Cohomologie équivariante et complexe de Bredon.

I G-Spectres et cohomologie de Bredon.

G : groupe fini.

Def : $\mathcal{O}_G$: cat des orbites de G.
obj : cosets G/H, $H < G$

morphismes. $G/H \to G/K$ G-équiv.

$$\mathcal{S}_G := \mathrm{Fun}(\mathcal{O}_G^{op}, \mathcal{S})$$

Rq : $\mathcal{S}_G \not\simeq \mathrm{Fun}(BG, \mathcal{S})$

Notation : $\forall X \in \mathcal{S}_G, \forall H < G, X^H := X(G/H)$.

Rq : Pour $X \in Top_G$ gentil.

$$F_X : \mathcal{O}_G^{op} \longrightarrow Top_{gentil}$$
$$G/H \longmapsto X^H$$
$$\varphi : G/H \to G/K \longmapsto \begin{pmatrix} X^K \longrightarrow X^H \\ x \longmapsto \alpha^{-1} \cdot x \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \text{ est tq } \varphi(H) = \alpha K$$

Rq : Fin_G est la co-complétion libre par coproduits finis de $\mathcal{O}_G$, donc :

$$S_G = Fun(\mathcal{O}_G^{op}, S) = Fun^{\times}(Fin_G^{op}, S) = \mathcal{P}_{\Sigma}(Fin_G)$$

Def : $h\,Span(Fin_G)$, catégorie homotopique des correspondances de Fin_G.

- objets : objets de Fin_G

- morphismes $x \nrightarrow y$: classes d'équiv de diagrammes $x \leftarrow c \rightarrow y$

$$x \leftarrow c \rightarrow y \simeq x \leftarrow c' \rightarrow y \text{ si } \exists\, \varphi : c \xrightarrow{\sim} c' \text{ tq }
\begin{tikzcd} & c \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\wr"] & \\ x & & y \\ & c' \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

· Composition :

$$x \xleftarrow{} c \xrightarrow{} y \circ y \xleftarrow{} c' \xrightarrow{} z = x \xleftarrow{} c'' \xrightarrow{} z$$

où

$$\begin{tikzcd}
 & & c'' \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\lrcorner"] & & \\
 & c \arrow[dl] \arrow[dr] & & c' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x & & y & & z
\end{tikzcd}$$

Rq : $h\,\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G) = ho(i_1\, \underline{\mathrm{Span}}(\mathrm{Fin}_G))$

où $\underline{\mathrm{Span}}(\mathrm{Fin}_G)$ est une $(\infty,2)$-catégorie

"définie par"

$$[n] \mapsto \mathrm{Fun}^{cart}(\mathrm{Tw}(\Delta^n), \mathrm{Fin}_G).$$

$$i_1\, \underline{\mathrm{Span}}(\mathrm{Fin}_G) = \mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G).$$

Rq : $\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G)$ est préadditive. i.e pointée et elle admet des sommes directes finies

$$X \overset{=}{\longleftarrow} X \longrightarrow X \sqcup Y \qquad Y \overset{=}{\longleftarrow} Y \longrightarrow X \sqcup Y \qquad X \sqcup Y \longleftarrow X \overset{=}{\longrightarrow} X, \dots$$

Définition : Un foncteur de Mackey est un foncteur additif $h\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G)^{op} \to \mathrm{Ab}$.

$$\mathrm{Mack}_G(\mathrm{Ab}) := \mathrm{Fun}^{\times}(h\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G)^{op}, \mathrm{Ab})$$

Plus généralement, pour $\mathcal{C}$ avec $\times$ finis,

$$\mathrm{Mack}_G(\mathcal{C}) := \mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G)^{op}, \mathcal{C})$$

Definition : $\mathrm{Sp}^G := \mathrm{Mack}_G(\mathrm{Sp})$

$$= \mathrm{Fun}^{\oplus}(\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G)^{op}, \mathrm{Sp})$$

Rq : Si $\mathcal{C}$ est présentable, on a

$$\mathrm{Mack}_G(\mathcal{C}) = \mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G)^{op}, \mathcal{C}) = \mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G)^{op}, \mathbb{S}) \otimes \mathcal{C}$$

On note $\mathrm{Fin}_{G,*}$ la sous-catégorie pleine de $(\mathrm{Fin}_G)_{*/}$ dont les objets sont les

$$X \sqcup \{*\}$$

Fun

On a un foncteur canonique

$$i : \mathrm{Fin}_{G,+} \longrightarrow \mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G)$$
$$X \sqcup \{*\} =: X_+ \longmapsto X$$
$$f : X_+ \to Y_+ \longmapsto X \hookleftarrow f^{-1}(Y) \xrightarrow{f} Y$$

qui induit

$$\mathcal{P}_\Sigma(i) : \mathcal{P}_\Sigma(\mathrm{Fin}_{G,+}) \longrightarrow \mathcal{P}_\Sigma(\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G))$$
$$\mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{Fin}_{G,+}^{op}, \mathcal{S}) \simeq \mathcal{S}_{G,\bullet}$$

Définition: On définit $\Sigma^{\infty,G} : \mathcal{S}_{G,\bullet} \longrightarrow \mathrm{Sp}^G$ comme la composée :

$$\mathcal{S}_{G,\bullet} \to \mathcal{P}_\Sigma(\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G)) \longrightarrow \mathrm{Sp}^G = \mathrm{Sp}\big(\mathcal{P}_\Sigma(\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G))\big)$$

Rq : la t-structure sur les spectres induit une t-structure sur Sp^G.

et $(\mathrm{Sp}^G)^\heartsuit = \mathrm{Mack}_G(\mathrm{Sp}^\heartsuit)$

$$= \mathrm{Mack}_G(\mathrm{Ab}).$$

Définition: $Rep_{\mathbb{R}}^{f.d}(G)$ catégorie des représentations réelles de dim finies de G.

$RO(G) :=$ anneau de Grothendieck de $Rep_{\mathbb{R}}^{f.d}(G)$.

$RO(G)$ est le quotient du $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $[V]$, $V \in Rep_{\mathbb{R}}^{f.d}(G)$ par les relations

$$[V \oplus W] - [V] - [W].$$

$[V] \cdot [W] = [V \otimes W]$.

Exemple: Pour $G = C_2 = Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$,

$RO(G) \simeq \mathbb{Z}[\xi]/(\xi^2 - 1)$, où ξ s'identifie à la classe de la représentation signe.

Si $\rho : G \to GL(V)$ est une rep. réelle, on note
de dim. finie

$$S^\rho \quad (\text{ou } S^V)$$

le compactifié en un point de V, pointé par 0. On a $S^\rho \in \mathcal{S}_{G,\bullet}$.

Exemple: Pour $G = Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$,

$$S^{triv} \simeq S^1$$

$$S^{\xi} \simeq S^1 \quad \text{où } \sigma \cdot z = -\bar{z}$$

Rq: $Span(Fin_G)$ a une structure monoïdale symétrique via

$$(x, y) \longmapsto x \times y.$$

Les spectres ont la structure monoïdale du $\wedge$-produit, donc

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G)^{op}, \mathrm{Sp})$$

a une structure monoïdale par convolution de Day.

Formule :

$$\underline{M} \otimes \underline{N}(X) = \operatorname{colim}_{A \times B \to X} M(A) \wedge N(B).$$

cette structure en induit une sur $\mathrm{Mack}_G(\mathrm{Sp})$.

Définition : $\underline{M} \in \mathrm{Mack}_G(\mathrm{Ab})$

$X \in S_G$

$V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}^{f.d}(G)$

ou $V \in RO(G)$

$$H^V_{Br,G}(X; \underline{M}) := \pi_0 \mathrm{Map}_{Sp^G}(\Sigma^{\infty,G}(S^V \wedge X_+), \underline{M})$$

II Complexe de Bredon

Notations : . $G = Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{Id, \sigma\}$.

. G-Man : catégorie des G-variétés lisses, (var. réelles $\mathcal{E}^{\infty}$).

. Pour $X \in G$-Man, $X_{éq}$: catégorie ouverts $(X)/X$, recouvrements : recouvrement par des ouverts G-stable.

. Pour $X \in G$-Man, $\hat{X}$: catég. des revêtement finis $Y \to X$ G-équiv.

. $An/_{\mathbb{C}}$: Variétés complexes holomorphes.

$Sm/_{\mathbb{C}}$: Variétés alg. lisse complexes

$Sm/_{\mathbb{R}}$: Variétés alg. lisses réelles.

Définition: Une var. hol. Réelle est un couple (M, φ)

où : – $M \in An_{\mathbb{C}}$.

– $\varphi : M \to M$ involution anti-holomorphe

$An_{/\mathbb{R}}$: Catégorie des variétés holomo. Réelles.

Rq: On a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, maps to] & Sm_{/\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & Sm_{/\mathbb{R}} \arrow[d] & X \arrow[d, maps to] \\ X(\mathbb{C})_{an.} & An_{/\mathbb{C}} \arrow[r, "F"'] & An_{/\mathbb{R}} & X(\mathbb{C}). \end{tikzcd}$$

où

$F : M \mapsto M \sqcup \bar{M}$

Définition: Un préfaisceau de Mackey sur G-Mon est

- un foncteur $M : G\text{-Mon}^{op} \to Ab$.
- $\forall f : X \to Y \in \hat{Y}$,

$$f_* : M(X) \longrightarrow M(Y)$$

tel que si

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi \in \hat{X}"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

alors

$$\begin{tikzcd} M(E') \arrow[d, "\pi'_*"'] & M(E) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "\pi_*"] \\ M(Y) & M(X) \arrow[l, "f^*"] \end{tikzcd}$$

commute.

Rq: De manière équivalente, c'est un foncteur

$$\mathrm{Corr} \longrightarrow Ab$$

où Corr est la sous-cat de Span (G-Man) dont les morphismes sont les

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

tels que $Y \to Z \in \hat{Z}$.

Rq : Soit M un G-module topologique, M définit un prefaisceau de Mackey via

$$\underline{M} : U \mapsto \mathrm{Hom}_{G\text{-Top}}(U, M)$$

$$f : E \to X \rightsquigarrow$$

$$f_* : \phi \mapsto x \mapsto \sum_{e \in f^{-1}(x)} \phi(e)$$

Définition : • $\mathcal{F} : G\text{-}\mathrm{Man}^{op} \to \mathrm{Ab}$
• $\underline{M}$ préf. de Mackey : avec transferts.

$$\mathcal{F} \int \underline{M} : G\text{-}\mathrm{Man}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ab}$$
$$X \longmapsto \mathcal{F} \underset{\hat{X}}{\otimes} \underline{M} \cong \int^{Y \in \hat{X}} \mathcal{F}(Y) \otimes \underline{M}(Y)$$

Rq : "Explicitement" :

$\int^{Y \in \hat{X}} \mathcal{F}(Y) \otimes M(Y)$ est le quotient de

$$\bigoplus_{Y \in \hat{X}} \mathcal{F}(Y) \otimes M(Y) \quad \text{par}$$

$$\phi^*_{\mathcal{F}} x \otimes m - x \otimes \phi_* m \quad \text{pour}$$
$\phi : Y \to Y'$ dans $\hat{X}$.

Dans la suite : $A \subseteq \mathbb{R}$ sous anneau, muni de la topo discrète et de la G-action triviale.

Définition: Pour $X \in G\text{-}Man$,

$U \in G\text{-}Man_{corner}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$C^{-n}(\mathbb{Z}X)(U) := \mathbb{Z}[Hom_{G\text{-}Man_{Coin}}(\Delta^n \times U, X)]$$

Définition: $(\mathbb{C}^\times)^{n-1}_i \subseteq (\mathbb{C}^\times)^n$ est

$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \underset{i\text{-ème}}{\times \times 1 \times} \times \mathbb{C}^\times$.

$$C^*(\mathbb{Z}_0(S^{n,n} \wedge X_+))$$

$$\parallel$$

$$\mathrm{Coker}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} C^*(\mathbb{Z}((\mathbb{C}^\times)^{n-1}_i \times X)) \longrightarrow C^*(\mathbb{Z}((\mathbb{C}^\times)^n \times X))\right)$$

Definition: $A(n)_{Br} := C^*(\mathbb{Z}_0(S^{n,n})) \otimes \underline{A}[-n]$

$A \subseteq \mathbb{R}$

Théorème:

$$\check{H}^n(X_{eq}, A(\uparrow)_{Br}) \simeq H^{n,\uparrow}_{Br}(X, \underline{A}).$$

$$\shortparallel$$

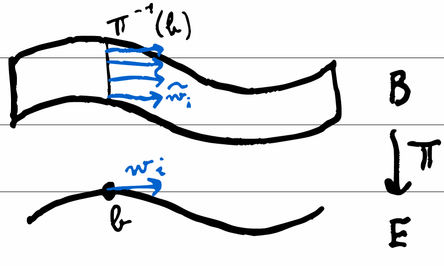
$$H^{n+\uparrow\cdot g}_{Br}(X, \underline{A}).$$

Rappel: Pour $\pi : E \to B$ fibré loc. triv sur B lisse à fibr. des var à coins compactes or. de dim n,

$$\pi_! : \mathcal{A}^{p+n}(E) \to \mathcal{A}^p(B)$$

$$\pi_!(\omega)_b(w_1, -, w_p) = \int_{\pi^{-1}(b)} \omega(v_1, -, v_n, \tilde{w}_1, -, \tilde{w}_p)\, dv_1 \dots dv_n.$$

où $\tilde{w}_i$ lift w_i



Formulaire :

- $\pi_!(\pi^*\theta \wedge \omega) = \theta \wedge \pi_!(\omega)$

- $d\pi_!(\omega) = \pi_! d\omega + (-1)^n \pi'_!(\omega_{|\partial E})$

  $\pi' : \partial E \to B.$

- chgt de base : $f^*\pi_! = \pi'_! f'^*$
$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

- $(g\circ f)_! = g_! \circ f_!$

- Produit : pour
$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, "\pi''"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ E \arrow[r, "\pi"'] & B \end{tikzcd},$$

$$\pi_!(e^*\omega \wedge e'^*\omega') = (-1)^{nq}\pi_!(\omega) \wedge \pi'_!(\omega').$$

où $n = \mathrm{reldim}(\pi)$, $q = \deg(\omega') - \mathrm{reldim}(\pi')$.

$$\tau^* : A(p)_{B_n} \longrightarrow \mathcal{E}^*$$

où $\mathcal{E}^* = \{ \Theta \in \mathcal{A}^* \mid \overline{\sigma^* \Theta} = \Theta \}$

formes différentielles
à cœff. complexe.