∞-topoï équivariants

Rappel : Redressement

$\mathcal{C}$: ∞-catégorie.

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Cat}_\infty$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\begin{tikzcd} \int F \arrow[d, "\pi"'] \\ \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

obj : (c, x), $c \in \mathcal{C}$, $x \in F(c)$

flèche :
$$\begin{tikzcd} & F(c) \arrow[d, "F(f)"] \\ \bullet \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "x'"'] \arrow[r, phantom, "\Swarrow"] & F(c') \end{tikzcd}$$

Thm (Lurie) : $F \mapsto \int F$ induit

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Cat}_\infty) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cocart}_{/\mathcal{C}}$$

Théorie des ∞-catégorie interne :

$\mathcal{X}$: ∞-topos.

Definition: $\mathrm{Cat}_\infty(\mathcal{X}) := \mathrm{Sh}(\mathcal{X}, \mathrm{Cat}_\infty)$

$$\simeq \mathcal{X} \otimes \mathrm{Cat}_\infty$$

$$\simeq \mathrm{Fun}^{\lim}(\mathcal{X}^{op}, \mathrm{Cat}_\infty).$$

Exemple: Si $\mathcal{X} = \mathrm{Psh}(C)$,

$$\begin{array}{c} \mathrm{Fun}^{\lim}(\mathcal{X}^{op}, \mathrm{Cat}_\infty) \\ \downarrow \wr \\ \mathrm{Fun}(C^{op}, \mathrm{Cat}_\infty) \\ \downarrow \wr \\ \mathrm{Cart}_{/C} := \mathrm{cocart}_{/C^{op}}. \end{array}$$

Pour $x \in \mathcal{X}$, $\mathcal{E} \in \mathrm{Cat}_\infty(\mathcal{X})$, $c \in \mathcal{E}(x)$ est un "objet en contexte x".

Exemple : $\mathcal{SH}$ est une catégorie interne à $Sh_{Nis}(Sm_S)$...

Slogan : Faire de l'homotopie "genuine" G-équivariante, c'est faire de la théorie des catégories internes à $\mathcal{S}_G \simeq Fun(\mathcal{O}_G^{op}, \mathcal{S})$

∞ - G - topoï :

Rappel : • Top^R : ∞-cat des ∞-topoï, morphismes $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$: adj à droite dont l'adj à gauche prés les lim finies.

• Top^L : ∞-cat des ∞-topoï, morph. $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$: adj à gauche preservant les lims finis.

• $\forall C$, $[\mathcal{S}, Top^R] \xrightarrow{\simeq} [\mathcal{S}^{op}, Top^L]$

$\;\;\wr\!\wr \qquad\qquad (-)^{+}$

$\pi_0(Fun(\mathcal{S}, Top^R))$

G fini

Definition: $\mathrm{Top}^R_G := \mathrm{Fun}(BG, \mathrm{Top}^R)$.

$$\mathrm{Top}^L_G := \mathrm{Fun}(BG, \mathrm{Top}^L)$$

$$\mathrm{Fun}(BG, \mathrm{Top}_R)^{op} \simeq \mathrm{Fun}(BG^{op}, \mathrm{Top}_R^{op}) = \mathrm{Fun}(BG, \mathrm{Top}^L)$$

Rq: Par redressement, on retrouve les topoi fibré.

Si $\mathcal{X}$ est un G-topos

abélien (toposique)

$$\mathcal{X}_{h_\circ G} := \mathrm{Colim}(\mathcal{X} : BG \to \mathrm{Top}^R).$$

$$\simeq \lim(\mathcal{X}^\dagger : BG \to \mathrm{Top}^L)$$

$$\simeq \mathrm{Fun}_{/BG}\left(BG, \int \mathcal{X}^\dagger\right)$$

$\rightsquigarrow$ G-objet de $\mathcal{X}$ au sens de Scheiderer.

. On peut "internaliser" la construction:

$$\mathcal{X}_{h_\square(-)} : \mathcal{O}_G \longrightarrow \mathrm{Top}^R$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\Vert$

LKE de $\mathcal{X} : BG \to \mathrm{Top}^R$ le long de $BG \subseteq \mathcal{O}_G$

Rq : $\forall H \leq G$,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_H &\longrightarrow (\mathcal{O}_G)_{/(G/H)} \\ H/K &\longmapsto (G/K \to G/H) \end{aligned}$$

$$\left(H/K \xrightarrow{\varphi} H/K'\right) \longmapsto \begin{tikzcd} G/K \arrow[rr, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr] & & G/K' \arrow[dl] \\ & G/H & \end{tikzcd}$$

est une équivalence.

$\rightsquigarrow$

$$\mathcal{X}_{h_\square(-)} : G/H \longmapsto \mathrm{Fun}_{/BG}\left(BH, \textstyle\int \mathcal{X}^+\right).$$

Exemple : Si X tq $1/2 \in \mathcal{O}_X^\times$,

$$\Big(\underbrace{\widehat{X[i]_{et}}}_{X'}\Big)_{h_\square C_2} = \widetilde{X}_{et}, \quad \text{"Descente galoisienne".}$$

• Points fixes topoïques :

$$\mathcal{X}^{h_\diamond G} := \lim\left(\mathcal{X} : BG \longrightarrow \mathrm{Top}^R\right).$$

⚠ $\mathrm{Top}^R \subseteq \widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$ ne preserve pas les limites

(2,1) des 1-topoï

Fait (Lurie) : Top_1^R s'identifie à une sous-cat reflexive de Top^R.
i.e "l'inclusion" a un adj à gauche.

$$\mathrm{Top}_1^R \hookrightarrow \mathrm{Top}^R$$

$\tau_{\leq 0}(\mathcal{X}^{h_\diamond G})$ s'identifie au fixtopos. de Scheiderer !

• Si X espace topologique avec G action, $\widehat{\mathrm{opens}(X)}^{h_\diamond G} = \widehat{\mathrm{opens}(X^G)}$

• $\left(\widehat{X[i]_{et}}\right)^{h_\diamond C_2} = \widetilde{X}_{r\acute{e}t}$.

- encore une fois, la construction s'internalise :

$$\mathfrak{X}^{h_0(-)} : \mathcal{O}_G^{op} \longrightarrow \mathrm{Top}^R, \text{ RKE de}$$

$$\text{le long de } BG^{op} \hookrightarrow \mathcal{O}_G^{op}$$

Pour $\mathfrak{X} = \widetilde{\mathrm{Opens}(X)}$, on retrouve

"$G/H \mapsto X^H$".

- <u>Orbites</u> "<u>genuine</u>" :

- <u>Fait</u> (Aror-Farjoun) : Si X est un G-espace topologique (avec au moins un pt fixe), alors $\forall\, H \leq G$.

$$X_{/H} = \underset{K \in \mathfrak{S}_H}{\mathrm{Colim}}\, X^K \text{ dans } \mathcal{S}.$$

- Soit $\underset{\sim}{\mathfrak{X}}^{h_0} \longrightarrow \mathcal{O}_G^{op}$ la fibr cartésienne classifiant $(\mathfrak{X}^{h_0(-)})^+$

Définition :

$$\mathcal{X}_{(-)} := G/H \longmapsto \underset{G_H^{op}}{\text{lax colim}}\ \mathcal{X}^{h_\square(-)}\Big|_{G_G^{op}/(G/H)} .$$

$$\mathcal{X}_{G/G} = \mathrm{Sect}_{G_G}\left(\mathcal{X}^{h_\square(-)}\right)$$
$$\| $$
$$\mathcal{X}_G$$

Exemple : $\mathcal{X} = \mathcal{S}$, action triviale de G (« Point avec action triviale »). Alors

$$\mathcal{X}_G = \mathcal{S}_G .$$

$$\mathcal{X}_{(-)} : G/H \longmapsto \mathcal{S}_H$$

Proposition : Si $G = C_p$, on a un recollement :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_{h_\square C_p} \arrow[r, hook, shift right, "j_*"'] & \mathcal{X}_{C_p} \arrow[l, shift right, "j^*"'] \arrow[r, shift left, "i^*"] & \mathcal{X}^{h_\square C_p} \arrow[l, hook', shift left, "i_*"] \end{tikzcd}$$

où le foncteur de recollements s'identifie à

$$\mathcal{X}_{h_\square C_p} \to \left(\mathcal{X}^{h_\square C_p}\right)_{h_\square C_p} \simeq \mathrm{Fun}(B\mathbb{C}_p, \mathcal{X}^{h_\square C_p}) \to \mathcal{X}^{h_\square C_p}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{X}_{C_p}$ est le topos quotient de Scheiderer !

Exemple : $\left(\widetilde{X[i]_{et}}\right)_{C_2} \simeq \tilde{X}_b$.

$$Sp^G = \mathrm{Fun}^\times(\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G), Sp) \neq Sp(S_G)$$

G-stabilisation des ∞-topoi

Déf : Soit $\mathcal{F} \in \mathrm{Cat}_\infty(S_G)$. $\mathcal{F}$ admet les G-coproduits (resp. G-produits) finis si

1) $\forall f : U \to V \in \mathrm{Fin}_G$, $f^* : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ a un adj à gauche $f_!$ (resp. à droite f_*)

2) $\forall$ carré cartésien

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & U \arrow[d, "f"] \\ V' \arrow[r, "g"'] & V \end{tikzcd}$$

des Fin_G,

$f_! g'_* \xrightarrow{\sim} g^* f_!$ (resp. $f^* g_* \xrightarrow{\sim} g'_* f'^*$).

- $\mathcal{F}$ est "G-semi-additive" si $\mathcal{F}$ est pointé (i.e $\mathcal{F}(X)$ a un objet 0 préservé par les restr $\forall X$) et

$$f_! \xrightarrow{\sim} f_* \quad \forall f.$$

ds G pr coproduits et G-produits

- $\mathcal{F}$ est "G-stable" si
  - $\forall X$, $\mathcal{F}(X)$ est stable et les restr sont exactes
  - $\mathcal{F}$ est G-semi-additive.

- **Remarques :**
  - $\mathrm{CMon}(\mathcal{S}) \underset{B^\infty}{\overset{\Omega^\infty}{\underset{\top}{\rightleftarrows}}} \mathrm{Sp}^{\geq 0}$
  - $\mathrm{Sp} = \mathrm{Sp}(\mathrm{Sp}^{\geq 0})$
  - $\mathrm{CMon}(\mathcal{S}) \simeq \mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}), \mathcal{S})$.

⇝ On peut définir :

$$\underline{\mathrm{Fin}}_G : \mathcal{O}_G^{op} \to \mathrm{Cat}_\infty$$
$$G/H \mapsto \mathrm{Fin}_H$$

$$\underline{\mathrm{Fin}}_{G,+}$$

$$\mathrm{Span}(\underline{\mathrm{Fin}}_G) : G/H \mapsto \mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_H)$$

$$\underline{\mathrm{CMon}}_G(\mathcal{E}) := \underline{\mathrm{Fun}}^{\times}_G(\mathrm{Span}(\underline{\mathrm{Fin}}_G), \mathcal{E})$$

avec G-produits finis

Si $\mathcal{X}$ est un G-topos, on définit

stab terme à terme

$$\underline{\mathrm{Sp}}^G(\mathcal{X}) := \underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathrm{CMon}}_G(\mathcal{X}_G))$$

Rq : Pour $\mathcal{X} = \mathcal{S}$, avec action triviale :

$$\underline{\mathrm{Sp}}^G(\mathcal{X}) : G/H \mapsto S_H$$

$$\mathrm{Sp} \otimes \underline{\mathrm{CMon}}_G(\mathcal{X}_G)$$

Théorème (Nardin) : On a une

S_G-adjonction

$$\underline{Sp}^G(\mathcal{X}) \underset{\Sigma^\infty_+}{\overset{\Omega^\infty}{\rightleftarrows}} \underline{\mathcal{X}}_G$$

et Ω^∞ est universel parmi les foncteurs G-exacts à gauche d'une S_G-catégorie G-stable dans $\underline{\mathcal{X}}_G$.