

1 | Espaces de G_m -locus

Théorème: Soit \mathcal{B} pointé,

\mathbb{A}^1 -connexe.

1) $\mathbb{R} \text{Hom}_\bullet(G_m, \mathcal{B})$ est \mathbb{A}^1 -connexe \leftarrow $\alpha_{\text{Nis}}(U \mapsto [U_+, \mathcal{F}]) = *$

2) $\forall n > 0$:

$$\pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{R} \text{Hom}_\bullet(G_m, \mathcal{B})) \xrightarrow{\sim} \pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B})_{-1}$$

$$\mathcal{F}_{-1} : \text{Ker}(\mathcal{F}(G_m \times -) \rightarrow \mathcal{F}(-))$$

Preuve (idée): $\underline{\Omega}_{G_m}(\mathcal{B}) := \mathbb{R} \text{Hom}_\bullet(G_m, \mathcal{B})$

1) Suffit de montrer que pour $F \in \mathcal{F}_k$,

$$[\text{Spec}(F)_+, \underline{\Omega}_{G_m}(\mathcal{B})] \cong *$$

Par changement de base le long de $\text{Spec}(F)_+ \rightarrow \text{Spec}(k)$, on peut supposer



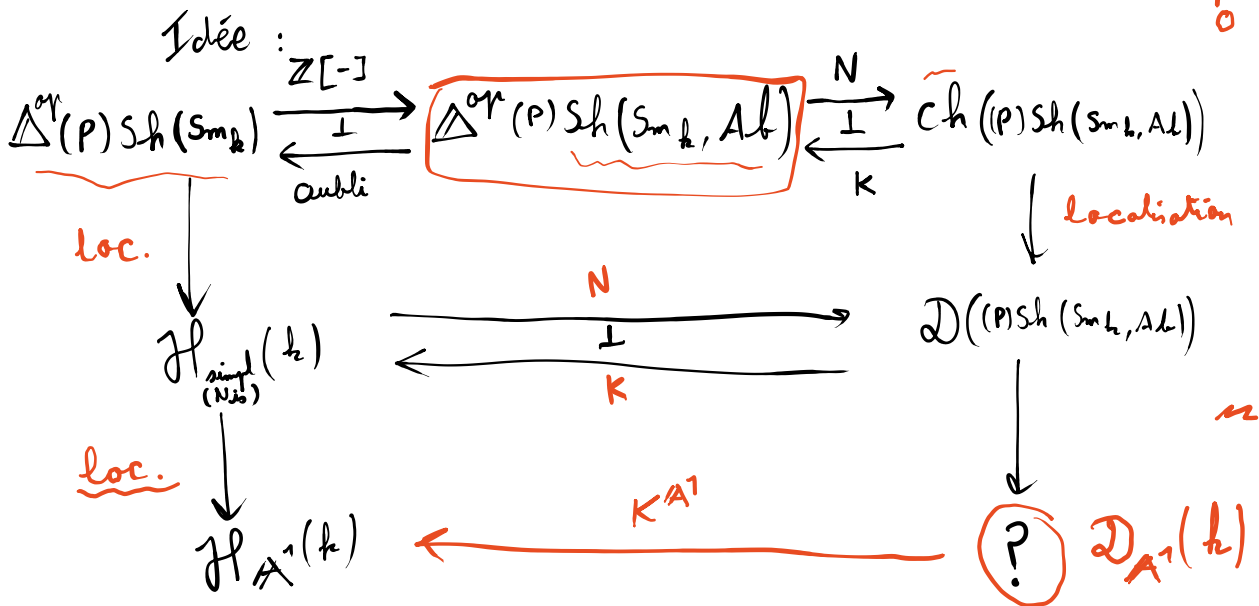
Théorie de l'obstruction ($\dim(G_m) = 1$)

$$\begin{aligned} [\text{Spec}(k)_+, \underline{\Omega}_{G_m}(\mathcal{B})] &\cong [\tilde{G}_m, \mathcal{B}] \\ &\cong \underline{H^1(G_m, \pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B}))} \\ &\cong * \end{aligned}$$

2) Même genre d'idées.

II | Catégorie A^1 -dérivée

$$* \rightarrow * \rightarrow * \rightarrow 0 \rightarrow 0$$



- Def: Un complexe $C_* \in \mathcal{D}(Sh_{\text{Nis}}(Sm_k, Ab))$ est A^1 -local si, pour tout $D_* \in \mathcal{D}(Sm_k)$ la projection canonique $D_* \otimes Z(A^1) \rightarrow D_*$ induit
- $$\text{Hom}_{\mathcal{D}(Sm_k)}(D_*, C_*) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}(Sm_k)}(D_* \otimes Z(A^1), C_*)$$
- dans $\mathcal{D}(Sm_k)$
- Un morphisme $f: C_* \rightarrow D_*$ est un A^1 -quasi-isomorphisme si pour tout E_* A^1 -local,

$$f^*: \text{Hom}_{\mathcal{D}(Sm_k)}(D_*, E_*) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}(Sm_k)}(C_*, E_*)$$
 - $\mathcal{D}_{A^1}(k) := \mathcal{D}(Sm_k)[A^1\text{-q.iso}^{-1}]$

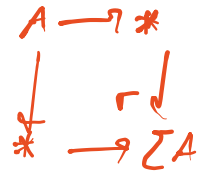
Rq: $\mathcal{D}_{A^1}(k)$ est la loc. de Bousfield de $\mathcal{D}(Sm_k)$ par rapport aux

$$D_* \otimes Z(A^1) \rightarrow D_*$$

: $\mathcal{D}_{A^1} \approx$ sous-cat plaine de $\mathcal{D}(Sm_k)$ des complexes A^1 -locaux, $\mathcal{D}_{A^1} \hookrightarrow \mathcal{D}(Sm_k)$ est adjoint

à droite au foncteur de localisation et l'adjonction est de Quillen.

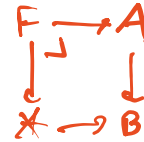
$L_{A^1}^{ab}: C_*(Sm_k) \rightarrow C_*(\underline{Sm}_k)$ "le" foncteur



de remplacement A^1 -fibrant

(modèle de $\mathcal{D}(Sm_k) \rightarrow \mathcal{D}_{A^1}(k) \hookrightarrow \mathcal{D}(Sm_k)$).

Rq: $\mathcal{D}_{A^1}(k)$ est stable (dans $\mathcal{D}(Sm_k)$) par suspension, désuspension, fibrés et cofibrés.



Modèle explicite de $L_{A^1}^{ab}$:

On fixe $C_* \mapsto C_*^t$ un foncteur de résolution fibrante (pour $\mathcal{D}(Sm_k)$).

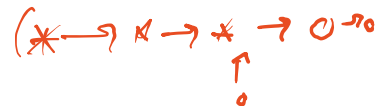
$L_{A^1}^{(1)}(C_*) := \text{cone}(ev_1: \underline{\text{Hom}}(Z(A^1), C_*^t) \rightarrow C_*^t)$

$L_{A^1}^{(n)}(C_*) := L_{A^1}^{(1)}(L_{A^1}^{(n-1)}(C_*))$, $L_{A^1}^{(\infty)} := \text{colim}_n L_{A^1}^{(n)}$

Prop: $L_{A^1}^{(\infty)} \simeq L_{A^1}^{ab}$, i.e. $C_* \rightarrow L_{A^1}^{(\infty)}(C_*)$ est un A^1 -q.iva et $L_{A^1}^{(\infty)}(C_*)$ est A^1 -fibrant (i.e. fibrant et A^1 -local).

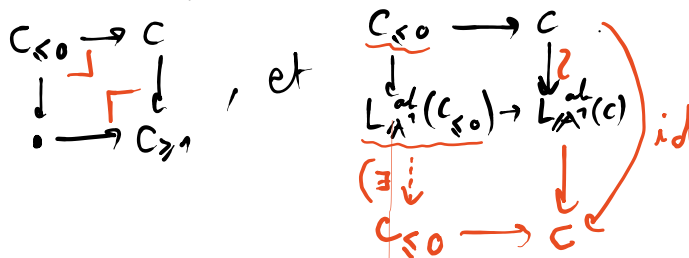
[C-D 5.2.C]

Théorème (Morel): Soit C_* un complexe (-1) -connexe, $e \in \mathcal{D}(Sm_k)$
alors $L_{A^1}^{ab}(C_*)$ est (-1) -connexe.



Cor: Un complexe C_* est A^1 -local si $\forall n$, $H_n(C_*)$ est strictement A^1 -invariant.

Preuve: \Rightarrow Soit C A^1 -local. On a une suite (co) fibre canonique:



donc $C_{\leq 0}$ est un retract de $L_{A^1}^{ab}(C_{\leq 0})$, donc est

A^1 -local, donc $L_{A^1}^{ab}(C_{\leq 0}) \simeq C_{\leq 0}$, et $C_{\geq 1}$ est

donc A^1 -local (D_{A^1} stable par cofibres), $L_{A^1}^{ab}(C_{\geq 1})$
 De là $H_n(C_*)[n] \simeq ((C_*)_{\leq n})_{\geq n}$ est A^1 -local.

\Leftarrow $D(Smh)$ est engendré par les représentables
 Suffit de montrer que

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D(Smh)} [Z(x)[n], C_*] & \xrightarrow{\sim} & [Z(x) \otimes Z(A^1)[n], C_*] \\ H_m''(x, C_*) & \longrightarrow & H_m''(x \times A^1, C_*) \end{array}$$

est un iso.

$$E_{1,q}^2 : H_p(x, H_q(C_*)) \implies H_{p+q}(x; C_*)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow ? & & \downarrow ? \\ H_p(x \times A^1, H_q(C_*)) & \implies & H_p(x \times A^1, C_*) \end{array}$$

$D_{A^1, \geq 0}$

$D_{A^1, \leq 0}$

\square

$\left[\text{Cor} \left(D_{A^1} \cap D(Smh)_{\geq 0}, D_{A^1} \cap D(Smh)_{\leq 0} \right) \right]$ définit une t -structure
 sur D_{A^1} , l'inclusion $D_{A^1} \hookrightarrow D(Smh)$ est t -exacte.

Preuve: 3 choses à vérifier

Ⓐ $\forall x \in D_{A^1, \geq 0}, y \in D_{A^1, \leq 0}, \text{Hom}_{D_{A^1}}(x, y[-1]) = 0 \quad \checkmark$

Ⓑ $D_{A^1, \geq 0}[n] \subseteq D_{A^1, \geq 0} \quad \checkmark$ (par cor. précédent)

Ⓒ $\forall C \in D_{A^1}, \exists C_{\geq 0} \rightarrow C \rightarrow C_{\leq -1}$, suite cofibre \checkmark
 $\in D_{A^1, \geq 0} \quad \in D_{A^1, \leq -1}$

\square

Rq: cette t -structure est non dégénérée $\heartsuit = D_{\geq 0} \cap D_{\leq 0}$
 • le cœur est formé des faisceaux strict. $-A^1$ -is.

Espaces d'Eilenberg-MacLane.

$\left[\text{Prop: } C_* \in D(Smh), 0\text{-conex} \right]$
 $C_* A^1\text{-local} \iff K(C_*) A^1\text{-local.}$
 \iff

A¹-résolution alternatives

Construction: $C_* \in \text{Ch}(\text{Sm}_k)$.

$$U^{(1)}(C_*) := \text{cone}(\text{ev}_1: \underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}(A^1), C_*^{\dagger}) \rightarrow C_*^{\dagger})$$

$$U^{(n)}(C_*) := U^{(1)}(U^{(n-1)}(C_*))$$

$$U^{(\infty)}(C_*) := \text{colim}_n U^{(n)}(C_*).$$

Prop:

① $K(C_*) \rightarrow K(U^{(\infty)}(C_*))$ est une A^1 -eq. faible \vee

② Si C_* est 0-connexe: $K(U^{(\infty)}(C_*))$ est A^1 -local.
et 0-connexe.

Preuve: ① Il suffit de montrer que $K(C_*^{\dagger}) \rightarrow K(U^{(1)}(C_*))$

est une A^1 -eq.

Par def, on a une suite fibre (dans $\mathcal{D}(\text{Sm}_k)$)

$$(*) \quad \underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}(A^1), C_*^{\dagger}) \xrightarrow{\text{ev}_1} C_*^{\dagger} \rightarrow U(C_*)$$

B.

$$\begin{array}{ccc} B. \rightarrow C_*^{\dagger} & & B. \rightarrow 0 \\ \downarrow \lrcorner \downarrow & \text{et} & \downarrow \lrcorner \downarrow \\ 0 \rightarrow U(C_*) & & 0 \rightarrow \Sigma B \end{array}$$

$$(B = B[1] [-1])$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccccc} B. & \rightarrow & C_*^{\dagger} & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \lrcorner \downarrow & & \downarrow \lrcorner \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & U(C_*) & \rightarrow & \Sigma B \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccc} K(C_*^{\dagger}) & \rightarrow & * \\ \downarrow \lrcorner \downarrow & & \downarrow \lrcorner \downarrow \\ K(U(C_*)) & \rightarrow & K(\Sigma B) \end{array}$$

← dans $\mathcal{H}_{\text{nis}}(k)$

②. Exits: $U^{(m)}(C.)$ est 0 -combesse si l'est $C.$ l'est
 $K(U^{(\infty)}(C.)) \rightsquigarrow 0$ -combesse.

• suffit de montrer que $\forall X \in \text{Sm}_g, \forall m,$

tout $\mathbb{A}^1 \wedge S^n \wedge X_+ \rightarrow K(U^{(\infty)}(C.))$ est triviale:

en effet:

$$[\mathbb{A}^1 \wedge S^n \wedge X_+, K(U^{(\infty)}(C.))]_* \simeq \pi_n \left(\underline{\text{Hom}}_{\text{simplicial}}(\mathbb{A}^1, K(U^{(\infty)}(C.))) (X) \right)$$

et \mathcal{B} \mathbb{A}^1 -local + 0 -combesse $\Leftrightarrow \underline{\text{Hom}}.(\mathbb{A}^1, \mathcal{B}) \simeq *$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}_{\text{nis}}} (X, \mathcal{B}) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{H}_{\text{nis}}} (X, \mathcal{B})$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}_{\text{nis}}} (X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{B}) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{H}_{\text{nis}}} (X, \underline{\text{Hom}}(\mathbb{A}^1, \mathcal{B}))$$

$$\underline{\text{Hom}}.(\mathbb{A}^1, \mathcal{B}) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathbb{A}^1, \mathcal{B})$$

$$\downarrow \simeq \quad \downarrow \simeq$$

$$\circ \longrightarrow \mathcal{B}$$

Donc: Suffit de montrer que tout

$\phi: \mathbb{A}^1 \wedge X_+ \wedge S^n \rightarrow K(U^{(\infty)}(C.))$ est trivial.

• $\mathbb{A}^1 \wedge X_+ \wedge S^n$ est compact $\rightsquigarrow \phi$ se factorise $\text{Hom}(X, -)$
à travers $K(U^{(m)}(C.))$

$\tilde{\phi}: \mathbb{A}^1 \wedge X_+ \wedge S^n \rightarrow K(U^{(m)}(C.))$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1) \otimes \mathbb{Z}(X_+) \otimes \mathbb{Z}(S^n) \rightarrow U^{(m)}(C.)$$

$$\uparrow \text{ev}_?$$

$$\exists \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1), U^{(m)}(C.))$$

$$\mathbb{Z}(x_*) \otimes \mathbb{Z}(A^1) \otimes \mathbb{Z}(A^1) \otimes \mathbb{Z}(S^n) \longrightarrow U^{(m)}(C_*) \quad (c.)$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \nearrow \phi \\ & \mathbb{Z}(A^1) \otimes \mathbb{Z}(S^n) \otimes \mathbb{Z}(x_*) & \end{array}$$

$$\mathbb{Z}(A^1) \otimes \mathbb{Z}(A^1)$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{Z}(A^1)$$

$$N_*(A^1 \wedge A^1) \rightarrow N_*(A^1).$$

Si C_* est σ -connexe

□

Cor \checkmark ① $U^{(m)}(C_*) \simeq L_{A^1}^{alt}(C_*)$ et

② $L_{A^1}(\underbrace{K(C_*)}_{\mathcal{H}_{N_i}(A)}) \simeq K(\underbrace{L_{A^1}^{alt}(C_*)}_{\mathcal{K}^{A^1}(C_*)})$.

Preuve: ① Appliquer N_* :

$$\begin{array}{ccc} N_* K(C_*) & \rightarrow & N_* K(U^{(m)}(C_*)) \\ \cong_{C_*} & \longrightarrow & \cong_{U^{(m)}(C_*)} U^{(m)}(C_*) \simeq L_{A^1}^{alt}(C_*) \end{array}$$

② $K(C_*) \xrightarrow{\sim A^1} K(U^{(m)}(C_*))$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \cong & \nearrow \exists! & \\ L_{A^1}(K(C_*)) & & K(L_{A^1}^{alt}(C_*)) \end{array}$$

□