Théoreme(s) de Bachmann

06/05/22

Thm 35 : Soit S un schéma noetherien de dim finie.

On a des équivalences :

$$\begin{tikzcd}
SH(S_{ret}) \arrow[r] \arrow[d] & SH^{S^1}_{ret}(S)[\rho^{-1}] \arrow[d] & SH^{S^1}(S)[\rho^{-1}] \arrow[l] \arrow[d] \\
SH_{ret}(S) \arrow[r, shift left] & SH_{ret}(S)[\rho^{-1}] \arrow[l, shift left] & SH(S)[\rho^{-1}] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Idem en remplaçant SH par $D_{\mathbb{A}^1}$

+ formalisme des 6 foncteurs

Mieux (Bachmann, '21)

Soit S un schéma quelconque

On a

$$SH(S)[\rho^{-1}] \simeq SH_{rét}(S) \simeq SH^{S'}_{ret}(S)$$

En particulier, $\rho : S^{\circ} \to \mathbb{G}_m \in SH^{S'}_{ret}(S)$ est une équivalence.

Lem 27 : On a des équivalences

$\cancel{SH(S_{ret})}$

$$SH^{S'}(S)[\rho^{-1}] \simeq SH(S)[\rho^{-1}]$$

$$SH^{S'}_{ret}(S)^{ret}[\rho^{-1}] \simeq SH_{ret}(S)[\rho^{-1}]$$

dem : Par le lem 26, $Spt(SH^{S'}(S)[\rho^{-1}], \mathbb{G}_m)$

$$= Spt(SH^{S'}(S), \mathbb{G}_m)[\rho^{-1}]$$

$$\simeq SH(S)[\rho^{-1}]$$

$$Spt(SH^{S'}(S)[\rho^{-1}], \mathbb{G}_m) \simeq SH^{S'}(S)[\rho^{-1}]$$

car ρ est déjà inversible $\square$

Prop 28 Le pseudo-foncteur

$$X \longmapsto SH(X)[\rho^{-1}]$$

satisfait le formalisme des 6 foncteurs

+ continuité

dem : Ok d'après Cisinski-Déglise.

Continuité :

$$\mathcal{T} = SH(\cdot)[\ell^{-1}]$$

$$\mathcal{T}(S) \simeq \operatorname{colim}_{\alpha} \mathcal{T}(S_\alpha)$$

Prop 29 : Le foncteur

$$SH_{ver}(S) \to SH_{ver}(S)[\rho^{-1}]$$

est une équivalence.

dem : On montre que $\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{1} \vee \Delta$

tel que

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "\rho"] \arrow[rrr, bend right, "Id"'] & \mathbb{G}_m \simeq \mathbb{1} \vee \Delta \arrow[r] & \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

Puis Lem 30 : $\Delta \simeq 0$.

On dit $a \in \mathcal{O}^\times(X)$ est totalement positive si pour tout corps réel clos r et tout morphisme $\alpha : \mathrm{Spec}(r) \to X$,

$$\alpha^*(a) > 0.$$

Ceci définit un sous-préfaisceau $G_+ \subset R_{A'|0}$
(préfaisceau représenté par $A'|0$)

Idem $G_- \subset R_{A'|0}$

Fait : $a_{ner} R_{A'10} = a_{ner} G_+ \amalg a_{ner} G_-$

On définit alors une flèche

$a_{ner} R_{A'10} \to a_{ner} \delta^0 = a_{ner} (* \amalg *)$

envoyant $a_{ner} G_+$ sur $*$

et $a_{ner} G_-$ sur l'autre $*$

D'où le scindage ... $\square$

Prop 31 Soit k corps, $\mathrm{car}(k) = 0$

Alors on a une équivalence

$$SH(k)[\rho^{-1}] \xrightarrow{\sim} SH_{\text{rét}}(k)[\rho^{-1}]$$

dem : $U_\bullet \to X$ un rét-hyperrecouvrement

et soit $\hat{X} = \operatorname{hocolim} \Sigma^\infty U_\bullet \in SH(k)$

On veut montrer que si $E \in SH(k)[\rho^{-1}]$,

alors $[\hat{X}, E] \simeq [X, E]$

On a des suites spectrales

$$(1) \quad H^p_{Nis}(X, \underline{\pi}_{-q}(E)_{-i}) \Longrightarrow [\Sigma^\infty X_+ \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge i}, E[p+q]]$$

$$(2) \quad [\hat{X}, \underline{\pi}_{-q}(E)_{-i}[p]] \Longrightarrow [\hat{X} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge i}, E[p+q]]$$

De plus, on a

$$(3) \quad [U_n, \underline{\pi}_{-q}(E)_{-i}[p]] \Longrightarrow [\hat{X}, \underline{\pi}_{-q}(E)_{-i}[p+n]]$$

On a :

$$[U_n, \underline{\pi}_{-q}(E)_{-i}[p]] = H^p_{Nis}(U_n, \underline{\pi}_{-q}(E)_{-i})$$

$$= H^p_{cdh}(U_n, \underline{\pi}_{-q}(E)_{-i})$$

Puisque E est ρ-local, le module $\underline{\pi}_{-q}(E)_*$ est cdh-faisceau (cf exposé précédent)

Pour tout F ret-faisceau, on a

$$H^p_{ret}(U_n, F) = H^p_{Nis}(U_n, F) \quad \left(\text{[Scheiderer '94 Prop. 19.2.1]} \right)$$

La suite spectrale (3) converge fortement (car $\dim X < +\infty$)

et s'identifie à la suite spectrale en ret-cohomologie pour $U_\bullet$ donc converge vers

$$H^{p+*}_{ret}(X, \underline{\pi}_{-q}(E)_{-i})$$

Ainsi

$$[\hat{X}, \underline{\pi}_q(E)_{-i}[p]] = H^p_{ver}(X, \underline{\pi}_{-q}(E)_{-i})$$

D'après [Sheiderer '94, Prop. 19.2.1], la flèche de (1) vers (2) induit un isomorphisme sur les pages E_2 et donc (1) et (2) converge fortement

D'où l'isomorphisme $[\hat{X}, E] \simeq [X, E]$

$\square$

Prop : Pour tout corps

$$SH(k)[\rho^{-1}] \simeq SH_{nr}(k)(\rho^{-1})$$

dem : $\mathrm{car}(k) = p > 0$, alors ρ est nilpotent.

Par changement de base, wlog $k = \mathbb{F}_p$.

On veut $\rho \in K_1^{MW}(\mathbb{F}_p)$ nilpotent.

$$\rho = -[-1]$$

i.e. $\mathrm{colim}_n\, K_n^{MW}(\mathbb{F}_p) = 0$

On a
$$\operatorname{colim}_n K_n^{MW}(\mathbb{F}_p)$$
cf l'exposé d'avant
$$= \operatorname{colim}_n I^n(\mathbb{F}_p)$$
$$= 0$$
car $I(\mathbb{F}_p)$ est nilpotent (cf Milnor–Huse '73)

$\square$

Autre idée de preuve : k parfait

Lem 39 : $K_*^{MW}(k)[1/2] = K^+ \oplus K^-$

où $K^- = K_*^{MW}(k)[1/2, 1/\eta]$

$\varepsilon = -\langle -1 \rangle$

$\varepsilon^2 = 1$

$= K_*^{MW}(k)[1/2, 1/\rho]$

et $K^+ = K^M(k)[1/2]$ est caractérisé par $\eta K^+ = 0$

Enfin, $\rho^2 = 0$ dans K^+.

On a toujours,

$$(\varphi\eta)^2 = (1 - \langle -1 \rangle)^2 = 1 + \langle -1\rangle^2 - 2\langle -1\rangle$$
$$= 2(1 - \langle -1 \rangle)$$
$$= 2(\varphi\eta)$$

mais si $k = \mathbb{F}_p$, la formule quadratique $-x^2 - y^2$ représente 1 $\quad A = \{-x^2 \mid x \in \mathbb{F}_p\}$

donc $\langle -1\rangle + \langle -1 \rangle = 1 + 1$ $\quad B = \{1 + x^2 \mid x \in \mathbb{F}_p\}$

donc $(\varphi\eta)^2 = 0$ $\quad |A| = |B| = \frac{p+1}{2}$ donc $A \cap B \neq \emptyset$

Cor 33 : S noethérien dim finie

$$SH(S)[\rho^{-1}] \simeq SH_{ret}(S)[\rho^{-1}]$$

En particulier, $SH_{ret}(S)[\rho^{-1}]$ satisfait les 6 foncteurs.

dem : Soit $X \in Sm_k$, $U_\bullet \to X$ un ret-rec.

On veut une équivalence dans $SH(S)[\rho^{-1}]$

$$\alpha : \operatorname{hocolim} \Sigma^\infty U_\bullet \longrightarrow \Sigma^\infty X$$

Comme on a le formalisme des 6 foncteurs

le Cor 14 (Cisinski-Déglise) montre qu'il suffit de montrer que

si $f : \mathrm{Spec}(k) \to S$ un morphisme, (k corps)

alors $f^*\alpha$ est une équivalence.

Comme f^* est un adjoint à gauche

donc commute hocolim

donc $f^*\alpha$ est

$$\operatorname{hocolim} \Sigma^\infty f^* U_\bullet \longrightarrow \Sigma^\infty f^* X \quad \in SH(k)[\rho^{-1}]$$

on est ramené au cas $S = k$ $\square$