THÉORÈME DE HUREWICZ

$\mathcal{X}$ espace

$$H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) := H_n\left(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}\left(C_*\left(\widetilde{\mathbb{Z}(\mathcal{X})}\right)\right)\right).$$

Si $\mathcal{X}$ est pointé,

$$\widetilde{H}_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) := \mathrm{Ker}\left(H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \longrightarrow H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Spec}(k))\right)$$

$$H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Spec}(k)) = H_n\Big(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}\big(\underbrace{C_*(\mathrm{Spec}(k))}_{(0 \to 0 \to \underline{\mathbb{Z}} \to 0 \to \dots)}\big)\Big)$$

$\mathbb{A}^1$-local

$$H^i_{Nis}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$ X géométriquement unibranche (?)

$$H_*^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \widetilde{H}_*^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}).$$

* $L^{ab}_{\mathbb{A}^1}$ commute au shift dans $D(Sh_{Nis}(Sm/k, \mathbb{Z}))$

$$C_* \circ \Sigma = C_*[1].$$

$$\widetilde{H}_{n+1}^{\mathbb{A}^1}(\Sigma(\mathcal{X})) = \widetilde{H}_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}).$$

th. de Morel (C (-1) connexe $\Rightarrow L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C)$ est (-1)-connexe)

$\Rightarrow \begin{cases} H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = 0 & \text{si } n < 0. \\ H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \text{ est str. } \mathbb{A}^1\text{-inv} & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$

<u>Rq</u>: Ce n'est plus vrai sur une base quelconque (contre-ex. d'Ayoub avec une base de dim° 2).
dim 1 ??

* En topo alg, c'est facile de calculer $H_i(S^n)$.
et $H_i(S^n) = 0$ si $i > n$

En $\mathbb{A}^1$-htp c'est <u>hautement</u> non-trivial.

Conjecture (Morel) X k-schéma (quasi-projectif) lisse de dimension d.

- $H_n^{\mathbb{A}^1}(X) = 0$ si $n > 2d$
- $H_n^{\mathbb{A}^1}(X) = 0$ si X affine $n > d$.
(«Lefschetz affine»)

conjecture $\Rightarrow H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{G}_m^i) = 0$ si $n > i$
$\Rightarrow$ Beilinson-Soulé

$$H_M^{n,i}(k) = \mathrm{Hom}_{DM^{eff}_{Nis}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[n](i))$$
$$= 0 \quad \text{si } n < 0 \quad \text{(Beilinson-Soulé)}$$

$$\mathrm{Hom}_{DM^{eff}}(\mathbb{Z}^{tr}[n], \mathbb{Z}^{tr}[i](i)) = 0 \quad \text{si } n > i$$

$$M(\mathbb{G}_m^i) = C_*^{Sus}(\mathbb{Z}^{tr}(\mathbb{G}_m^i)) = L^{ab^{tr}}_{\mathbb{A}^1}(\mathbb{Z}^{tr}(\mathbb{G}_m^i)).$$
$$\| $$
$$\bigoplus_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \mathbb{Z}^{tr}(k)[k]$$

$$BS \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{DM^{eff}}(\mathbb{Z}^{tr}[n], M(\mathbb{G}_m^i)) = 0 \quad \text{si } n > i$$
$$\| $$
$$H_n^{Sus}(\mathbb{G}_m^i)$$

$$D^{eff}_{\mathbb{A}^1}(k) \underset{\gamma_*}{\overset{\gamma^*}{\rightleftarrows}} DM^{eff}_{Nis}(k) \xrightarrow{\Sigma^\infty} DM_{Nis}(k) \qquad \Sigma^\infty \text{ pleinement fidèle}$$

γ^* est t-exact à droite pour la t-structure htpique.

* En g^al ça a l'air difficile de calculer
$\pi_i^{\mathbb{A}^1} \not\simeq H_i^{\mathbb{A}^1}$ $i \geq 1$.

$\mathcal{X}$ espace, on «comprend» son premier $\pi_i^{\mathbb{A}^1}$ non-trivial.

- On ne connait pas d'exemple non-trivial sur lequel on peut calculer $\pi_{i+1}^{\mathbb{A}^1}$ sans Bloch-Kato ou Milnor.

<u>Morphisme de Hurewicz</u> : $\mathcal{X} \xrightarrow{(*)} K(C_*(\mathcal{X}))$

$$\pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) := \pi_n^{simp}(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}))$$

$$\pi_n^{simp}(K(C_*(\mathcal{X}))) \underset{D.K.}{=} H_n(C_*(\mathcal{X}))$$

$$\pi_n^{simp}(L_{\mathbb{A}^1}(KC(\mathcal{X}))) \to \pi_n^{sim}(K L_{\mathbb{A}^1} C(\mathcal{X}))$$

iso si $C_*(\mathcal{X})$ est 0-connexe.

(*) induit $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{h} H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$

<u>Déf</u>: $\mathcal{X}$ est n-connexe si $\pi_i^{simp}(\mathcal{X}) = *$ $i \leq n$.
n-$\mathbb{A}^1$- ——— $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = *$ $i \leq n$.

<u>Théorème</u> (Hurewicz faible) :

① $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(k)$ $\mathbb{A}^1$-connexe. Alors

$$h : \pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \longrightarrow H_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$$

est le morphisme initial du faisceau en groupes $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ vers un faisceau en gpes abéliens str. $\mathbb{A}^1$-inv.

i.e. tout $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \longrightarrow M$ M str $\mathbb{A}^1$-inv de gpes abéliens

$$\begin{tikzcd} \pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & M \\ H_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \arrow[ur, dotted, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

② $n \geq 2$ $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(k)$ $(n-1)$-$\mathbb{A}^1$-connexe, alors
$\forall i \leq n-1$, $\widetilde{H}_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = 0$

$\pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ est un isomorphisme de fx str. $\mathbb{A}^1$-inv.

<u>dém</u> : ① M fort. $\mathbb{A}^1$-inv de gpes abéliens.

$$\mathrm{Hom}_{Grp}(\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}), M) \simeq [L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}), BM]_{\mathcal{H}(k)}$$

théorie de l'obstruction

$$\underset{D.K.}{\simeq} [L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}), K(M[1])]_{\mathcal{H}(k)}$$
$$\simeq [\mathcal{X}, K(M[1])]_{\mathcal{H}\mathbb{A}^1(k)}.$$

$K(M[1])$ est $\mathbb{A}^1$-local car $M[1]$ est $\mathbb{A}^1$ local 0-connexe.

$$\simeq \mathrm{Hom}_{D^{eff}_{\mathbb{A}^1}(k)}(C_*(\mathcal{X}), M[1])$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{D(\underbrace{Sh_{Nis}(Sm/k, \mathbb{Z})}_{Ab(k)})}(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*(\mathcal{X})), M[1])$$

$\left[\begin{array}{l} \mathcal{X} \text{ 0-connexe} \Rightarrow C_*(\mathcal{X}) \text{ 0-connexe} \\ \underset{\text{Morel}}{\Rightarrow} L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*(\mathcal{X})) \text{ est 0-connexe} \end{array}\right]$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{Ab(k)}(H_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}), M).$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to & C_1 & \to & C_2 \to & \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & M & \to & 0 & \dots \\ & 1 & & & \end{array}$$

□

② $n > 1$ Même preuve $1 \leftarrow n$.

$\pi_n^{\mathbb{A}^1}$ est fort. $\mathbb{A}^1$-inv $\rightsquigarrow$ h est un iso. □

<u>Rq</u> : On ne sait pas en g^al si $H_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = \pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})^{ab}$.

i.e. h est un épi.

<u>Thm</u> : ($\mathbb{A}^1$-connexité instable)
$n > 0$ $\mathcal{X}$ un espace pointé $(n-1)$-connexe alors $\mathcal{X}$ est $(n-1)$-$\mathbb{A}^1$-connexe.

<u>dém</u> : <u>$n=1$</u> : Morel-Voevodsky.

$\mathcal{X}$ n-connexe $\Rightarrow \mathcal{X}$ $(n-1)$-$\mathbb{A}^1$-connexe

$$\Rightarrow \pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$$
$$\| $$
$$H_n\Big(\underbrace{L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(\underbrace{C_*(\mathcal{X})}_{n\text{-connexe}})}_{n\text{-connexe}}\Big) \quad □$$

$F \in Sh_{Nis}(Sm/k, Sets)$

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{A}^1}(F) := H_0^{\mathbb{A}^1}(F) = \left(H_0\left(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*(\mathbb{Z}[F]))\right)\right).$$

$M \in HI(k)$

$$\mathrm{Hom}_{HI(k)}(\mathbb{Z}_{\mathbb{A}^1}(F), M) = \mathrm{Hom}_{D^{eff}_{\mathbb{A}^1}}(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*(\mathbb{Z}(F))), M)$$
$$= \mathrm{Hom}_{D(Sh_{Nis}(Sm/k, \mathbb{Z}))}(C_*(\mathbb{Z}[F]), M)$$
$$= \mathrm{Hom}_{Sh}(F, M).$$

Si F pointé, $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}^1,\bullet}(F) = \widetilde{H}_0^{\mathbb{A}^1}(F)$

<u>cor</u> : $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(\Sigma^n F) \xrightarrow{\sim} \overset{(\sim)}{H}{}_n^{\mathbb{A}^1}(\Sigma^n F) \cong \mathbb{Z}_{\mathbb{A}^1,\bullet}(F)$
$n \geq 2$

<u>dém</u> : $\Sigma^n F$ est $(n-1)$-connexe
$\pi_i(\Sigma^n F) = \pi_0(\Sigma^{n-i}(F)) = *$.

Les exposés précédents (Niels + un vieil exposé R).

$$\underbrace{\mathbb{Z}_{\mathbb{A}^1,\bullet}}(\mathbb{G}_m^{\wedge n}) = \underline{K}_n^{MW}$$

« le faisceau libre fort. $\mathbb{A}^1$-inv. engendré par $\mathbb{G}_m^{\wedge n}$. $n \geq 1$.

<u>Thm</u> : $(n \geq 2)$

$$\pi_{n-1}^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{A}^n \setminus \{0\}) \cong \pi_n^{\mathbb{A}^1}((\mathbb{P}^1)^{\wedge n}) \cong \mathbb{Z}_{\mathbb{A}^1,\bullet}(\mathbb{G}_m^{\wedge n})$$
$$\| $$
$$\underline{K}_n^{MW}.$$

<u>dém</u> : $\left[\begin{array}{l} \mathbb{A}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n} \\ S^1 \wedge \mathbb{G}_m \simeq \mathbb{P}^1 \end{array}\right.$ $n \geq 2$

<u>$n=2$</u> : $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\})$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\underbrace{SL_2} \xrightarrow[\mathbb{A}^1\text{-éq. faible}]{} \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow \pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\})$ fort. $\mathbb{A}^1$-inv de <u>gpes abéliens</u> + <u>Hurewicz</u>
+ le faisceau libre engendré par $\mathbb{G}_m^{\wedge 2}$ est $\underline{K}_2^{MW}$. □

<u>Rq</u> : $\begin{cases} \mathbb{A}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n} \\ (\mathbb{P}^1)^{\wedge n} \simeq S^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n} \end{cases} \rightsquigarrow \underbrace{S^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge i}}$?

Hurewicz $\Rightarrow$ Il est $(n-1)$-connexe

si $n \geq 2$, $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(S^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge i}) \simeq \underline{K}_i^{MW}$.

<u>$n=0$</u> : $\mathbb{G}_m^{\wedge n}$ est $\mathbb{A}^1$-invariant.

si $\mathcal{X}$ est $\mathbb{A}^1$-inv (Morel-Asok) $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \simeq \mathcal{X}$.
$\pi_0(\mathbb{G}_m^{\wedge n}) \simeq \mathbb{G}_m^{\wedge n}$.

<u>$n=1$</u> : Hurewicz donne un épi.

$$\pi_1^{\mathbb{A}^1}(S^1 \wedge (\mathbb{G}_m)^{\wedge i}) \twoheadrightarrow \underline{K}_i^{MW}.$$

Il a un noyau non trivial si $i = 1$
(cf. Morel 7.3 $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{P}^1)$).

<u>$i=2$</u> : c'est un iso. $S^1 \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 2} \simeq \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ $(\simeq SL_2)$.

<u>$i > 2$</u> : Inconnu.

<u>Cor</u> : $(n, i) \in \mathbb{N}^2$ $(m, j) \in \mathbb{N}^2$

$$[S^m \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge j}, S^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge i}]_{\mathcal{H}_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)}$$
$$\| $$
$$\begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ \underline{K}_{i-j}^{MW}(k) & m = n, \ i > 0 \\ 0 & m = n, \ j > 0, \ i = 0 \\ \mathbb{Z} & m = n, \ i = j = 0 \ ✓ \end{cases}$$

<u>dém</u> : $\mathbb{G}_m$-loop-spaces $(\underline{K}_n^{MW})_{-1} \simeq \underline{K}_{n-1}^{MW}$. □

<u>Suites $\mathbb{A}^1$-fibres & applications</u> :

Suite $\mathbb{A}^1$-fibre = suite $\Gamma \xrightarrow{i} \mathcal{X} \xrightarrow{p} \mathcal{Y}$ avec $p \circ i = *$
$\boxed{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \Gamma \in \mathcal{H}_\bullet(k)}$
telle que $L_{\mathbb{A}^1}(\Gamma) \to L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \to L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$ est une suite fibre simpliciale.

(PB) Une suite fibre simpliciale n'est pas nécessairement une suite $\mathbb{A}^1$-fibre.

«Exemple». $\mathcal{X}$ pointé fibrant $P(\mathcal{X}) = \underline{\mathrm{Hom}}_\bullet(\Delta^1, \mathcal{X})$
$\Omega^1(\mathcal{X}) = \underline{\mathrm{Hom}}_\bullet(S^1, \mathcal{X})$.

On a une suite fibre

$$(\Omega^1(\mathcal{X}) \to P(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}). \ [*]$$

<u>Prop</u> : $\mathcal{X}$ simp. fibrant $\in \mathcal{H}_\bullet(k)$.

$[*]$ est $\mathbb{A}^1$-fibre $\Leftrightarrow$ le morph. can $L_{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{X})) \to \Omega^1(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}))$ est une équivalence simpliciale.

<u>dém</u> : • $P(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ est une éq. simpliciale (fibre par fibre ...)

$\Rightarrow L_{\mathbb{A}^1}(P(\mathcal{X})) \to P(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}))$ naturel est une éq. simpliciale.

$$\begin{tikzcd} L_{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{X})) \arrow[r] \arrow[d] & L_{\mathbb{A}^1}(P(\mathcal{X})) \arrow[r] \arrow[d, "s"] & L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \arrow[d, equal] \\ \Omega^1(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})) \arrow[r] & P(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})) \arrow[r] & L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \end{tikzcd}$$

fibre □

<u>Thm</u> : $\mathcal{X}$ simp. fibrant
$L_{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{X})) \to \Omega^1(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}))$ est une éq. simpliciale
$\Leftrightarrow \pi_0^{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{X})) = \pi_0(L_{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{X})))$ est fort. $\mathbb{A}^1$-inv.