Faisceaux homotopiques avec transferts (généralisés)

Histoire :

(0) Bass-Tate / Kato

(1) Transferts de Voevodsky (V., Suslin, Friedlander)

(2) Transferts de Milnor-Witt (Calmès, Fasel, Déglise, Østvær, ...)

(3) Transferts encadrés (V., Garkusha, Panin, ...)

Rappels ([Morel 2012])

Déf : Un faisceau en groupes (abéliens) M sur Sm_k est dit <u>fortement</u> (resp. strictement) <u>$\mathbb{A}^1$-invariant</u> si, pour tout $X \in Sm_k$, la flèche

$$H^i_{Nis}(X, M) \longrightarrow H^i_{Nis}(\mathbb{A}^1_k \times X, M)$$

induite par $\mathbb{A}^1_k \times X \to X$ est une bijection pour $i \in \{0,1\}$ (resp. $i \in \mathbb{N}$)

Thm (Morel) Soit $M : Sm_k \to Ab$

Alors fortement $\mathbb{A}^1$-invariant

$$\Downarrow$$

strictement $\mathbb{A}^1$-invariant

dem : cf plus tard.

Déf : Une donnée fortement non ramifiée est :

(UD1) Un foncteur continu $M : \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathrm{Grp}$

(préserve colimites filtrées d'extensions de corps t.f.)

(UD2) Pour $F \in \mathcal{F}_k$, v valuation discrète, on a un ss-grp $M(\mathcal{O}_v) \subset M(F)$

(UD3) De plus, on a une flèche de spécialisation

$$s_v : M(\mathcal{O}_v) \longrightarrow M(\kappa(v))$$

+ quelques axiomes (dont $\mathbb{A}^1$-invariance)

Def : Un faisceau fortement $\mathbb{A}^1$-inv. en groupes abéliens sur Sm_k est un faisceau homotopique.

$HI_k = \{$faisceaux homotopiques$\}$

Thm (Morel) $HI_k \simeq \{$données fortement non-ramifiée en grp abéliens$\}$

Rq : $HI_k \simeq SH^{S^1}(k)^{\heartsuit}$

Def (MW-transferts)

- Soient X, Y lisses$/k$ où Y est équidimensionnel de dim d. Un sous-schéma fermé réduit $T \subset X \times Y$ est <u>admissible</u> si $T \subset X \times Y \to X$ est surjective finie sur toute composante irréductible de T

- Catégorie des MW-correspondances finies : Objets $= Sm_k$

Flèches $= \widetilde{Cor}_k(X,Y) = \operatorname*{colim}_{T \text{ admissible}} \widetilde{CH}^d_T(X \times Y, p_Y^* \omega_{Y/k})$

- Un faisceau avec MW-transferts est un foncteur additif $\widetilde{Cor}_k \to Ab$ dont la restriction à Sm_k est Nisnevich

Def : Soit $M \in HI_k$, la contraction de M est

$$M_{-1} : X \longmapsto \ker(M(\mathbb{G}_m X) \longrightarrow M(X))$$

On a que $M_{-1} \in HI_k$ et une GW-action

Résidus $\partial_v : M(F) \longrightarrow M_{-1}(\kappa(v), \omega_v)$

pour (F, v) corps valué, où

$$M_{-1}(\kappa(v), \omega_v) = M_{-1}(\kappa(v)) \otimes_{\mathbb{Z}[\kappa(v)^\times]} \mathbb{Z}[\omega_v^\times]$$

Transferts de Bass-Tate

$\mathbb{A}^1$-invariance de $M \in HI_k$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M(E) \arrow[r, "res"] & M(E(t)) \arrow[r, "d"] & \bigoplus_{x \in (\mathbb{A}^1_E)^{(1)}} M_{-1}(\kappa(x), \omega_x) \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left, "\rho"] & 0 \end{tikzcd}$$

où $d = \sum_{x \in (\mathbb{A}^1_E)^{(1)}} \partial_x$

Pour $E(x)/E$ monogène, on pose

$$Tr_{x/E} = -\partial_\infty \circ \rho : M_{-1}(E(x), \omega_{E(x)/k}) \longrightarrow M(E, \omega_{E/k})$$

Déf : $F = E(x_1, \ldots, x_n)/E$ finie

$$E \subset E(x_1) \subset E(x_1, x_2) \subset \cdots \subset E(x_1, \ldots, x_n) = F$$

On pose :

$$tr_{x_1, \ldots, x_n/E} = tr_{x_n/E(x_1, \ldots, x_{n-1})} \circ \cdots \circ tr_{x_2/E(x_1)} \circ tr_{x_1/E}$$

Conjecture de Morel

$M \in HI_k$, $F = E(x_1, \ldots, x_n)/E$ finie

$\mathrm{tr}_{x_1,\ldots,x_n/E} : M_{-1}(F, \omega_{F/k}) \to M_{-1}(E, \omega_{E/k})$ ne dépend pas de $(x_1, \ldots, x_n)$

C'est vrai pour tout corps E si :

(Morel, 2012) $M = M'_{-1}$ où $M' \in HI_k$

(F. 2020) $M \in HI_k^{\mathrm{nw}}$ ou si c'est vrai pour les corps p-primaires

$M = M'_{\mathbb{Q}}$ où $M' \in HI_k$

$\mathcal{C}hm(F.)(M_{\mathbb{Q}})_{-1}$ possède des transferts de Bass-Tate

$(M \in HI_k)$

<u>Lem</u> : $E(x)/E$ monogène, alors

$$res_{E(x)/E} : K^M_{\mathbb{Q},*-1}(E) \longrightarrow K^M_{\mathbb{Q},*-1}(E(x))$$

est injective

dem : si $res_{E(x)/E}(\alpha) = 0$ alors $0 = tr_{x/E}(res_{E(x)/E}(\alpha))$

$= tr_{x/E}(1) \cdot \alpha$ donc $\alpha = 0$. $\square$

Thm (Morel) $M \in HI_k$, M_{-2} possède des transferts de Bass-Tate

dem ($\mathrm{car}(k) = 0$) $K \subset L$ finie (séparable)

$K_0 = L_0 \subset \cdots \subset L_r = L$ $\quad L_i / L_{i-1}$ monogène

Par récurrence sur r, wlog $r = 2$

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ E = K[x] \arrow[dr] & & F = K[y] \arrow[dl] \\ & L = K[x,y] & \end{tikzcd}$$

On veut montrer que

$$Tr_{y/K} \circ Tr_{x/F} = Tr_{x/K} \circ Tr_{y/E}$$

Soit $(\infty, \infty) \in (\mathbb{P}^1)^2_K$ le point K-rationnel donné par le point ∞.

On lui associé $(-\frac{1}{x}, -\frac{1}{y})$ une paire de fonctions qui forme une système de paramètres local.

On a l'isomorphisme

$$\gamma_{x,y} : M_{-2}(K) \xrightarrow[\simeq]{\Phi_{-1/x, -1/y}} H^2_{(\infty,\infty)}((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \xrightarrow{\simeq} H^2((\mathbb{P}^1)^2_K, M)$$

<u>Rq</u> : $\gamma_{y,x} = \gamma_{x,y} \circ \langle -1 \rangle$.

On note $z = (x, y)$ le point fermé de $\mathbb{A}^2_K \subset (\mathbb{P}^1)^2_K$ correspondant à L avec générateurs (x, y).

Lem 1 On note $P \in K[X]$ le polynôme mini de x y

$\omega(P) = \omega_0(x) P(X)$ Q

$P'_0(x^{p^m})$

La composée

$$\begin{tikzcd}
M_{-2}(L) \arrow[r, "\Phi_{\omega(P),\omega(Q)}", "\sim"'] & H^2_y((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \arrow[r] & H^2((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \arrow[d, "\gamma_{x,y}^{-1}"] \\
& & M_{-2}(K)
\end{tikzcd}$$

est égale à la composée

$$M_{-2}(L) \xrightarrow{Tr_{y/E}} M_{-2}(E) \xrightarrow{Tr_{x/E}} M_{-2}(K)$$

On note

$\mathbb{P}^1_E = \{x\} \times \mathbb{P}^1 \subset (\mathbb{P}^1)^2_K$ ss-schéma fermé défini par le produit$/_K$ de l'imm. $x : \mathrm{Spec}(E) \subset \mathbb{P}^1_K$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1_K}$

$\mathbb{P}^1_\infty = \mathbb{P}^1 \times \{\infty\} \subset (\mathbb{P}^1)^2_K$ ss-schéma fermé donné par $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1_K}$ et l'imm. $\infty : \mathrm{Spec}(K) \to \mathbb{P}^1_K$

$(x, \infty) \in \mathbb{P}^1_E$ point E-rationnel donné par $x : \mathrm{Spec}(E) \to \mathbb{P}^1_K$ et $\infty : \mathrm{Spec}(K) \to \mathbb{P}^1_K$

On remarque la factorisation

$$H^2_z((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \longrightarrow H^2_{\mathbb{P}^1_E}((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \longrightarrow H^2((\mathbb{P}^1)^2_K, M)$$

$$
\begin{tikzcd}
H^2_z((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "②"] & H^2_{\mathbb{P}^1_E}((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \arrow[dr, phantom, "②"] & \\
H^1_z(\mathbb{P}^1_E, M_{-1}) \arrow[u, "\overline{\Phi}_{\omega_P}", "\sim"'] \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "①"] & H^1(\mathbb{P}^1_E, M_{-1}) \arrow[u, "\overline{\Phi}_{\omega_P}", "\sim"'] \arrow[dr, phantom, "③"] & H^2_{(x,\infty)}((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \arrow[ul] \\
M_{-2}(L) \arrow[u, "\Theta_{\omega_{QE}}", "\sim"'] \arrow[r, "\mathrm{Tr}_{y/E}"] & M_{-2}(E) \arrow[u, "\gamma", "\sim"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\gamma}{\simeq}"] & H^1_{(x,\infty)}(\mathbb{P}^1_E, M_{-1}) \arrow[u, "\overline{\Phi}_{\omega_P}", "\sim"'] \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

① Déf de $\mathrm{Tr}_{y/E}$

② Par déf de $\overline{\Phi}$?

③ Lemme 4.25 ($SL_2(K)$) l'action de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est $\mathbb{A}^1$-éq à Id (produit mat. élem)

$$
\begin{tikzcd}
H^2_{\mathbb{P}^1_E}((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \arrow[rr] & & H^2((\mathbb{P}^1)^2_K, M) & \\
& H^2_{(x,\infty)}((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \arrow[ul] \arrow[rr] \arrow[ur, phantom, "\text{trivial}"] & & H^2_{\mathbb{P}^1_\infty}((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \arrow[ul] \\
H^1_{(x,\infty)}(\mathbb{P}^1_E, M_{-1}) \arrow[ur, "\Phi_{wp}"] & H^1_{(x,\infty)}(\mathbb{P}^1_\infty, M_{-1}) \arrow[u, "\sim", "\Phi_{-1/\gamma}"'] \arrow[rr] \arrow[urr, phantom, "\text{def de } \Phi"] & & H^1(\mathbb{P}^1_\infty, M_{-1}) \arrow[u, "\sim", "\Phi_{-1/\gamma}"'] \\
M_{-2}(E) \arrow[u, "\sim", "\gamma"'] \arrow[r, "\langle -1 \rangle", "\simeq"'] \arrow[ur, phantom, "\text{Thm 4.19}"] & M_{-2}(E) \arrow[u, "\sim", "\Theta_{wp}"'] \arrow[rr, "\mathrm{Tr}_{E/K}"] \arrow[urr, phantom, "\text{def}^\circ \text{ de Tr}"] & & M_{-2}(K) \arrow[u, "\sim", "\gamma"']
\end{tikzcd}
$$

Preuve du lem:

$$\begin{tikzcd}
 & M_{-2}(L) \arrow[rr, "\Phi\omega\omega_E", "\sim"'] \arrow[d, "Tr_{y/E}"'] & & H^1_{(x,y)}(x\times\mathbb{P}^1, M_{-1}) \arrow[rr, "\Phi\omega_p"] \arrow[d] & & H^2_{(x,y)}((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \arrow[dd] \\
 & M_{-2}(E) \arrow[rr, dash, "\gamma", "\sim"'] \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "\gamma", "\wr"'] & & H^1(x\times\mathbb{P}^1, M_{-1}) \arrow[dl, dash] & & \\
M_{-2}(E) \arrow[rr, dash, "\gamma", "\sim"'] \arrow[d, "\langle -1\rangle"', "\wr"] & & H^1_{(x,\infty)}(x\times\mathbb{P}^1, M_{-1}) \arrow[rr, "\Phi\omega_p"] & & H^2_{(x,\infty)}((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \arrow[r] \arrow[dd] & H^2_{x\times\mathbb{P}^1}((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \arrow[d] \\
M_{-2}(E) \arrow[rr, dash, "\Theta\omega_p"] \arrow[d, "Tr_{x/K}"'] & & H^1_{(x,\infty)}(\mathbb{P}^1\times\infty, M_{-1}) \arrow[urr, "\Phi^{-1}\gamma"'] \arrow[d] & & & H^2((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \\
M_{-2}(K) \arrow[rr, "\gamma", "\sim"'] & & H^1(\mathbb{P}^1\times\infty, M_{-1}) \arrow[rr, "\Phi^{-1}\gamma", "\sim"'] & & H^2_{\mathbb{P}^1\times\infty}((\mathbb{P}^1)^2_K, M) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Lemme 2. $K \subset L$ ext. finie <u>séparable</u>, $x \in L$ générateur, $u \in K^\times$.

Alors

$$\mathrm{Tr}_{(ux)/K} \circ \langle u \rangle = \langle u \rangle \circ \mathrm{Tr}_{x/K}$$

$$\begin{tikzcd}
M_{-1}(L) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_{x/K}"] \arrow[d, "\langle u \rangle", "\sim"'] & M_{-1}(K) \arrow[d, "\langle u \rangle", "\sim"'] \\
M_{-1}(L) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_{(ux)/K}"] & M_{-1}(K)
\end{tikzcd}$$

fin de la dem (cas séparable) :

Comme $\gamma_{X,Y} = \gamma_{Y,X} \circ \langle -1 \rangle$ et $\overline{\Phi}_{\omega(Q),\omega(P)} = \overline{\Phi}_{\omega(P),\omega(Q)} \circ \langle -1 \rangle$

([Mor12, Cor. 4.23])

+ lemme précédent

on a :

$$\mathrm{Tr}_{-x/K} \circ \mathrm{Tr}_{y/E} = \langle -1 \rangle \circ \mathrm{Tr}_{-y/K} \circ \mathrm{Tr}_{x/F} \circ \langle -1 \rangle$$

$$= \left(\mathrm{Tr}_{y/K} \circ \langle -1 \rangle\right) \circ \left(\langle -1 \rangle \circ \mathrm{Tr}_{-x/F}\right) \quad \text{(lemme 2 avec } u = -1\text{)}$$

$$= \mathrm{Tr}_{y/K} \circ \mathrm{Tr}_{-x/F} \quad \text{car } \langle -1 \rangle^2 = 1$$

$\square$

dem. dans le cas général : 6 pages de lemmes +

On regarde les clôtures séparables

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] & E\cdot F_{sep} \arrow[r] & L \\
E_{sep} \arrow[u] \arrow[r] & E_{sep}\cdot F_{sep} \arrow[u] \arrow[r] & E_{sep}\cdot F \arrow[u] \\
K \arrow[u] \arrow[r] & F_{sep} \arrow[u] \arrow[r] & F \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$\square$

Thm (F. 2020) Soit $M \in HI_k$. LASSE :

1. (Conjecture de Morel) $\Rightarrow$ ($\exists M' \in HI_k$, $M \simeq M'_{-1}$)
2. $\exists M'' \in HI_k$, $M \simeq M''_{-2}$
3. $M \in HI_k^{gtr}$
4. $M \in HI_k^{MW}$
5. $M \in HI_k^{fr}$ (Bachmann, A.-N.)