I | Espaces de $\mathbb{G}_m$-lacets

Théorème : Soit $\mathcal{B}$ pointé, $\mathbb{A}^1$-connexe.

$\overline{}\ - \wedge \mathbb{G}_m$

1) $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_\bullet(\mathbb{G}_m, \mathcal{B})$ est $\mathbb{A}^1$-connexe $\longleftarrow$ $a_{Nis}\left(U \mapsto [U_+, \mathcal{F}]_{\mathbb{A}^1,\bullet}\right) = *$

2) $\forall n > 0$:

$$\pi_n^{\mathbb{A}^1}\left(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_\bullet(\mathbb{G}_m, \mathcal{B})\right) \xrightarrow{\simeq} \pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B})_{-1}$$

$\mathcal{F}_{-1} : \mathrm{Ker}\left(\mathcal{F}(\mathbb{G}_m \times -) \to \mathcal{F}(-)\right)$

Preuve (idée) : $\Omega_{\mathbb{G}_m}(\mathcal{B}) := \mathbb{R}\mathrm{Hom}_\bullet(\mathbb{G}_m, \mathcal{B})$

1) Suffit de montrer que pour $F \in \mathcal{F}_k$,

$$[\mathrm{Spec}(F)_+, \Omega_{\mathbb{G}_m}(\mathcal{B})]_\bullet \simeq *$$

Par changement de base le long de $\mathrm{Spec}(F)_+ \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$, on peut supposer

Théorie de l'obstruction ($\dim(\mathbb{G}_m) = 1$)

$$[\mathrm{Spec}(k)_+, \Omega_{\mathbb{G}_m}(\mathcal{B})]_\bullet \cong [\tilde{\mathbb{G}}_m, \mathcal{B}]_\bullet$$
$$\cong H^1(\mathbb{G}_m, \pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B}))$$
$$\simeq *$$

2) Même genre d'idées.

II | Catégorie $\mathbb{A}^1$-dérivée

$* \to * \to * \to \circ \to$
$\uparrow \circ$

Idée :

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{op}(P)Sh(Sm_k) \arrow[r, shift left, "\mathbb{Z}[-]"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[d, "loc."] & \boxed{\Delta^{op}(P)Sh(Sm_k, Ab)} \arrow[l, shift left, "oubli"] \arrow[r, shift left, "N"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \widetilde{Ch}((P)Sh(Sm_k, Ab)) \arrow[l, shift left, "K"] \arrow[d, "localisation"] \\
\mathcal{H}_{\substack{simpl \\ (Nis)}}(k) \arrow[d, "loc."] \arrow[rr, shift left, "N"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{D}((P)Sh(Sm_k, Ab)) \arrow[ll, shift left, "K"] \arrow[d] \\
\mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k) & & ? \quad \mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}(k) \arrow[ll, "K^{\mathbb{A}^1}"']
\end{tikzcd}$$

- **Def** : Un complexe $C_* \in \overbrace{\mathcal{D}(Sh_{Nis}(Sm_k, Ab))}^{\mathcal{D}(Sm_k)}$ est $\mathbb{A}^1$-local si, pour tout $D_* \in \mathcal{D}(Sm_k)$ la projection canonique $D_* \otimes \mathbb{Z}(\mathbb{A}^1) \to D_*$ induit
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(Sm_k)}(D_*, C_*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(Sm_k)}(D_* \otimes \mathbb{Z}(\mathbb{A}^1), C_*)$$
- Un morphisme $f : C_* \to D_*$ est un $\mathbb{A}^1$-quasi-isomorphisme dans $\mathcal{D}(Sm_k)$ si pour tout E_* $\mathbb{A}^1$-local,
$$f^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(Sm_k)}(D_*, E_*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(Sm_k)}(C_*, E_*)$$
- $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}(k) := \mathcal{D}(Sm_k)[\mathbb{A}^1\text{-q.iso}^{-1}]$

Rq : $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}(k)$ est la loc. de Bousfield de $\mathcal{D}(Sm_k)$ par rapport aux
$$D_* \otimes \mathbb{Z}(\mathbb{A}^1) \to D_* .$$

: $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1} \simeq$ sous-cat pleine de $\mathcal{D}(Sm_k)$ des complexes $\mathbb{A}^1$-locaux, $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1} \hookrightarrow \mathcal{D}(Sm_k)$ est adjoint à droite au foncteur de localisation et l'adjonction est de Quillen.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & \Sigma A \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

$L^{ab}_{\mathbb{A}^1} : C_*(Sm_k) \to C_*(Sm_k)$ "le" foncteur de remplacement $\mathbb{A}^1$-fibrant (modèle de $\mathcal{D}(Sm_k) \to \mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}(k) \hookrightarrow \mathcal{D}(Sm_k)$).

Rq : $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}(k)$ est stable (dans $\mathcal{D}(Sm_k)$) par suspension, désuspensions, fibres et cofibres.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & A \arrow[d] \\ * \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Modèle explicite de $L^{ab}_{\mathbb{A}^1}$:

On fixe $C_* \mapsto C_*^f$ un foncteur de résolution fibrante (pour $\mathcal{D}(Sm_k)$).

$$L^{(1)}_{\mathbb{A}^1}(C_*) := \mathrm{cone}\left(ev_1 : \underline{Hom}(\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1), C_*^f) \to C_*^f\right)$$

$$L^{(n)}_{\mathbb{A}^1}(C_*) := L^{(1)}_{\mathbb{A}^1}\left(L^{(n-1)}_{\mathbb{A}^1}(C_*)\right), \quad L^{(\infty)}_{\mathbb{A}^1} := \operatorname{colim}_n L^{(n)}_{\mathbb{A}^1}$$

Prop : $L^{(\infty)}_{\mathbb{A}^1} \simeq L^{ab}_{\mathbb{A}^1}$, i.e. $C_* \to L^{(\infty)}_{\mathbb{A}^1}(C_*)$ est un $\mathbb{A}^1$-q.iso et $L^{(\infty)}_{\mathbb{A}^1}(C_*)$ est $\mathbb{A}^1$-fibrant (ie fibrant et $\mathbb{A}^1$-local).

[C-D 5.2.C]

Théorème (Morel) : Soit C_* un complexe $\in \mathcal{D}(Sm_k)$ (-1)-connexe, alors $L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*)$ est (-1)-connexe.

$(* \to X \to * \to 0 \to 0$

Cor : Un complexe $C_* \in \mathcal{D}(Sm_k)$ est $\mathbb{A}^1$-local ssi $\forall n$, $H_n(C_*)$ est strictement $\mathbb{A}^1$-invariant.

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Soit C $\mathbb{A}^1$-local. On a une suite (co)fibre canonique :

$$\begin{tikzcd} C_{\leq 0} \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & C_{\geq 1} \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}, \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} C_{\leq 0} \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d, "\wr"] \arrow[dd, bend left=60, "id"] \\ L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_{\leq 0}) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists"] & L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C) \arrow[d] \\ C_{\leq 0} \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

donc $C_{\leq 0}$ est un retract de $L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_{\leq 0})$, donc est

$\mathbb{A}^1$-local, donc $L^{al}_{\mathbb{A}^1}(C_{\leq 0}) \simeq C_{\leq 0}$, et $C_{\geq 1}$ est

donc $\mathbb{A}^1$-local ($\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ stable par cofibre). $L^{al}_{\mathbb{A}^1}(C_{\geq 1})$

De là $H_n(C_*)[n] \simeq ((C_*)_{\leq n})_{\geq n}$ est $\mathbb{A}^1$-local.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\mathcal{D}(Sm_k)$ est engendré par les représentables

Suffit de montrer que

$$\underset{\mathcal{D}(Sm_k)}{\mathrm{Hom}} : [\mathbb{Z}(X)[n], C_*] \xrightarrow{\sim} [\mathbb{Z}(X)\otimes\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1)[n], C_*]$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ \mathbb{H}_n(X, C_*) & \longrightarrow & \mathbb{H}_n(X\times\mathbb{A}^1, C_*) \end{array}$$

est un iso.

$$E^2_{p,q} : H_p(X, H_q(C_*)) \Longrightarrow \underbrace{\mathbb{H}_{p+q}(X; C_*)}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ H_p(X\times\mathbb{A}^1, H_q(C_*)) & \Longrightarrow & \mathbb{H}_\cdot(X\times\mathbb{A}^1, C_*) \end{array}$$

$\square$

Cor $\left(\overbrace{\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}\cap\mathcal{D}(Sm_k)_{\geq 0}}^{\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1,\geq 0}}, \overbrace{\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}\cap\mathcal{D}(Sm_k)_{\leq 0}}^{\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1,\leq 0}}\right)$ définit une t-structure sur $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$, l'inclusion $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1} \hookrightarrow \mathcal{D}(Sm_k)$ est t-exacte.

Preuve : 3 choses à vérifier

(a) $\forall X \in \mathcal{D}_{\mathbb{A}^1,\geq 0}$, $\underline{Y \in \mathcal{D}_{\mathbb{A}^1,\leq 0}}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}}(X, Y[-1]) = 0$ ✓

(b) $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1,\geq 0}[n] \subseteq \mathcal{D}_{\mathbb{A}^1,\geq 0}$ ✓ (par cor. précédent)

(c) $\forall C \in \mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$, $\exists$ $\underbrace{C_{\geq 0}}_{\in\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1,\geq 0}} \to C \to \underbrace{C_{\leq -1}}_{\in\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1,\leq -1}}$, suite cofibre ✓

$\square$

Rq : · cette t-structure est non dégénérée $\heartsuit = \mathcal{D}_{\geq 0}\cap\mathcal{D}_{\leq 0}$

· le cœur est formé des faisceaux strict. $\mathbb{A}^1$-inv.

III) Espaces d'Eilenberg-Maclane.

Prop : $C_* \in \mathcal{D}(Sm\, k)$, 0-connexe

$\underline{C_*\ \mathbb{A}^1\text{-local}} \iff \underline{K(C_*)\ \mathbb{A}^1\text{-local}}$.

$\Leftarrow$ $\Rightarrow$

$\mathbb{A}^1$-résolution alternatives

Construction : $C_* \in Ch(Sm_k)$.

$U^{(1)}(C_*) := \mathrm{cone}\left(ev_1 : \underline{Hom}(\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1), C_*^f)_{\geq 0} \to (C_*^f)\right)$

$U^{(n)}(C_*) := U^{(1)}\left(U^{(n-1)}(C_*)\right)$

$U^{(\infty)}(C_*) := \operatorname{colim}_n U^{(n)}(C_*)$.

Prop :

① $K(C_*) \to K(U^{(\infty)}(C_*))$ est une $\mathbb{A}^1$-eq. faible ✓

② Si C_* est 0-connexe : $K(U^{(\infty)}(C_*))$ est $\mathbb{A}^1$-local. et 0-connexe.

Preuve : ① Suffit de montrer que $K(C_*^f) \to K(U^{(1)}(C_*))$ est une $\mathbb{A}^1$-eq.

Par def, on a une suite fibre (dans $\mathcal{D}(Sm_k)$)

$$(*) \quad \underbrace{\underline{Hom}(\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1), C_*^f)_{\geq 0}}_{B_\bullet} \xrightarrow{ev_1} C_*^f \to U(C_*)$$

$$\begin{tikzcd} B_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & C_*^f \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & U(C_\bullet) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} B_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \Sigma B \end{tikzcd} \qquad (B = B[1][-1])$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} B_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & C_\bullet^f \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & U(C_\bullet) \arrow[r] & \Sigma B \end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} K(C_\bullet^f) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{A}^1"'] & * \arrow[d, "\mathbb{A}^1"] \\ K(U(C_\bullet)) \arrow[r] & K(\Sigma B) \end{tikzcd} \quad \leftarrow \text{dans } \mathcal{H}_{Nis}(k)$$

② • Écrits : $U^{(n)}(C_\cdot)$ est 0-connexe si l'est $C_\cdot$. l'est

$K(U^{(\infty)}(C_\cdot)) \rightsquigarrow 0$-connexe.

• suffit de montrer que $\forall X \in Sm_k, \forall n$,

tout $\mathbb{A}^1 \wedge S^n \wedge X_+ \to K(U^{(\infty)}(C_\cdot))$ est triviale :

en effet :

$$[\mathbb{A}^1 \wedge S^n \wedge X_+, K(U^{(\infty)}(C_\cdot))]_\bullet \simeq \pi_n\Big(\overset{\text{simplicial}}{\underline{\mathrm{Hom}}_\bullet}(\mathbb{A}^1, K(U^{(\infty)}(C_\cdot)))(X)\Big)$$

et $\mathcal{B}$ $\mathbb{A}^1$-local $+ 0$-connexe $\Leftrightarrow$ $\underline{\mathrm{Hom}}_\bullet(\mathbb{A}^1, \mathcal{B}) \simeq *$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{Nis}}(X, \mathcal{B}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{Nis}}(X, \mathcal{B}) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{Nis}}(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{B}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{Nis}}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{A}^1, \mathcal{B}))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}_\bullet(\mathbb{A}^1, \mathcal{B}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{A}^1, \mathcal{B}) \arrow[d, "\wr"] \\
\bullet \arrow[r] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Donc : Suffit de montrer que tout

$\phi : \mathbb{A}^1 \wedge X_+ \wedge S^n \longrightarrow K(U^{(\infty)}(C_\cdot))$ est trivial.

• $\mathbb{A}^1 \wedge X_+ \wedge S^n$ est compact $\rightsquigarrow$ ϕ se factorise $\mathrm{Hom}(X, -)$

à travers $K(U^{(m)}(C_\cdot))$

$\tilde{\phi} : \mathbb{A}^1 \wedge X_+ \wedge S^n \to K(U^{(m)}(C_\cdot))$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1) \otimes \mathbb{Z}(X_+) \otimes \mathbb{Z}(S^n) \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "\exists"'] & U^{(m)}(C_\cdot) \\
& \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1), U^{(m)}(C_\cdot))}_{\simeq 0} \arrow[u, "ev_1"']
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{Z}(x_+)\otimes\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1)\otimes\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1)\otimes\mathbb{Z}(S^n) \dashrightarrow U^{(m)} \quad (c.)$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1)\otimes\mathbb{Z}(S^n)\otimes\mathbb{Z}(x_+) \xrightarrow{\phi} U^{(m)}$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1)\otimes\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1) \to \mathbb{Z}(\mathbb{A}^1)$$

$$N_\cdot(\mathbb{A}^1\wedge\mathbb{A}^1) \to N_\cdot(\mathbb{A}^1).$$

$\boxtimes$

Si $C_\cdot$ est 0-connexe

Cor : ① $U^{(\infty)}(C_*) \simeq L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*)$ et

② $\underbrace{L_{\mathbb{A}^1}}_{\mathcal{H}_{Nis}(k)}(K(C_*)) \simeq \underbrace{K(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*))}_{\text{"}K^{\mathbb{A}^1}(C_*)\text{"}}$.

Preuve : ① Appliquer N_* :

$$N_*K(C_*) \to N_*K(U^{(\infty)}(C_*))$$
$$C_* \simeq N_*K(C_*) \longrightarrow U^{(\infty)}(C_*) \approx L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*)$$

② $K(C_*) \xrightarrow{\sim_{\mathbb{A}^1}} K(U^{(\infty)}(C_*)) = K(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*))$

$K(C_*) \xrightarrow{\mathbb{A}^1 S} L_{\mathbb{A}^1}(K(C_*)) \overset{\exists!}{\underset{\sim}{\dashrightarrow}} K(U^{(\infty)}(C_*))$

$\boxtimes$