Cohomologie de Deligne réelle

[dS-L] dos Santos, Lima-Filho, Integral Deligne cohomology for real varieties

Cas classique : • Esnault-Viehweg, Deligne-Beilinson cohomology
• Voisin, Th. de Hodge et géo. alg. complexe

But. $X/\mathbb{R}$ propre lisse, A sous-anneau de $\mathbb{R}$, $p \geq 0$
$\rightsquigarrow H^n_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(X, A(p))$

I) Cas classique (variétés complexes)

1) Motivations

Liens avec les cycles algébriques
$X/\mathbb{C}$ propre et lisse
$CH^p(X)$

$$\begin{tikzcd}
 & & & H^{2p}(X,\mathbb{Z}) \cap H^{p,p}(X) \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\
0 \arrow[r] & J^{2p-1}(X) \arrow[r] & H^{2p}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(p)) \arrow[r] & Hdg^{2p}(X) \arrow[r] & 0 \\
 & CH^p(X)_{hom} \arrow[u, "\text{Abel-Jacobi}"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & CH^p(X) \arrow[u, "\text{reg} \; \text{classe de Deligne}"'] \arrow[ur, "\text{classe de cycle}"'] & & \\
 & & H^{2p}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(p)) \arrow[u, phantom, "\cong"] & &
\end{tikzcd}$$

En degré quelconque : cohomologie motivique et régulateurs supérieurs
($\rightsquigarrow$ conjectures de Beilinson sur les valeurs de fonctions L)

2) Définition

$X/\mathbb{C}$ propre lisse, $A(p) := (2i\pi)^p A \subset \mathbb{C}$ — A sous-anneau de $\mathbb{R}$

<u>Déf</u> (complexe de Deligne)

$$A(p)_{\mathcal{D}} = \big(\underset{\text{degré } 0}{A(p)} \to \underset{\text{degré } 1}{\mathcal{O}_X} \xrightarrow{d} \Omega^1_X \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \underset{\text{degré } p}{\Omega^{p-1}_X} \big)$$

Variante : $A(p)'_{\mathcal{D}} = \mathrm{Cone}\,(A(p) \oplus F^p\Omega^*_X \to \Omega^*_X)[-1]$
$(a, \omega) \mapsto a - \omega$

<u>Lemme</u>. $A(p)'_{\mathcal{D}} \overset{qis}{\simeq} A(p)_{\mathcal{D}}$ $\qquad F^p\Omega^*_X = \Omega^{\geq p}_X$

<u>Dém</u>. $A(p)'_{\mathcal{D}} \overset{qis}{\simeq} \mathrm{Cone}\,(A(p) \to \underbrace{\mathrm{Cone}\,(F^p\Omega^*_X \to \Omega^*_X)}_{\overset{qis}{\simeq}\, \Omega^{\leq p-1}_X})[-1]$

$\overset{qis}{\simeq} A(p)_{\mathcal{D}}$ $\square$.

<u>Déf</u>. (Cohomologie de Deligne) $H^n_{\mathcal{D}}(X, A(p)) = \mathbb{H}^n(X, A(p)_{\mathcal{D}})$.

(*) $\cdots \underline{H^n_{\mathcal{D}}(X, A(p))} \to H^n_{sing}(X, A(p)) \to H^n(X,\mathbb{C})/F^pH^n(X,\mathbb{C}) \to H^{n+1}_{\mathcal{D}}(X, A(p)) \cdots$

(F^p : filtration de Hodge)

<u>Exemples</u>

① $p > \dim(X)$ $\qquad F^p\Omega^*_X = 0$

$H^n_{\mathcal{D}}(X, A(p)) \simeq H^{n-1}_{sing}(X, \mathbb{C}/A(p))$

$\cdots H^{n-1}(X, A(p)) \to H^{n-1}(X, \mathbb{C}) \to H^n_{\mathcal{D}}(X, A(p)) \to \underbrace{H^n(X, A(p)) \to H^n(X, \mathbb{C})}_{\text{injectif}}$

② $p = 0$ $\qquad F^p\Omega^*_X = \Omega^*_X \qquad H^n_{\mathcal{D}}(X, A(0)) = H^n_{sing}(X, A)$.

<u>Rqs</u>. • Variétés complexes quelconques (cohomologie de Deligne-Beilinson)

• $A = \mathbb{R}$ description plus explicite dues à Burgos avec des formes différentielles C^∞ $\rightsquigarrow$ utile pour des calculs

• Interprétation de $H_{\mathcal{D}}$ comme groupe d'extensions dans MHS.

II) Variétés réelles

$X/\mathbb{R}$ propre lisse, $X(\mathbb{C}) \circlearrowleft G = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$
$\sigma : X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$ conj. complexe

<u>1ère approche</u>

$U \subseteq X(\mathbb{C})$, $\omega \in \Omega^k(U)$, $F_{dR}(\omega) = \overline{\sigma^*\omega} \in \Omega^k(\sigma(U))$ — conjugaison de de Rham

$\underset{\underset{F_{dR}}{\circlearrowleft}}{\Omega^k_{alg}(X_{\mathbb{C}})} \simeq \Omega^k_{alg}(X_{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} \underset{\circlearrowleft_G}{\mathbb{C}}$, $\quad H^n_{dR}(X) \simeq H^n_{dR}(X_{\mathbb{C}})^{F_{dR}=1}$

$F_{dR} : A(p)_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\simeq} \sigma^* A(p)_{\mathcal{D}}$

$\rightsquigarrow F_{dR}$ agit sur $H^n_{\mathcal{D}}(X(\mathbb{C}), A(p))$

<u>Déf</u>. $H^n_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(X/\mathbb{R}, A(p)) = H^n_{\mathcal{D}}(X(\mathbb{C}), A(p))^{F_{dR}=1}$

C'est la bonne déf. si $1/2 \in A$
En général, ce n'est pas clair que ce soit la bonne définition

Esnault-Viehweg suggèrent :

$R\Gamma(X(\mathbb{C}), A(p)_{\mathcal{D}}) \in D(G\text{-Mod})$
$\downarrow$
$R\Gamma(X(\mathbb{C}), A(p)_{\mathcal{D}})^{hG} \in D(Ab)$
$\parallel$
$R\Gamma(G, R\Gamma(X(\mathbb{C}), A(p)_{\mathcal{D}}))$

2) Complexe de Bredon (rappels)

$X \in G\text{-Man}$ = variétés C^∞ + action C^∞ de G

$G \circlearrowright A^j(X) = \{ j\text{-formes diff. } C^\infty \text{ complexes sur } X \}$
$\cup$
$\mathcal{E}^j(X) = A^j(X)^G$

$A(p)_{Br}$ = complexe de préfaisceaux sur G-Man

$X \in G\text{-Man} \qquad A(p)^j_{Br}(X) = \;?$

$J^j_p(X) : \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbb{Z}.\mathrm{Hom}_{G\text{-Man}}(\Delta^{p-j} \times X, (\mathbb{C}^\times)^{p-1}_i)$ $\qquad$ (Δ : simplexe topologique) $\qquad (\mathbb{C}^\times)^{p-1}_i = \ker\left((\mathbb{C}^\times)^p \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{C}^\times \right)$
$\longrightarrow \mathbb{Z}\,\mathrm{Hom}(\Delta^{p-j} \times X, (\mathbb{C}^\times)^p)$

$\hat{X}$ = cat. des revêtements finis $Y \to X$ dans G-Man

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & Y_2 \arrow[dl] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

A = top. discrète et action de G triviale
$\mathrm{Hom}_{G\text{-Top}}(X, A) = \{ f : X \to A \text{ loc. constants, } G\text{-invariants} \}$

$A(p)^j_{Br}(X) = \left(\bigoplus_{Y \in \hat{X}} \mathrm{coker}\,(J^j_p(Y)) \otimes \mathrm{Hom}_{G\text{-Top}}(Y, A) \right) \Big/ \text{“relations d'adjonction”}$.

3) Construction de $\tau : A(p)_{Br} \to \mathcal{E}^*$ $\qquad$ (analogue de $A(p) \to \Omega^*_X$)

Un élément de $A(p)^j_{Br}(X)$ est représenté par une somme de symboles $[f] \otimes m$, $\left\{ \begin{array}{l} Y \in \hat{X} \\ f : \Delta^{p-j} \times Y \to (\mathbb{C}^\times)^p \\ m : Y \to A \end{array} \right.$

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{p-j} \times Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\hat{\pi}"'] \arrow[dr, "p_2"] & (\mathbb{C}^\times)^p \\
X & Y \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}$$

dim. rel. $p-j$

$\omega = \frac{dt_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_p}{t_p} \in \mathcal{E}^p((\mathbb{C}^\times)^p)$

$\tau([f] \otimes m) \overset{def}{=} \hat{\pi}_!\big(\underbrace{p_2^*(m) \cdot f^*(\omega)}_{\in \mathcal{E}^p(\Delta^{p-j} \times Y)} \big) \in \mathcal{E}^j(X)$

• $J^j_p(Y) : \bigoplus_{i=1}^{p} \underbrace{\mathbb{Z}\,\mathrm{Hom}(\Delta^{p-j} \times Y, (\mathbb{C}^\times)^{p-1}_i)}_{g} \to \mathbb{Z}\,\mathrm{Hom}(\Delta^{p-j} \times Y, (\mathbb{C}^\times)^p)$
$g \longmapsto f$

$g^*(\omega) = 0 \qquad \omega|_{(\mathbb{C}^\times)^{p-1}_i} = 0$

• Relations d'adjonction

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & Y_2 \arrow[dl] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

$f : \Delta^{p-j} \times Y_2 \to (\mathbb{C}^\times)^p$
$m : Y_1 \to A$

$\tau(\phi^* f \otimes m) \overset{?}{=} \tau(f \otimes \phi_* m)$

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{p-j} \times Y_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_2"] \arrow[dd, bend right=60, "\hat{\pi}_1"'] & \Delta^{p-j} \times Y_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dd, bend left=60, "\hat{\pi}_2"] & (\mathbb{C}^\times)^p \\
Y_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] \arrow[d, "m"'] & Y_2 \arrow[d, "\pi_2"] & \\
A & X &
\end{tikzcd}$$

$\tau(\phi^* f^* \omega \otimes p_2^* m) = \hat{\pi}_{1,!}(p_2^*(m) \cdot \phi^* f^* \omega)$
$= \pi_{1,!}(p_{2,!}(-)) = \pi_{1,!}(m \cdot p_{2,!}(\phi^* f^* \omega))$
$= \pi_{1,!}(m \cdot \phi^*(\underbrace{p_{2,!}(f^*\omega)}_{\eta})) = \pi_{2,!}(\phi_*(m \cdot \phi^*(\eta)))$
$= \pi_{2,!}(\phi_*(m) \cdot \eta) = \tau(f^*\omega \otimes \phi_*(m))$ $\square$.

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "m"'] & Y_2 \\
A &
\end{tikzcd}$$

$\phi_* m : Y_2 \to A$
$y \mapsto \sum_{\substack{z \in Y_1 \\ \phi(z) = y}} m(z)$

$\phi_*(m \cdot \phi^* m') = \phi_*(m) \cdot m'$.

<u>Prop</u> [dS-L] Proposition 2 $\qquad \tau : A(p)_{Br} \to \mathcal{E}^*$ est un morphisme de complexes.

4) Cohomologie de Deligne réelle

<u>Déf</u> (Complexe de Deligne équivariant)
$X/\mathbb{R}$ propre et lisse
$A(p)_{\mathcal{D}/\mathbb{R}} = \mathrm{Cone}\,(A(p)_{Br} \oplus F^p\mathcal{E}^*_X \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}^*_X)[-1]$

$\iota(\alpha, \omega) = \tau(\alpha) - \omega$ $\qquad A^n = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q} \circlearrowleft_G$

<u>Déf</u>. $H^n_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(X, A(p)) = \check{\mathbb{H}}^n(X_{eq}, A(p)_{\mathcal{D}/\mathbb{R}})$ $\qquad F^p\mathcal{E}^n = \bigoplus_{\substack{p'+q=n \\ p' \geq p}} \mathcal{E}^{p',q}$

• Suites exactes longues faisant intervenir $H^{n,p}_{Br}(X(\mathbb{C}), \underline{A})$ au lieu de $H^n_{sing}(X(\mathbb{C}), A(p))^{F_{dR}=1}$ $\qquad \mathcal{E}^n = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{E}^{p,q}$, $\quad \mathcal{E}^{p,q} = (A^{p,q})^G$

<u>Prop</u> (a) Extension des scalaires $X/\mathbb{R}$ propre et lisse

$H^n_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(X, A(p)) \longrightarrow H^n_{\mathcal{D}}(X(\mathbb{C}), A(p))^G$ $\qquad \neq$ iso en général (exemple ?)

(b) Restriction des scalaires $X/\mathbb{C}$ propre et lisse

$H^n_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} X, A(p)) \simeq H^n_{\mathcal{D}}(X, A(p))$.

Existence de produits.
$\mu : A(p)_{Br} \otimes A(q)_{Br} \to A(p+q)_{Br}$
$\tau : A(p)_{Br} \to \mathcal{E}$ compatible aux produits

$\alpha \in [0,1] \qquad \cup_\alpha : A(p)_{\mathcal{D}/\mathbb{R}} \otimes A(q)_{\mathcal{D}/\mathbb{R}} \to A(p+q)_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}$

$\rightsquigarrow H^n_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(X, A(p)) \otimes H^{n'}_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(X, A(p'))$
$\xrightarrow{\cup} H^{n+n'}_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(X, A(p+p'))$ $\qquad$ cup-produit

5) Cohomologie du point $pt = \mathrm{Spec}\,\mathbb{R}$

$A = \mathbb{Z}$, $\quad H^1_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(pt, \mathbb{Z}(p)) \qquad p \geq 1$.

Avec la suite exacte longue :

$\mathbb{Z}(p)^G \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \underline{H^1_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(pt, \mathbb{Z}(p))} \to H^{1,p}_{Br}(pt, \underline{\mathbb{Z}}) \to 0$

$\mathbb{Z}(p)^G = \begin{cases} \mathbb{Z}(p) & \text{si } p \text{ pair} \\ 0 & \text{si } p \text{ impair} \end{cases} \qquad H^{1,p}_{Br}(pt, \underline{\mathbb{Z}}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^\times & \text{si } p \text{ impair} \\ 0 & \text{si } p \text{ pair} \end{cases}$

$p = 1 \qquad 0 \to \mathbb{R} \to H^1_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(pt, \mathbb{Z}(1)) \to \mathbb{Z}^\times \to 0$
$\qquad H^1_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(pt, \mathbb{Z}(1)) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^\times \cong \mathbb{R}^\times$
$\qquad (t, s) \mapsto s \cdot \exp(t)$

$H^1_{\mathcal{M}}(pt, \mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{reg} H^1_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(pt, \mathbb{Z}(1))$
$\quad\;\; \cong \qquad\qquad\qquad\qquad \cong$
$\quad\;\; \mathbb{R}^\times \xrightarrow{\quad id \quad} \mathbb{R}^\times \simeq \mathbb{R} \times \{\pm 1\}$
$\quad\;\; z \longmapsto (\log|z|, \text{signe}(z))$

$H^1_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{reg} H^1_{\mathcal{D}}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))$
$\quad\;\; \cong \qquad\qquad\qquad\qquad \cong$
$\quad\;\; \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}(1)$
$\quad\;\; z \longmapsto \log(z)$