Morel, Chapitre 6
(+ Rappels)

I] Rappels d'$\mathbb{A}^1$-homotopie.

(A) La catégorie homotopique.

k un corps.

$\mathcal{H}(k)$: la catégorie $\mathbb{A}^1$-homotopique.

$1^{ère}$ Présentation :

$1^{ère}$ étape : structure de modèle sur $\mathrm{Fun}(Sm_k^{op}, \underbrace{sSet}_{\mathrm{Fun}(\Delta^{op}, Set)})$.

- Fibration et équivalences faibles : objets par objets : $F \to G$ est une fibration (resp. eq. faible) ssi $\forall U \in Sm_k$, $F(U) \to G(U)$ en est une.
- cofibration : sont déjà déterminées.

$2^{ème}$ étape : Localisation Nisnevich :

c'est une Localisation de Bousfield i.e

- Les cofibrations ne changent pas.
- equivalences faibles et fibration.

Nouveaux objets fibrants :

F tq $\forall$ carré Nisnevich Distingué

$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & V \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

p étale, $p^{-1}(X\setminus U)_{red} \cong X \setminus U_{red}$

proj. fibrant +

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "h\lrcorner"] & F(V) \arrow[d] \\ F(U) \arrow[r] & F(U \times_X V) \end{tikzcd}$$,

$\rightsquigarrow$ conséquence : on a "l'excision Nisnevich"

(□)
$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & V \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

nis. distingué,

alors (□) est homotopiquement cocartésien

et $V/U\times_X V \to X/U$ est une equiv. faible :

$$\begin{tikzcd} U_+ \arrow[r] \arrow[d] & X_+ \arrow[d] \\ * \arrow[r] & X/U \end{tikzcd}$$

Preuve :

$$\mathrm{Map}\left(\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd}, \underset{\text{Fibrant}}{F}\right) \overset{\text{Yoneda}}{=} \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "h\lrcorner"] & F(V) \arrow[d] \\ F(U) \arrow[r] & F(U \times_X V) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(U \times_X V)_+ \arrow[r] \arrow[d] & V_+ \arrow[d, hook] \\
U_+ \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner h"] & X_+ \arrow[d] \\
* \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner h"] & X/U
\end{tikzcd}
\Rightarrow
\begin{tikzcd}
U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, hook] \\
* \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner h"] & X/U
\end{tikzcd}$$

- Les représentables sont cofibrants.

$$\bullet \quad \begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & F \arrow[d, two heads, "\wr"] \\
U \arrow[r, "x"'] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[d, two heads] \\
G(U) \arrow[u, dashed, bend left, "\exists ?"]
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ho}\,\mathrm{Sh}_{Nis}(Sm_k)$: catégorie homotopique de cette structure.

$3^{\text{ème}}$ étape : $\mathbb{A}^1$-localisation :

On refait une localisation de Bousfield : par rapport à $U \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow U$:

nouveaux objets fibrants : F $\mathbb{A}^1$-fibrant si

- F est Nisnevich fibrant
- $\forall U \in Sm_k$, $F(U) \longrightarrow F(U \times \mathbb{A}^1)$ est une équivalence faible : (on dit que F est $\mathbb{A}^1$-local)

$L_{\mathbb{A}^1}$: foncteur de localisation

$$\mathrm{Ho}\,\mathrm{Sh}_{Nis}(Sm_k) \longrightarrow \mathcal{H}(k)$$

(B) Faisceaux d'homotopie : $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(k)$,

$\underline{\pi}_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$: faisceau Nisnevich associé

à $U \mapsto [U, \mathcal{X}]$.

$x : * \longrightarrow \mathcal{X}$ un point base, $n > 0$

$U \mapsto [\underset{\sim}{S}^n \wedge (U_+), \mathcal{X}]_\bullet$

$\underline{\pi}_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ est le faisceau Nisnevich associé.

Fait : $\underline{\pi}_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ est le faisceau Nis associé

à $U \mapsto \pi_n(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})(U), x)$

Preuve : WLOG : $\mathcal{X}$ $\mathbb{A}^1$-fibrant

$$\begin{aligned}
[S^n \wedge U_+, \mathcal{X}]_\bullet &\simeq [U_+, \Omega^n(\mathcal{X})]_\bullet \\
&\simeq [U, \underset{\smile}{\Omega^n(\mathcal{X})}] \\
&\simeq \pi_0 \operatorname{Map}(U, \Omega^n(\mathcal{X})) \\
&\simeq \pi_0((\Omega^n(\mathcal{X}))(U)) \\
&\simeq \pi_0(\Omega^n(\mathcal{X}(U))) \\
&\simeq \pi_n(\mathcal{X}(U), \bullet) \quad \square
\end{aligned}$$

- $\mathcal{X}$ est $\mathbb{A}^1$-connexe si $\underline{\pi}_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = *$.

II] $\mathbb{A}^1$-invariance des faisceaux d'homotopie

(Thm : Soit $\mathcal{B}$ un espace pointé ← $\mathrm{Ho}\, \mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{Sm}_k)$:

$\underline{\pi}_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B})$ est fortement $\mathbb{A}^1$-invariant i.e $H^i_{Nis}(X\times \mathbb{A}^1, \underline{\pi}_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B})) \to H^i_{Nis}(X, \underline{\pi}_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B}))$

k parfait est un iso $\forall X, \forall i \in \{0,1\}$.

Cor : $\underline{\pi}_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B})$ est strictement $\mathbb{A}^1$-invariant $n \geq 2$.

WLOG, $\mathcal{B}$ $\mathbb{A}^1$-fibrant.
$\Omega^{n-1}\mathcal{B}$ est $\mathbb{A}^1$-fibrant,
donc $\underline{\pi}_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B})$ fortement $\mathbb{A}^1$-inv, donc

strictement $\mathbb{A}^1$-invariant :

Cor : $\mathcal{B}$ pointé, $\underline{\pi}_0(\mathcal{B}) = *$, TFAE $\quad Ho\,Sh_{Nis}(Sm_k)$

1) $\mathcal{B}$ est $\mathbb{A}^1$-local $\qquad U \mapsto \pi_i(\mathcal{B}_{Nis}\mathcal{B}(U,\cdot))$

2) $\underline{\pi}_1(\mathcal{B})$ est fortement $\mathbb{A}^1$-inv
$\underline{\pi}_n(\mathcal{B})$ est strictement $\mathbb{A}^1$-inv.

Sketch de Preuve :

$$\mathcal{B} = \operatorname{holim}_n P^{(n)}\mathcal{B}$$

$$\mathcal{B} \dashrightarrow P^{(n)}\mathcal{B} \to P^{(n-1)}\mathcal{B} \dashrightarrow P^{(0)}\mathcal{B}$$
$$P^{(0)}\mathcal{B} = *$$

$$\begin{array}{ccc} P^{(n)}\mathcal{B} & \xrightarrow{h} & B\underline{\pi}_1(\mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^{(n-1)}\mathcal{B} & \longrightarrow & B\underline{\pi}_1(\mathcal{B}) \times K(\underline{\pi}_n(\mathcal{B}), n+1) \end{array}$$

$$\left(L_{\mathbb{A}^1} : Ho\,Sh_{Nis}(Sm_k) \rightleftarrows \mathcal{H}(k) : i \right)$$

Maintenant : mode preuve du thm :
WLOG : $\mathcal{B}$ est $\mathbb{A}^1$-fibrant

Lemme : OPSQ $\mathcal{B}$ est $\mathbb{A}^1$-connexe :

Preuve : $\mathcal{B}^{(0)}$: composante connexe de $\mathcal{B}$ en le point base :

$$\mathcal{B}^{(0)} = a_{Nis}\big(U \mapsto \mathcal{B}(U)^{(0)}\big)$$

sous-ens simplicial de $\mathcal{B}(U)$ dont les simplexes ont tous pour sommet le pt base

$$\underbrace{\mathcal{B}^{(0)}} \hookrightarrow \mathcal{B}.$$

Fait : $L_{\mathbb{A}^1}\mathcal{B}^{(0)}$ est $\mathbb{A}^1$-connexe.

$$\mathcal{B}^{(0)} \underset{j}{\hookrightarrow} \underset{\mathbb{A}^1\text{-local}}{\mathcal{B}} \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{L_{\mathbb{A}^1}\mathcal{B}^{(0)}}_{\mathbb{A}^1\text{-connexe}} \to \mathcal{B}$$

$$L_{\mathbb{A}^1}\mathcal{B}^{(0)} \xrightarrow{r} \underbrace{\mathcal{B}^{(0)}} \to \mathcal{B}.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}^{(0)} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, hook] & L_{\mathbb{A}^1}\mathcal{B}^{(0)} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "L_{\mathbb{A}^1} j"] & \mathcal{B}^{(0)} \arrow[d, hook] \\
\mathcal{B} \arrow[r, "\eta"'] & i L_{\mathbb{A}^1}\mathcal{B} \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

$$\underline{\pi}_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B}^{(0)}) \to \underline{\pi}_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B})$$

$$U \mapsto \pi_1(\mathcal{B}^{(0)}(U), \cdot) \to \pi_1(\mathcal{B}^{\cancel{(0)}}(U), \cdot)$$

$$\boxed{R\,\underline{Map}_{*}(\Delta^1, \mathcal{B}) \simeq \mathcal{B}^{(0)}\ ?}$$