K-théorie de Milnor-Witt
et
modules de cycles

Convention : k corps parfait

Classiquement en topologie

$$\pi_d(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } d < n \\ \mathbb{Z} & \text{si } d = n \end{cases}$$

Théorie motivique

$$\pi_n((\mathbb{P}^1)^{\wedge n}) \cong K_n^{MW} \quad (n \geq 2)$$

En particulier, on a

$$\pi_0(\Omega^2_{\mathbb{P}^1}\Sigma^2_{\mathbb{P}^1}S^0) \simeq GW(k) \simeq \pi_0(\Omega^3_{\mathbb{P}^1}\Sigma^3_{\mathbb{P}^1}S^0)$$

<u>Thm</u>: $\mathcal{X}$ espace, on a un isomorphisme :

$$\pi_0(\Omega^d_{\mathbb{P}^1}\Sigma^d_{\mathbb{P}^1}\mathcal{X}) \simeq \pi_0(\Omega^{d+1}_{\mathbb{P}^1}\Sigma^{d+1}_{\mathbb{P}^1}\mathcal{X})$$

$d \geqslant 3$ (Bachmann '20) $d \geq 2$

Déf : Soit E un corps, la K-théorie de Milnor-Witt de E, notée $K_*^{MW}(E)$, est l'algèbre $\mathbb{Z}$-graduée libre engendrée par $[a]$ $(a \in E^\times)$ et η modulo :

$[a]$ $(d^\circ = +1)$, η $(d^\circ = -1)$

1. $[a][1-a] = 0$ (Steinberg) $a \in E \setminus \{0,1\}$
2. $[ab] = [a] + [b] + \eta [a][b]$
3. $\eta [a] = [a] \eta$
4. $\eta (\eta [-1] + 2) = 0$

Rq : $K^{MW}/\eta = K^M$ $K_0^{MW} = GW$

Notations : $[a_1, \dots, a_n] = [a_1] \cdot \_ \cdot [a_n]$

$\langle a \rangle = 1 + \eta [a]$

$\varepsilon = - \langle -1 \rangle$

$n_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} \langle -1 \rangle^i$ pour $n \geq 0$

K-théorie tordue / twistée (Deligne)

La donnée ν_E espace vectoriel virtuel est équivalente à $(n, \mathcal{L}_E)$

$n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{L}_E$ droite$/E$

$$(n, \mathcal{L}_E) - (n', \mathcal{L}'_E) = (n - n', \mathcal{L}_E \otimes \mathcal{L}'^{\vee}_E)$$

Def : $K^{MW}(E, \nu_E) = K_n^{MW}(E) \otimes_{\mathbb{Z}[E^\times]} \mathbb{Z}[\mathcal{L}_E^\times]$

$\langle u \rangle \mapsto u$

(D1) Restriction

$\varphi : E \to F \qquad v_F = \varphi^{-1} v_E$

$\varphi_* = \mathrm{res}_{F/E} : K^{MW}(E, v_E) \to K^{MW}(F, v_F)$

(R1a) $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$

(D3) K^{MW}-action

$$K^{MW}(E, \nu_E) \otimes K^{MW}(E, W_E) \to K^{MW}(E, \nu_E + W_E)$$

Ex: $\langle ab \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle \in K_0^{MW}(E)$

$= GW(E)$

(D4) Résidus

E corps, v valuation (discrète), π uniformisante

Il existe

$$\partial_v^{\pi} : K_*^{MW}(E) \longrightarrow K_{*-1}^{MW}(\kappa(v))$$

commute avec η

$$[\pi, a_1, \ldots, a_n] \longmapsto [\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n]$$

$$[a_1, \ldots, a_n] \longmapsto 0$$

Pb : dépendance en π : $\partial_v^{\pi}(x) = \langle u \rangle \partial_v^{u\pi}(x)$

$u \in \mathcal{O}_v^{\times}$

Solution : on tord par le cône normal

(D4)

$$\partial_v : K^{MW}(E, \nu_E) \longrightarrow K^{MW}(\kappa(v), -m_v/m_v^2 + \nu_{\kappa(v)})$$

$$x \otimes l \longmapsto \partial_v^{\pi}(x) \otimes (\bar{\pi}^* \wedge l)$$

Ça ne dépend plus π.

Prop (R3a) $j : E \subset F$ ext. de corps

$v \quad w$ valuations (discrètes)

indice de ramification e.

π uniformisante de w

$\rho = \pi^e$.

$i : \kappa(v) \to \kappa(w)$

Alors

$$\begin{array}{ccc}
\underline{K}^{MW}(E, \mathcal{V}_E) & \xrightarrow{\partial_v} & K^{MW}(\kappa(v), \mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2 + \mathcal{V}_{\kappa(v)}) \\
\downarrow j^* & & \downarrow e_\varepsilon \cdot i_* \\
K^{MW}(F, \mathcal{V}_F) & \xrightarrow{\partial_w} & K^{MW}(\kappa(w), \mathfrak{m}_w/\mathfrak{m}_w^2 + \mathcal{V}_{\kappa(w)})
\end{array}$$

où $e_\varepsilon \cdot i_*$ est $x \otimes (\bar{\rho}^* \wedge \ell) \longmapsto e_\varepsilon \cdot i_*(x) \otimes (\bar{\pi}^* \wedge \ell)$

(H) $\mathbb{A}^1$-invariance : on a une suite exacte scindée

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K^{MW}(E, \mathcal{V}_E) \arrow[r, "i_*"] & K^{MW}(E(t), \mathcal{V}_{E(t)}) \arrow[r, "d=\oplus \partial_x"] & \bigoplus_{x \in (\mathbb{A}^1_E)^{(1)}} K^{MW}(\kappa(x), \overset{-\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{2\,\vee}}{*}) \arrow[d] \arrow[l, dashed, bend left, "\rho"] \\ & & & 0 \end{tikzcd}$$

(D2) Transferts/Corestrictions : soit $E(x)/E$ est monogène finie

$$Tr_{x/E} = -\partial_\infty \circ \rho : K^{MW}(E(x), \Omega_{E(x)/k}) \to K^{MW}(E, \Omega_{E/k})$$

Déf : $\varphi : E \to F$ finie

$F_0 = E \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n = F$, F_i / F_{i-1} monogène

On pose $\varphi^* = \mathrm{cores}_{F/E} = \mathrm{Tr}_{F/E} := \mathrm{Tr}_{F_1/E} \circ - \circ \mathrm{Tr}_{F/F_{n-1}}$

(R1b) $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ (difficile !)

Formules de projection : (R2a, R2b, R2c) $\varphi_*(x \cdot \rho) = \varphi_*(x) \cdot \varphi_*(\rho)$

$\varphi^*(\varphi_*(x) \cdot \mu) = x \cdot \varphi^*(\mu)$

Prop: $(\mathbb{R}|\mathbb{C})$ Changement de base

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\varphi", "\text{finie}"'] \arrow[d, "\psi"', "\text{séparable}"] & F \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, dashed, "\psi_{\mathfrak{p}}"] & \\
L \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\varphi_{\mathfrak{p}}"'] & L \otimes_E F \simeq R \arrow[dr, dashed] & \\
 & & R/\mathfrak{p}
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$

$$\psi_* \circ \varphi^* = \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R} 1 \cdot \varphi_{\mathfrak{p}}^* \circ \psi_{\mathfrak{p}}^*$$

(R3b)

$\varphi : E \to F$ finie

v valuation sur E

$w|v$ ext. de v à F

$\varphi_w : k(v) \to k(w)$

Alors $\partial_v \circ \varphi^* = \sum_{w|v} \varphi_w^* \circ \partial_w$ (technique)

Complexe de Rost-Schmid

Soit X un schéma, on pose

$$C^n(X, \underline{K}^{MW}, \nu_X) = \bigoplus_{x \in X^{(n)}} \underline{K}^{MW}\left(\kappa(x), \Omega_{\kappa(x)/k} \otimes \nu_{\kappa(x)}\right)$$

diff : $\partial_y^x = \sum_{z/y} \mathrm{Tr}_{\kappa(z)/\kappa(y)} \circ \partial_y$ $\quad Z = \overline{\{x\}}$ si $y \notin Z^{(1)}$ alors $\partial_y^x = 0$

si $y \in Z^{(1)}$, on mor

Def : Groupes de Chow-Witt

L'homologie de $C^*(X, \underline{K}^{MW}, \mathcal{V}_X)$ est notée $A^*(X, \underline{K}^{MW}, \mathcal{V}_X)$ ou $\widetilde{CH}^*(X, \mathcal{V}_X)$.

Prop : ($\mathbb{A}^1$-inv.) $\widetilde{CH}^*(X, *) \xrightarrow{\simeq} \widetilde{CH}^*(\mathbb{A}^1_X, *)$

(Gersten) $\widetilde{CH}^q(X, *) = 0$ si $q > 0$ X local lisse

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \widetilde{CH}_q(Z, *) \xrightarrow{i_*} \widetilde{CH}_q(X, *) \xrightarrow{j^*} \widetilde{CH}_q(U, *) \xrightarrow{\partial} \widetilde{CH}_{q-1}(Z, *)$$

Cor : X schéma intègre proj. lisse.

Alors $K^{MW}_{n}(X)$ est un invariant birationnel.

$$\| $$

$$A^0(X, K^{MW}, -\Omega_{X/k} + n \cdot \mathbb{A}^1)$$

Déf : Un module de cycles de Milnor-Witt est la donnée $M(E, \mathcal{V}_E)$ d'un groupe abélien avec

(D1) restrictions, (D2) corestrictions, (D3) K^{MW}-action

(D4) ∂_v vérifiant (R1a, R1b, etc)

Ex : K^{MW}, Modules de cycles de Rost

Il existe un complexe de Rost-Schmid

$$C^p(X, M, \mathcal{V}_X) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} M(\kappa(x), -\Omega_{\kappa(x)/k} + \mathcal{V}_x)$$

avec

- pullback (grâce à (D1) φ_*)
- pushforward lisse
- K^{MW}-act
- ∂ morphisme de bord

Déf : Un module homotopique $M_* = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un faisceau $\mathbb{Z}$-gradué $\mathbb{A}^1$-inv. en grp abéliens sur Sm_k

(t.q. $(M_{n+1})_{-1} \simeq M_n$)

Chm $\binom{F}{1,g}$ (k parfait)

modules de cycles de Milnor-Witt $\to \mathfrak{M}_k^{MW} \simeq HM_k \overset{\text{Mod } SH_k^{\heartsuit}}{\simeq} \leftarrow$ modules homotopiques

Thm (Déglise 2002)

$$\mathcal{M}_k^M \simeq HM_k^{tr} \simeq DM_k^{\heartsuit}$$

modules de cycles de Rost

modules homotopiques avec transferts de Voevodsky

dem: $\eta = 0$

Thm :

$$HM_k \simeq HM_k^{MW} \simeq \widetilde{DM}_k^{\heartsuit}$$

HM_k^{MW} ← avec MW-transferts

dem : ① (Ananyevskiy–Neshitov '18) $HM_k^{fr} \simeq HM_k$ framed transfers

② (F'19) $HM_k \simeq \mathfrak{M}_k^{MW} \simeq HM_k^{MW}$

Merci !