Rappels d'$\mathbb{A}^1$-homotopie

2021/03/26

[MV99] F. Morel et V. Voevodsky
$\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes
(IHÉS, 1999)

But : Appliquer les techniques de topologie algébrique à l'étude des schémas
(où la droite affine $\mathbb{A}^1$ jouant le rôle de $[0,1]$).

On fixe k un corps parfait
(mieux : k un anneau noethérien $\dim_{Krull}(k) < +\infty$)

Def : Un faisceau $\mathcal{F} : Sm_k \to Set$ est dit $\mathbb{A}^1$-inv. si, pour tout $X \in Sm_k$, $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^1)$ est un iso.

Ex : CH (groupes de Chow), K_0 (Grothendieck)
sont $\mathbb{A}^1$-invariants sur les schémas réguliers

$\mathrm{Pic}(X)$ n'est pas $\mathbb{A}^1$-invariant si X est moche (singulier)

C'est pour cela que l'on travaille avec Sm_k des schémas lisses (séparés, type fini)

Déf : On note Spc_k la catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur Sm_k. Les objets sont appelés espaces motiviques.

- (Yoneda) On a des foncteurs $Sm_k \hookrightarrow Spc_k \longleftarrow \Delta Set$
- Spc_k possède des limites et colimites, $*$ l'objet final

Déf : $Spc_{k,*}$ = cat. des espaces pointés $(\mathcal{X}, x)$
$x : * \to \mathcal{X}$

- (Wedge sum) Si (X,x) et (Y,y) sont des espaces pointés, on définit $X \vee Y$ le pushout

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \vee Y \end{tikzcd}$$

- (Smash product) On définit $X \wedge Y$ par $X \times Y / X \vee Y$.

Def: Un carré distingué de Nisnevich est pullback

$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & V \arrow[d, "\varphi \text{ étale}"] \\ U \arrow[r, hook, "j"] & X \end{tikzcd}$$

imm. ouverte

$\varphi^{-1}(X \setminus U)_{red} \to (X \setminus U)_{red}$ est isomorphisme.

Rq: $\mathrm{Zar} < \mathrm{Nis} < \mathrm{Etale}$

- On localise afin de forcer "Mayer-Vietoris" pour la topologie de Nisnevich. $\mathcal{H}_{Nis}(k) = L_{Nis}\Delta Presh(Sm_k)$
- On inverse formellement les projections $\mathcal{X}\times\mathbb{A}^1 \to \mathcal{X}$ et $\mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k) = L_{\mathbb{A}^1}L_{Nis}\Delta Presh(Sm_k)$ la catégorie homotopique instable.

Notation : $[\mathcal{X},\mathcal{Y}]_{\mathbb{A}^1} = Hom_{\mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$

Un isomorphisme est appelé $\mathbb{A}^1$-équivalence faible.

Rq : Soient $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ deux espaces et
$H : \mathcal{X} \times \mathbb{A}^1 \to \mathcal{Y}$ un morphisme

$H(-,0) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ et $H(-,1) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$

On a une flèche

$$\mathrm{Hom}_{Spc_k}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \Big/ \{\mathbb{A}^1\text{-hmtpies naïves}\} \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{Y}]_{\mathbb{A}^1}$$

MAIS ce n'est pas toujours une bijection

Sphères motiviques

- simpliciale : $S^1 = \Delta^1 / \partial\Delta^1$

- Tate : $(\mathbb{G}_m, 1)$

$S^{i+j\tau}$
$\parallel$
$S^{i,j} = S^{\wedge i} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge j}$

Ex : On a des $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles : $\mathbb{P}^1 \simeq S^{1,1}$
(Rec de Zariski de $\mathbb{P}^1$ par $\mathbb{A}^1$ et $\mathbb{A}^1$)

- $\mathbb{A}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1,n}$
- $\mathbb{P}^n / \mathbb{P}^{n-1} \simeq S^{n,n}$
-

Représentabilité : $\mathbb{P}_k^\infty = \operatorname{colim}_n \mathbb{P}_k^n$

(via les immersions $\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$)

Multiplication : l'immersion de Segre $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$

donne $\mathbb{P}^\infty \times \mathbb{P}^\infty \to \mathbb{P}^\infty$ qui est associative (modulo $\mathbb{A}^1$-homotopie)

Prop [MV99] Pour tout $X \in Sm_k$, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\simeq} [X, \mathbb{P}^\infty]_{\mathbb{A}^1}$$

Soit $X \in Sm_k$, $\mathcal{V}_r(X) = \{$ fibrés vectoriels sur X de rg $r\}/\sim$

$\mathcal{V}_r(X)$ est $\mathbb{A}^1$-invariant si on le restreint k-schémas lisses affines (faux en général)

<u>Thm</u> (Morel, Schlichting, Asok-Hoyois-Wendt)

$$[X, Gr_n]_{\mathbb{A}^1} \simeq \mathcal{V}_n(X)$$

Groupes de Chow :

<u>Thm :</u> (Voevodsky) $\qquad X \in Sm_k$

$$[X_+, K(\mathbb{Z}(n), 2n)]_{\mathbb{A}^1} \to CH^n(X)$$

Eilenberg-McLane $\quad \text{''} \; \mathbb{Z}_{tr}(\mathbb{P}^n / \mathbb{P}^{n-1})$

Isomorphisme de Pureté : Soit $X \in Sm_k$ et $\pi : E \to X$ un fibré vectoriel de section nulle $i : X \to E$

On pose $Th(\pi) = E/_{E - i(X)}$ (espace de Thom)

Thm : (Pureté, Morel Voevodsky) $i : Z \to X$ imm. fermé entre k-schémas lisses, on a un isomorphisme

$$X/_{X - i(Z)} \simeq Th(\nu_i)$$

ν_i fibré normal

Catégorie homotopique motivique stable

$$SH(k) := H_{\mathbb{A}^1}(k)\left[(\mathbb{P}^1,\infty)^{-1}\right]$$

est une catégorie triangulée monoïdale symétrique

Objets : spectres motiviques $(E_n)_{n\geq 0}$

$$\mathbb{P}^1 \wedge E_n \longrightarrow E_{n+1}$$

Adjonction (de Quillen)

$$\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1} : Spc_{k,*} \rightleftarrows Spt_k : \Omega^\infty_{\mathbb{P}^1}$$

Faisceaux $\mathbb{A}^1$-homotopiques

Def : $(\mathcal{X}, x)$ espace pointé, le $i^{\text{ème}}$ faisceau $\mathbb{A}^1$-homotopique $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}, x)$ est le faisceau Nisnevich sur Sm_k associé au préfaisceau

$$U \mapsto [S^i \wedge U_+, (\mathcal{X}, x)]_{\mathbb{A}^1}$$

(groupe si $i \geq 1$, abélien si $i \geq 2$)

Déf : $\mathcal{X}$ est $\mathbb{A}^1$-connexe si $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ est trivial

Thm ($\mathbb{A}^1$-connexité de Morel)

Un morphisme $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ entre espaces $\mathbb{A}^1$-connexes est $\mathbb{A}^1$-équiv. faible si, et seulement si, quel que soit $x \in \mathcal{X}$, la flèche $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}, x) \to \pi_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y}, f(x))$ est <u>isom</u>.

Homotopies des sphères : $\mathbb{A}^n - 0$ est $\mathbb{A}^1$-connexe si $n \geq 2$

Thm (Morel) $\mathbb{A}^n - \{0\}$ est $(n-2)$-$\mathbb{A}^1$-connexe

i.e. si $n \geq 2$ il est $\mathbb{A}^1$-connexe et $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{A}^n - 0, x)$ s'annule pour tout $x \in (\mathbb{A}^n - 0)$ et $1 \leq i \leq n-2$

Thm : $n \geq 2$, L/k fin^t engendrée séparable

Alors $\pi^{\mathbb{A}^1}_{n-1}(\mathbb{A}^n - 0)(L) = K^{MW}_n(L)$

$$\| \quad \operatorname{colim}_{\substack{X \in Sm_k \\ X \text{ model} \\ \text{de } L}} \pi^{\mathbb{A}^1}_{n-1}(\mathbb{A}^n - 0)(X)$$

$k \subset A \subset L$

Thm (Morel) $n \geq 2$, on a un isomorphisme

$$[\mathbb{A}^n - 0, \mathbb{A}^n - 0]_{\mathbb{A}^1} \simeq GW(k)$$

appelé "degré de Brouwer motivique"

Thank you!