'exprime pas de pensée.

6.211 - Dans la vie en effet ce n'est jamais la proposition mathématique que nous utilisons, en revanche nous n'utilisons la proposition mathématique que pour conclure à partir de propositions qui n'appartiennent pas aux mathématiques à d'autres qui également n'appartiennent point aux mathématiques.

Pourtant Wittgenstein affirme d'emblée sa différence avec Aristote puisque sa thèse est l'impossibité de toute réponse métaphysique, et que par conséquent la question de l'existence est dénuée de sens. Pour Wittgenstein, seuls les faits confèrent un sens à une proposition.

Ainsi la proposition mathématique est pour lui purement *grammaticale* (c'est-à-dire déterminant un concept), qu'elle permet d'effectuer une détermination de sens. En particulier, les propositions mathématiques forment une classe particulière de proposition chez Wittgenstein, exemptée de toute responsabilité devant l'expérience, et ne se prononcant jamais qu'indirectement sur les faits, comme le montre Jacques Bouveresse dans *Le pays des possibles.*

Il s'ensuit que les énoncés mathématiques ne possèdent pas de vérité intrinsèque, qu'au contraire ils soient une proposition de sens dont la démonstration même fournit une lumière essentielle. Il est significatif qu'une proposition et sa démonstration aient pour Wittgenstein un sens bien différent de la proposition seule.

On retrouve dans cette conception purement grammaticale des énoncés mathématiques l'importance accordée par les constructiviste au calcul. Ainsi Wittgenstein affirme la primauté de l'équation dans les mathématiques :

6.2341 - L'essentiel de la méthode mathématique consiste à travailler avec des équations. C'est sur cette méthode en effet que repose l'évidence de chaque proposition mathématique.

On voit comment s'articule une critique du platonisme exposé plus haut. Tout d'abord il mène l'homme à considérer des formes vides de sens et inadaptées (et c'est en particulier la position de Wittgenstein). En particulier, par l'éludation du carcatère proprement humain des mathématiques il mène à l'impasse que constitue l'infini potentiel pour un sujet dont les actes sont limités, ce qui tend à nous ramener vers les conceptions finitistes des constructivistes. Par ailleurs, les mathématiques sont une forme de la logique et Aristote comme Wittgenstein mettent l'accent sur ce rôle fondamental de la connaissance des mathématiques, vers une véritable *épistémologie* des mathématiques et contre une philosophie qui méconnait l'homme et sa position dans le monde.

Pourtant, alors que notre exposé s'est clos avec la pensée d'Aristote et de Wittgenstein, il nous faut souligner l'éloignement d'une conception telle que celle exposée dans I-3) de la philosphie de Platon. Aussi nous avons dénommé le mot platonisme à l'aide d'un pronom indéterminé par opposition au Platonisme, c'est–dire la philosophie de Platon. Il est juste au vue de cette remarque de revenir sur l'exposé de Platon qui intègre lui-même les mathématiques comme partie de sa philosophie. On dégagera ainsi plus précisément une véritable ontologie des idéalités mathématiques.

Et sans renoncer aux critiques que l'on a exposé ici, on esquissera les grandes lignes de certaines conceptions «platoniques» des mathématiques, telle celle de Frege ou de Salanskis.

Partie 3

Vers une conception moderne du platonisme

3.1 Une relecture nécessaire de Platon

3.1.1 Critique de l'orientation *objectale* de l'assertion en I-3)

Or si l'on reprend la citation du I-3) :

Les platoniciens sont ceux qui considèrent que les mathématiques sont la découverte de vérités concernant des structures qui existent indépendamment de l'activité ou de la pensée des mathématiciens.

On note la séparation explicite des objets mathématiques et du sujet qui les connaît. Or cette distinction, comme le fait remarquer Alain Badiou dans *Objectivité Mathématiques. Platonismes et structures formelles* est bien plus issue de la considération moderne de subjectivité que de la pensée de Platon.

Platon considère les objets mathématiques comme des idées qui sont essentiellement déj présente en l'homme, qui n'ont rien par conséquent d'extérieur à la pensée qui les embrasse. Socrate montre précisément ce fait dans le *Ménon* en questionnant un esclave pour l'induire se ressouvenir du principe de duplication du carré sans jamais lui inculquer une définition, par le seul pouvoir évocateur de la figure.

L'image d'un sujet découvrant les objets mathématiques est donc tout à fait faussement qualifiée de platonisme.

3.1.2 Les mathématiques dans les oeuvres de Platon

Dans *La République*, Platon expose à travers la bouche de Socrate la gradation qu'il met dans la connaissance et la formation du philosophe.

Ainsi, il affirme le monde des Idées dans le livre VI, c'est-à- dire des principes de toute chose. Chaque chose du monde sensible participe d'une Idée qui en constitue l'essence-même. Or la position ontologique de Platon est d'attribuer à ces idées une existence plus parfaite que toute les choses du monde sensible car elles sont immuables et éternelle. L'Idée, l'en-soi de chaque chose est une forme pure et parfaite, et c'est elle que vise le ressouvenir expliqué par Socrate dans le *Théetète*. Ainsi l'homme ne découvre pas l'en-soi par un acte de connaissance séparé du connu, mais il parvient à la réminiscence des Idées qui étaient déjà en lui.

Or les mathématiques occupent une place bien précise dans la gnoséologie de Platon. On vient d'exposer la séparation entre le monde sensible et le monde des Idées (ou monde intelligible). Socrate use d'une métaphore pour caractériser les mathématiques dans cette perspective. Il compare, dans le livre VII de *La République*, les objets mathématiques dans le monde sensible aux reflets dans le monde intelligible : les objets mathématiques sont bien des Idées, qui existent en-soi, mais elles sont au regard de la connaissance comparable aux reflets dans le monde sensible car elle repose toujours sur une hypothése.

Les mathématiques sont donc une «connaissance discursive» qui ne permet qu'une connaissance trouble des Idées car ce mode de connaissance ne permet pas de remonter au-delà des hypothèses (Il oppose ensuite à cette connaissance la dialectique qui permet de s'élever au-delà des hypothèses vers la contemplation des Idées en-soi).

Pour autant, les objets dont elles traitent ont plus de réalité que les choses sensibles compte tenu de leur immuabilité, et de leur universalité. Ces objets sont proprement intermédiaires dans la gradation ontologique de Platon entre les choses du monde sensible soumise au devenir et les Idées transcendentales anhypothétiques du monde sensible.

3.1.3 Conclusion au sein de notre problématique

Platon se prononce donc en faveur de l'existence des Idées mathématiques en tant qu'immuables, éternelles et immanentes. Par ailleurs, ces Idées ont plus d'être que toutes les choses du monde sensible car ces denières sont périssables.

Mais ces Idées, soumises aux propositions mathématiques en quelque sorte, demeurent imparfaites car la connaissance mathématique ne peut s'élever au-del des hypothèses qui lui sont nécessaires et intrinsèques. En ce sens, on peut dire que les conditions de vérité des propositions mathématiques sont imparfaites d'un point de vue gnoséologique.

Malgré cette imperfection, les Idées mathématiques mènent l'homme à la contemplation des principes anhypothètiques car elles l'amènent à réfléchir sur les choses en-soi comme une propédeutique. Dans cette perspective, la théorie des ensembles est tout à fait légitime, d'une part parce qu'elle n'a pas révélée de contradiction, d'autre part parce qu'elle propose un champ d'investigation extrémement riche du point de vue des idées, contrairement au un formalisme vide évoqué par les constructionnistes.

3.2 L'intuitionnisme de Gödel

Pour illustrer notre propos, nous n'examinerons que la position de Gödel traditionnellement prise comme emblème du platonisme mathématique.

Dans un article devenu célèbre, *What is Cantor's continuum hypothesis*, Gödel explique sa vision mathématique et son engagement philosophique vis à vis d'elle, et l'on retrouve dans sa pensée les marques de la philosophie de Platon (ainsi que l'influence de Cantor) :

En tout état de cause, la question de l'existence objective des objets de l'intuition mathématique (question qui, soit dit incidemment, est une réplique exacte de la question de l'existence objective du monde extérieur) n'est pas décisive pour le problème discuté ici. Le simple fait psychologique de l'existence d'une intuition assez claire pour produire les axiomes de la théorie des ensembles ainsi qu'une suite ouverte d'extensions de ces axiomes, suffit à donner sens à la question de la vérité ou de la fausseté de propositions telles que l'hypothèse du continu de Cantor. Ce qui néanmoins, peut-être plus que nimporte quoi d'autre, renforce ce critère d'acceptation de ce critère de la vérité en théorie des ensembles est que des appels répétés à l'intuition mathématique sont indispensables non seulement pour obtenir des réponses non ambigües aux questions de la théorie des ensembles transfinis, mais aussi pour la solution de problèmes arithmétiques finitistes (du type de la conjecture de Goldbach), lesquels ne supportent point de doute sur le caractère doué de sens et non-ambigu des concepts qu'ils mettent en jeu. Cela suit du fait que pour tout système axiomatique il y a une infinité de propositions indécidables de ce type[1].

Les mathématiques sont ici prises - contrairement la position de Wittgenstein - comme une pensée dont l'intuition garantit la légitimité (Celle-ci s'apparente à la réminiscence que décrit Platon et qui permet de mettre en

[1] *What is Cantor's continuum problem ?*, *American Mathematica Monthly*, **54**, 1947, pp. 512-525

lumière les Idées). Cette légitimité découle du fait de l'intelligibilité de la pensée, ou encore de sa consistance.

Notamment, l'infini ne pose ici pas plus de problème que le fini puisqu'il est saisi d'un même mouvement par l'intuition, ce qui marque une opposition radicale face aux considérations finitistes sur l'inaccessibilité de l'infini actuel.

D'après le commentaire d'Alain Badiou[2], l'indécidable est ici au coeur des mathématiques (ce qui rencontre l'idée de l'impossibilité de la connaisance mathématique à remonter au-delà de ses principes), mais il est, plus qu'une limite, «une perpétuelle incitation à exercer l'intuition inventive». Pour autant, celle-ci n'est jamais utile : «la mathématique doit être constamment *re-décidée*».

---

[2] *L'objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles.* 1995, article *Théorie des ensembles et théorie des Topos sous l'oeil du philosophe.* A. Badiou

Conclusion

La théorie des ensembles reste une question cruciale en mathématique, puisqu'on ignore si elle est consistante, et l'on on a vu combien elle était le point d'orgue des scissions en épistémologie des mathématiques.

La question de l'existence d'un domaine d'objets mathématiques indépendant a été largement démystifiée quand à sa portée, et l'on a pu établir que la réponse ontologique positive, qualifiée de platonisme, est trop pauvre face aux exigences du mathématicien en général. Au contraire, il nous semble acquis que le platonisme se prononce en faveur de l'étude de la théorie des ensembles, tant par la conception idéelle du monde intelligible propre à Platon que par la mise en demeure de l'indécidable dégagée par Gödel, chacun s'accordant dans la réminiscence et l'intuition des idées mathématiques.

Il nous faut revenir sur le suspens laissé quant à la confrontation des philosophies d'Aristote et Wittgenstein d'un côté, et celle de Platon de l'autre. La perspective de la forme pure des mathématiques est en effet une des causes du développement important de la logique qui nous a permis l'étude des théories mathématiques sous l'angle de leur consistance. Cet aspect de la pensée aristotélitienne suffit à montrer l'importance d'une confrontation dialectique sur les mathématiques. Et cette dialectique nous semble si fondamentale qu'elle peut-être placée comme dynamique inépuisable des progrès de l'homme en épistémologie, et plus largement sur la problématique de la connaissance, comme le montre la critique kantienne.