GdT HQDIAG - La suite exacte fondamentale 04.03.2022

Motivation : si $X/\mathbb{R}$ schéma de type fini, et M groupe abélien fini, $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) = \{1, \sigma\}$, on a une suite exacte longue

$$\cdots \to H^n_{sing}(\underbrace{X_\infty}_{:= X(\mathbb{C})/G}, X(\mathbb{R}), M) \to \underbrace{H^n_G(X(\mathbb{C}), M)}_{\boxed{H^n_{\acute{e}t}(X, M)}} \to H^n_G(X(\mathbb{R}), M) \to \cdots$$

$\wr\wr(G_0 x)$

→ **But** : retrouver cette suite exacte longue sans méthodes transcendantes.

Contexte : X schéma tq $\boxed{\frac{1}{2} \in \mathcal{O}(X)}$, $X' := X[\sqrt{-1}]$, $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \Rightarrow \tilde{X}_{\acute{e}t} \xrightarrow{\nu} \tilde{X}'_{\acute{e}t} \xrightarrow{\pi} \tilde{X}_{\acute{e}t}$

exposé précédent — induit par $\pi : X' \to X$

G-objets dans $\tilde{X}'_{\acute{e}t}$: $G \curvearrowright X' \Rightarrow$ "action de G sur $\tilde{X}'_{\acute{e}t}$"

au sens que $\forall g \in G$, $\exists\, (g^*, g_*) : \tilde{X}'_{ét} \to \tilde{X}'_{ét}$ et $\forall g, h \in G$, isomorphismes $c_{h,g} : h^* g^* \simeq (gh)^*$ satisfaisant "une condition de cocycle"

<u>Concrètement</u> : $B \in \tilde{X}'_{ét}$, $V \to X'$ étale, $(g^*B)(V) = B(gV)$

$(g_*B)(V) = B(g^{-1}V)$ où gV est le X'-schéma $V \to X' \xrightarrow{g} X'$

catégorie des G-objets dans $\tilde{X}'_{ét} := \tilde{X}'_{ét}(G)$ avec objets $(x, \{\varphi_g\}_{g \in G})$ tq $x \in \tilde{X}'_{ét}$, $\varphi_g : x \xrightarrow{\sim} g^* x$ tq $\forall g, h \in G$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\varphi_h"] \arrow[d, "\varphi_{gh}"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & h^* x \arrow[d, "h^*(\varphi_g)"] \\ (gh)^* x & h^* g^* x \arrow[l, "c_{h,g}"'] \end{tikzcd}$$

G-objets dans $\tilde{X}_{rét}, \tilde{X}_{ét}$:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{X}_{rét}(G) = \\ \tilde{X}_{ét}(G) = \end{array}\right\} \text{objets } x \text{ munis d'un homomorphisme } G \to \mathrm{Aut}(x)$$

But : obtenir un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_{\text{rét}} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \tilde{X}'_{\text{ét}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \tilde{X}_{\text{ét}} \arrow[d] \\ \tilde{X}_{\text{rét}}(G) \arrow[r, "\nu(G)"] & \tilde{X}'_{\text{ét}}(G) \arrow[r, "\pi(G)"] & \tilde{X}_{\text{ét}}(G) \end{tikzcd} \quad (D)$$

§1. G-topos et le diagramme (D)

§2. Cohomologie G-équivariante et suite exacte fondamentale

§3. Identification des termes dans la suite exacte

§1.

Déf. Soit G un groupe, BG catégorie associée $\left(\begin{array}{l} \mathrm{Ob}\, BG = \{*\} \\ \mathrm{End}_{BG}(*) = G \end{array}\right)$

Un G-topos est un topos fibré $\mathcal{E} \xrightarrow{p} BG$, i.e. une catégorie fibrée sur BG tq sa fibre $E := p^{-1}(*)$

est un topos et $\forall g \in G$, $g^* : E \to E$ préserve les limites finies et les colimites. ($\Rightarrow (g^*, g_*) : E \to E$)

<u>Ex.</u> 1) $\tilde{X}'_{ét}$ est la fibre d'un G-topos $\tilde{\mathcal{X}}'_{ét}$

$\mathrm{Ob}\, \tilde{\mathcal{X}}'_{ét} = \mathrm{Ob}\, \tilde{X}'_{ét}$

$\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{X}}'_{ét}}(y, x) = (g, \alpha : y \to g^* x)$ $\quad g \in G$, $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\tilde{X}'_{ét}}(y, g^* x)$

$$(g, \alpha) \circ (h, \beta) = (gh, c_{h,g} \circ h^*(\alpha) \circ \beta)$$

$\alpha : y \to g^* x \quad \beta : z \to h^* y$

$$\begin{tikzcd} z \arrow[rr] \arrow[d, "\beta"'] & & (gh)^* x \\ h^* y \arrow[rr, "h^*(\alpha)"'] & & h^* g^* x \arrow[u, "c_{h,g}"'] \end{tikzcd}$$

2) Si E topos, le <u>G-topos trivial</u> associé à E est $E \times BG \to BG$ de fibre E.

(On verra $\tilde{X}_{rét}$, $\tilde{X}_{ét}$ comme fibre d'un G-topos trivial).

<u>Déf.</u> Si $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Y}$ sont deux G-topos de fibre E, F, alors

Un morphisme de G-topos $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est un foncteur $\mathcal{F} \xrightarrow{\mu} \mathcal{E}$ tq sa fibre est la partie image inverse d'un morphisme de topos

$m = (m^*, m_*) : E \to F$.

Concrètement : se donner $\mu : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ $\Leftrightarrow$ se donner $m : E \to F$ $+ \{b_g : m^* g^* \simeq g^* m^*\}_{g \in G}$ faisant commuter un diagramme "évident"

Déf. Si $\mathcal{E} \to BG$ est un G-topos, la catégorie des G-objets (fibre E) dans $\mathcal{E}$ est $E(G) := \underline{\mathrm{Hom}}_{BG}(BG, \mathcal{E})$.

Obs: 1) On récupère les catégories de G-objets définies avant.

2) Si $\mathcal{E}$ est un G-topos de fibre E, il y a un foncteur canonique ($E(G) \times BG \to \mathcal{E}$ (foncteur d'oubli sur les objets) étant l'image inverse d'un morphisme de G-topos $\mathcal{E} \to E(G) \times BG$.

Si $\mathcal{E} = E \times BG$ topos trivial associé à E. Alors la fibre de ce morphisme $\boxed{I \xrightarrow{q_E} E(G)}$ est tq
• q_E^* foncteur d'oubli
• $q_{E,*} : x \longmapsto \prod_{g \circlearrowright G} x$

De plus, $\exists$ $E(G) \xrightarrow{r_E} E$ tq $r_E \circ q_E = id$

$r_E^* :=$ "mettre l'action trivial"

$r_{E,*} : x \longmapsto x^G$ (G-invariants)

(On applique cela à $\tilde{X}_{rét}$, $\hat{X}_{ét}$ $\Rightarrow$
$\tilde{X}_{rét} \xrightarrow{q_{rét}} \tilde{X}_{rét}(G)$
$\hat{X}_{ét} \xrightarrow{q_{ét}} \hat{X}_{ét}(G)$)

Si $\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{X}}'_{ét}$, la fibre du morphisme $\mathcal{E} \to E(G) \times BG$ s'identifie à $\tilde{X}'_{ét} \xrightarrow{\pi} \tilde{X}_{ét}$ via $\tilde{X}'_{ét}(G) \simeq \tilde{X}_{ét}$

descente étale

($\frac{1}{2} \in \mathcal{O}(X) \Rightarrow \pi : X' \to X$ étale finie galoisienne de groupe G)

3) Si on a un morphisme de G-topos triviaux $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ correspondant à $m : E \to F$, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "m"] \arrow[d, "q_E"'] & F \arrow[d, "q_F"] \\ E(G) \arrow[r, "m(G)"'] & F(G) \end{tikzcd}$$

$\forall y \in \mathrm{Ob}\, F$

- $m(G)^* : (y, \{\psi_g\}_g) \longmapsto (m^* y, \{\varphi_g\}_g)$

$\psi_g : y \xrightarrow{\sim} g^* y$ $\qquad$ $\varphi_g : m^* y \to g^* m^* q$

$$\begin{tikzcd} m^* y \arrow[r] \arrow[dr, "m^*(\psi_g)"'] & g^* m^* q \\ & m^* g^* y \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

morphisme de G-topos

- $m(G)_* : \ldots$

Lemme. Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_{\text{rét}} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "q_{\text{rét}}"] & \tilde{X}'_{\text{ét}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"] & \tilde{X}_{\text{ét}} \arrow[d, "q_{\text{ét}}"] \\ \tilde{X}_{\text{rét}}(G) \arrow[r, "\nu(G)"] \arrow[u, bend left, dashed, "r_{\text{rét}}"] & \tilde{X}_{\text{ét}} \arrow[r, "\pi(G)"] & \tilde{X}_{\text{ét}}(G) \arrow[u, bend right, dashed, "r_{\text{ét}}"'] \end{tikzcd}$$

vérifiant : 1) $r_{rét} \circ q_{rét} = id = r_{ét} \circ q_{ét} = r_{ét} \circ \pi(G)$

2) si $\rho : \tilde{X}_{ét} \to \tilde{X}_{rét}$ foncteur de recollement, alors

$$\rho = r_{rét,*} \circ \nu(G)^*$$

3) $\nu(G)^* \simeq \rho(G) \circ \pi(G)_*$ ($\rho(G)$ foncteur induit par ρ sur les G-objets)

Preuve. Existence et commutativité : découlent du formalisme.

1) $r_{ét} \circ \pi(G) \overset{?}{=} id$

$$r_{ét,*} \circ \underbrace{\pi(G)_*}(A) = (\pi_* \pi^* A)^G = A$$

par déf. de faisceau étale appliqué à $U \times_X X'$, $U \to X$

$A \in \tilde{X}_{ét}$, $\pi(G)_* A = \pi_* \pi^* A$

$U \to X$ étale, $\pi_* \pi^* A(U) = A(U \times_X X'|_X)$

G par $1 \times \sigma$

3) Rappelons que $\nu^* = \rho\pi_*$.

ρ exact à gauche

2) $r_{ét,*}\, {}'y(G)^* = r_{ét,*} \circ \rho\,\pi(G)_* = (\rho\,\pi(G)_*)^G = \rho(\pi(G)_*)^G$

$\underset{1)}{=} \rho$. $\square$

§2.

NOTATIONS. (Topos E, groupe G)

Considérons le morphisme $E \xrightarrow{\varphi_E} E(G)$, $E \xleftarrow{r_E} E(G)$

→ foncteur induit par $r_{E,*}$ (additif, exact à gauche)

$$Ab_G(E) \xrightarrow{\Gamma_G} Ab(E)$$
$$A \longmapsto A^G$$

→ foncteurs dérivés

$$Ab_G(E) \longrightarrow Ab(E)$$
$$A \longmapsto \mathcal{H}^n_G A := R^n\Gamma_G(A)$$

$\Rightarrow$ pour $x \in E$, $\quad Ab_G(E) \xrightarrow{\Gamma_G(x,-)} Ab$

$$A \longmapsto \boxed{\underline{Hom}_E(x, A)^G}$$

$\Rightarrow$ <u>foncteurs dérivés</u> $\quad Ab_G(E) \to Ab$

$$A \longmapsto H^n_G(x, A) := R^n\Gamma_G(x,-)(A)$$

<u>groupes de cohomologie G-équivariante</u>

$\Rightarrow$ suites spectrales (de Hochschild-Serre) $\quad (A \in Ab_G(E))$

$$E_2^{p,q} = H^p(x, \mathcal{H}^q_G(A)) \Rightarrow H^{p+q}_G(x, A)$$

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(x, A)) \nearrow$$

<u>Théorème</u>. (Suite exacte fondamentale)

(Soit X schéma avec 2 inversible, $X' = X[\sqrt{-1}]$, $G = Gal(\mathbb{C}|\mathbb{R})$

Pour tout $A \in \tilde{X}_{ét}$, on a une suite exacte courte

$$(*)\ 0 \to j_! \pi(G)_* A \to j_* \pi(G)_* A \to i_* \nu(G)^* A \to 0$$

dans $Ab_G(\tilde{X}_b)$, où $j : \tilde{X}_{ét} \hookrightarrow \tilde{X}_b \hookleftarrow \hat{X}_{rét} : i$

induisant une suite exacte longue (fonctorielle en A)

$$\dots \to \boxed{H^n(X_b, \boxed{j_! A})} \to H^n(X_{ét}, A) \to \boxed{H^n_G(X_{rét}, \nu(G)^* A)} \to \dots$$

Preuve. · La suite exacte courte $(*)$ est la suite exacte de foncteurs $j_! \to j_* \to i_* \underbrace{i^* j_*}_{\rho}$ appliquée à $\pi(G)_* A$.

(rappelons $\nu(G)^* = \rho \pi(G)_*$).

· On applique $H^n_G(\dots)$ et on obtient

$$\dots \to \boxed{H^n_G(X_b, j_! \pi(G)_* A)} \to H^n_G(X_b, j_* \pi(G)_* A) \to H^n_G(X_b, i_* \nu(G)^* A) \to \dots$$

1er terme : Observons que $\mathcal{H}^0_G(j_!\pi(G)_*A) = j_!A$.

En fait, $\mathcal{H}^0_G(j_!\pi(G)_*A) = (j_!\pi(G)_*A)^G \underset{j_! \text{ exact}}{=} j_!(\pi(G)_*A)^G \underset{\text{Lemme}}{=} j_!A$.

Il suffira alors de prouver $\mathcal{H}^n_G(j_!\pi(G)_*A) = 0 \ \forall n > 0$

(via la suite spectrale de HS).

On le prouve par passage aux fibres. Soit $\alpha : x \to X$ un k-point de X.

Claim. Si G est de type fini, et E un G-topos, alors pour tout foncteur fibre $p^* : E \to \underline{\mathrm{Ens}}$ on a $p^*\mathcal{H}^n_G(A) \simeq H^n(G, p^*A)$ $\forall A \in Ab_G E$, $\forall n \geq 0$.

Alors $\mathcal{H}^n_G(j_!\pi(G)_*A)_\alpha = H^n(G, (j_!\pi(G)_*A)_\alpha)$

$\underline{\alpha \text{ est réel}} \Rightarrow$ le groupe à droite est trivialement nul.

$\underline{\alpha \text{ est étale}} \Rightarrow (j_!\pi(G)_*A)_\alpha = (\pi(G)_*A)_\alpha \simeq A_\alpha \times A_\alpha \simeq$

$\pi(G)_*A = \pi_*\pi^*A$ $\qquad G \curvearrowright (a,b) \mapsto (b,a)$

$\simeq A_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G$ ($\mathbb{Z}G$-module induit).

Or $H^n(G, A_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G) = 0$ (résultat classique découlant du lemme de Shapiro).

2ème terme

$$H^n_G(X_b, j_* \pi(G)_* A)$$

$$\mathcal{H}^p(X_b, \mathcal{H}^q_G(j_* \pi(G)_* A)) \Rightarrow$$

j_* exact à gauche

$$\underbrace{\mathcal{H}^0_G(j_* \pi(G)_* A)} = (j_* \pi(G)_* A)^G \simeq j_*(\pi(G)_* A)^G = \boxed{j_* A}$$

$$H^*(X_b, Rj_* A) = H^*_{ét}(X, A)$$

$$R(\Gamma_G \circ j_* \pi(G)_*) = Rj_*$$

$$\|$$

$R\Gamma_G \circ j_* \pi(G)_*$ car $\underline{j_* \pi(G)_* \text{ exact}}$ ($j_* \pi_*$ exact, $\pi(G)_* = \pi_* \pi^*$)

3ème terme i_* est exact. $\square$