

## Spectre réel nte réel étale

I - Théorie d'Artin-Schreier.

Def: un corps ordonné est un couple  $(F, \leq)$

$F$  corps  $\leq$  ordre total sur  $F$

ou (i)  $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

(ii)  $\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq xy$

$a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b-a \rightarrow$  Cônes propres (maximaux)

ex:  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ordonnés

Def: un corps  $F$  est réel s'il peut être ordonné

Prop  $\Leftrightarrow -1 \notin \Sigma F^2 \quad \Sigma F^2 = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2, x_i \in F, n \in \mathbb{N} \right\}$ .

Re: car  $F = p > 0 \rightarrow F$  ne peut pas être ordonné

Corps réels

Def:  $F$  corps réel clos si  $F$  est réel et

$\forall F' \neq F$  non triviales,  $F'$  n'est pas réel algébrique

Thm: soit  $F$  un corps. L'ASSE:

(a)  $F$  réel clos

(b)  $F$  admet un unique réel dont le carré  $\geq 0$   
est  $\{x^2, x \in F\}$ , et

si  $f \in F[x]$  deg  $f$  impair  $\rightarrow \exists x \in \overline{F}, f(x) = 0$ .

(c) la  $F$ -algèbre  $F[t] / \langle t^2 + 1 \rangle$  est un corps alg.  
des

ex :  $\mathbb{R}$  réel clos,  $\mathbb{R}_{\text{alg}}$  réel clos

clôture réelle

Def : soit  $(F, \leq)$  un corps ordonné; une clôture réelle  
de  $F$  est une extension  $R/F$  où

(i)  $R$  réel clos ;

(ii)  $R/F$  est alg ;

(iii)  $F \rightarrow R$  préserve l'ordre.

ex :  $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}_{\text{alg}} =$  clôture réelle

Thm : - tout corps ordonné admet une clôture réelle

. soit  $(F, \leq)$  corps ordonné

$R/F$  clôture réelle

$R'/F$   $R'$  réel clos,  $F \rightarrow R'$  préserve l'ordre.

alors  $\exists ! \varphi : R \rightarrow R'$  F. morphisme (préserve automatiquement l'anneau!).

si  $R'/F$  est une clôture réelle  $\varphi$  est un iso.

R<sub>r</sub> : on parle donc de la clôture réelle de  $(F, \varepsilon)$ .

Principe de Tarski - Seidenberg

$$a, b, c \in \mathbb{R} \quad (\exists x \quad ax^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow (b^2 - 4ac \geq 0).$$

$$a \neq 0$$

$$\mathbb{R} \text{ réel clos} \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{sign}(a) = \begin{cases} -1 & \text{si } a < 0 \\ +1 & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Thm : soit  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{Z}[X, Y] \quad Y = (Y_1, \dots, Y_n)$   
 $\varepsilon : [1, s] \rightarrow \{-1, 0, 1\}$

alors  $\exists \mathcal{D}(Y)$  combinaison booléenne d'inégalités pol  
 à coeff de  $\mathbb{Z}$   
 en  $(Y_1, \dots, Y_n)$

et : si  $\mathbb{R}$  réel clos,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{cases} \text{sign } f_1(x, y) = \varepsilon(1) \\ \vdots \\ \text{sign } f_s(x, y) = \varepsilon(s) \end{cases}$$

a une sol  $(\Leftrightarrow) \mathcal{D}(y)$  vraie  
 $x \in \mathbb{R}$

utile pour les constructibles.

[BCR]

II Spectre réel, site réel étale

Déf:  $A$  anneau  $\text{Sper } A = \left\{ \xi = (x, \frac{\leq}{\xi}), x \in \text{Sper } A, \leq \text{ ordre sur } K(\xi) \right\}$

$a \in A \quad D(a) = \left\{ \xi, a(\xi) > 0 \right\} \quad a(\xi) = (A \rightarrow K(\xi))$   
 $\uparrow$   
 dit une réelle de  $(K(\xi), \leq)$ .

top: ouverts =  $\bigcup$  quelque  $\bigcap$   $D(a)$

topologie de Zariski de  $\text{Sper } A$ .

ex:  $\text{Sper } \mathbb{Q} = \{*\}$   $\text{Sper } k = \{*\} \quad k \text{ réel clos}$   
 $\text{Sper } k = \emptyset \quad \text{si } \mathbb{Q} \not\subseteq k$

$A \rightsquigarrow \text{Sper } A$  fonctorielle

$f: A \rightarrow B \quad \xi \in \text{Sper } B$   
 $\eta \in \text{Sper } A$

$$\eta = f^*(\xi)$$

$$K(\eta) \hookrightarrow K(\xi)$$

$$\leq \longleftarrow \leq$$

$$f^*(\xi) = \eta$$

$$\eta = (x, \frac{\leq}{\eta}).$$

$$f^*: \text{Sper } B \rightarrow \text{Sper } A \quad \underline{\text{co}}$$

$$\text{Supp} : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } A$$

$$(a, \leq) \mapsto a$$

$$\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } A$$

$$\uparrow \quad \mathcal{C} \quad \downarrow$$

$$\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B$$

Spec A spectral  $\rightsquigarrow$  topologie sur Spec A  
 $\hookrightarrow$  constructible

$$\left( C = \bigcup_{\text{finie}} U_i \cap \overline{V_i} \right)$$

$\swarrow$   $\uparrow$   
 ouverts quasi-compacts

ex :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{constructible} \\ \text{stable par opé.} \end{array} \right. \rightarrow$  fermé pour la top. étendue  
 (Zariski)

$$\xi' \subset \xi \Leftrightarrow \xi \in \overline{\{\xi'\}}$$

X schéma  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$   $U_i$  affine

$\hookrightarrow$  Spec  $\mathcal{O}_X(U_i)$  se recollent en  $X_{\mathbb{R}}$   
 $\uparrow$  espace réel associé à X

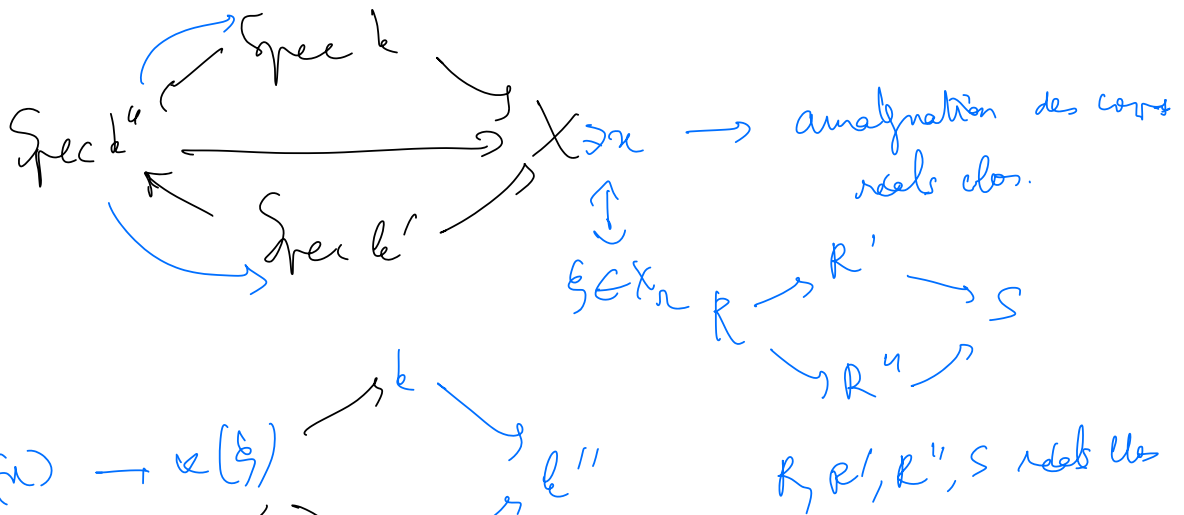
site réel été

Déf :  $(f_i : U_i \rightarrow U)$   $U_i$  schémas  $f_i$  est réel-mjectore  $U$

$$U_{\mathbb{R}} = \bigcup_i f_{i\mathbb{R}}(U_{i\mathbb{R}})$$

Lemme : X schéma. Les familles réel-mjectores de morphismes de X-schémas induisent une prétopologie sur  $\text{Sch}/X$ .

$X \rightsquigarrow d: \text{Spec } k \rightarrow X$   $k$  réel clos



Def: le rcté réel-étale de  $X$  est

$$(\text{Ét}(X, \text{rcté}))$$

Rq: rcté n'est pas sous-unique (les préfaisceaux représentables ne sont pas toujours des faisceaux).

$$\text{Sch}/X \quad S = \text{Spec } \mathbb{R} \quad D(T^2+1) \hookrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \rightarrow X$$

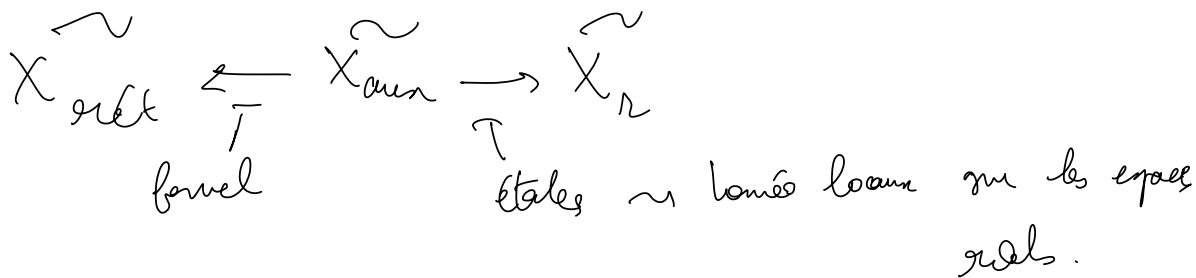
$u \quad u \times_X u = u$

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(X, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(U, X)$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(-, X) \text{ n'est pas un faisceau.}$$

(Dress).

Thm :  $X_{\text{réel}} = (\mathbb{R}^n / x, \text{réel}) \rightsquigarrow \mathbb{R}^n_{\text{réel}} \text{ topol} = \text{façonne} / \mathbb{R}^n_{\text{réel}}$   
 alors  $\widetilde{X_{\text{réel}}} \cong \widetilde{X_{\mathbb{R}}}$   $X_{\mathbb{R}}$  espace réel associé à  $X$ .



Anneaux de valuation réels clos (décrit les spécialisations de  $X_{\mathbb{R}}$ ).

Déf :  $A$  anneau de valuation réel clos  
 $A$  est un anneau de valuation ( $A$  intègre;  $K = \text{frac} A$   
 $x \in K \Rightarrow x \in A$  ou  $x^{-1} \in A$ )  
 et  $\text{frac} A, K_A$  sont réels clos  
 $\uparrow$   
 corps résiduel

Lemme :  $A$  intègre  $\left\{ \begin{array}{l} \text{alors } A \\ \text{est de valuation réel clos} \end{array} \right.$   
 $(\Rightarrow A \subseteq_{\mathbb{Q}} K \text{ convexe où } K \text{ réel clos.}$   
 $\text{frac} A$   
 $(A \text{ conv} \Leftrightarrow x \leq z \leq y \text{ } x \in A \text{ } z \in K \text{ } y \in A$   
 $\Rightarrow \{0, 1\} \subseteq A$ )

$A$  avec (anneau de valuation réel clos)

$\mathbb{Z}' \supset \mathbb{Z}$  ds  $\text{Spec} A \cong \text{Spec} A$

$\uparrow$   
 point correspondant à  $A \hookrightarrow K_A$   
 à  $A \subset K$

Def: soit  $X$  schéma  
 $\xi' \subset \xi$  spécialisation de  $X_r$  ( $\xi \in \overline{\xi'}$ )

on dit que  $\xi' \subset \xi$  est induite par

$$v: V \rightarrow X$$

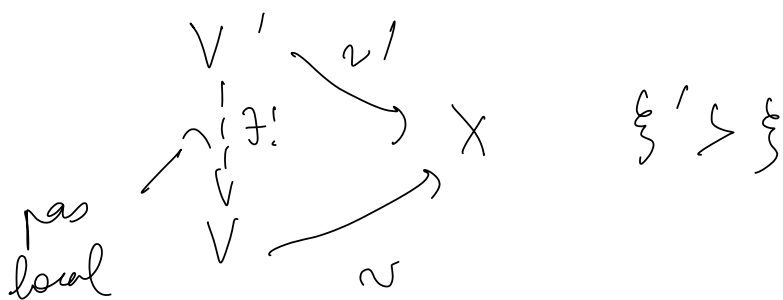
$\parallel$   
 par  $b, B$  de val. réel des

$$\xi' = v_r(\eta') \quad \xi = v_r(\eta)$$

$\eta'$  pt générique de  $\text{Spec } B$

$\eta$  pt fermé de  $\text{Spec } B$ .

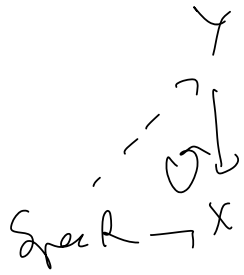
Lemme: toute spécialisation de  $X_r$  est constante ainsi



Lemme:  $Y \xrightarrow{f} X \quad \forall y \in Y \quad k(y) / k(f(y))$  alg.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{a) } \alpha: \text{Spec } R & \rightarrow & X \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 & & \text{réel des}
 \end{array}
 \quad \mapsto \xi \in X_r$$





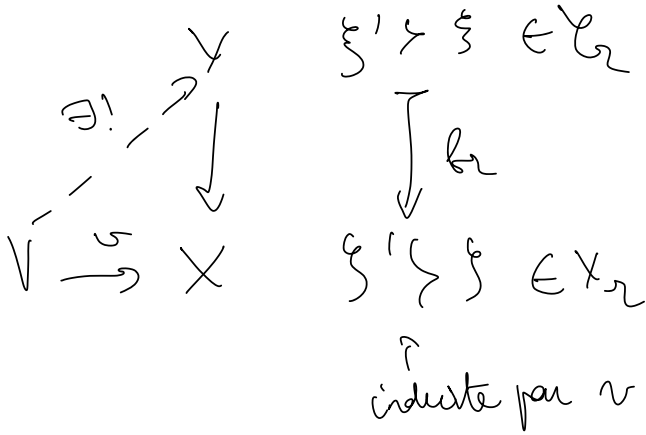
$$\text{Hom}_X(\text{Spec } R, Y) \rightarrow Y_\alpha \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$\downarrow$$

$$f^{-1}(\xi)$$

est une bijection  
 $f: Y_\alpha \rightarrow X_\alpha$

b)

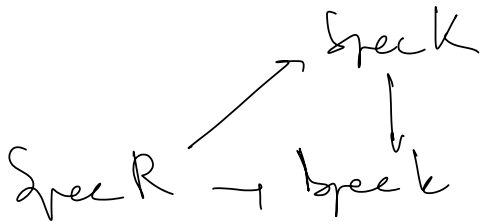


$\exists! u: V \rightarrow Y$   
 $\downarrow$   
 $u$  induit  $\xi' \supset \xi$   
 de  $Y_\alpha$

dén: a)  $X \rightarrow \text{Spec } k(k)$ ,  $\alpha = \alpha(*)$

$$Y \rightarrow Y_\alpha = \coprod_{f(y)=\alpha} \text{Spec } k(y)$$

$$X = \text{Spec } k \quad Y = \text{Spec } K$$



$\leq$  ordre sur  $K$   
 qui induit  $\xi$  ordre sur  $k$

$\exists! \varphi: K \rightarrow R$   $k$ -non-plateau  
 $\varphi$  induit  $\leq$

$$\begin{array}{ccc} \underline{L} & K & \longrightarrow L \\ & \uparrow f & \nearrow \\ & \text{alg} & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{= clôture réelle de } K \\ \text{et de } \mathbb{K} \end{array}$$

Prop: 
$$\begin{array}{ccc} Y \times_Z & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f, x} & K(f)/K(fg) \text{ alg} \end{array}$$

alors 
$$\gamma: (Y \times_X Z)_n \longrightarrow Y_n \times_{X_n} Z_n$$

est un homé.

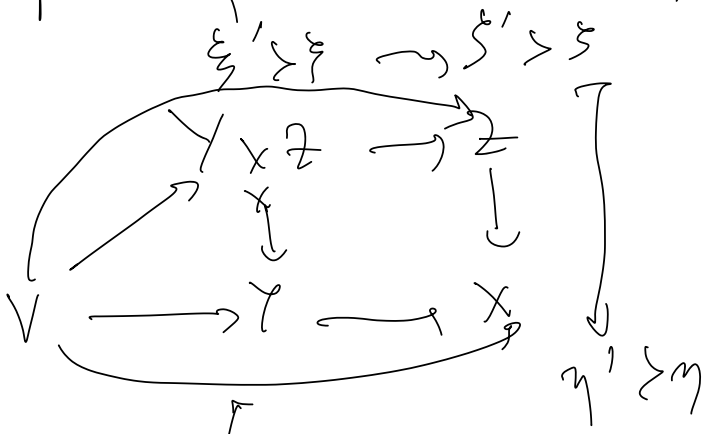
Cor:  $U \mapsto U_n$  commute aux produits fibrés de  $\mathbb{A}^1/x$  vers  $\text{Top}$ .

dém:  $\gamma$  injection par le lemme (a)), continue.

pour  $\eta$  c'est un homé

il suffit de  $\eta$

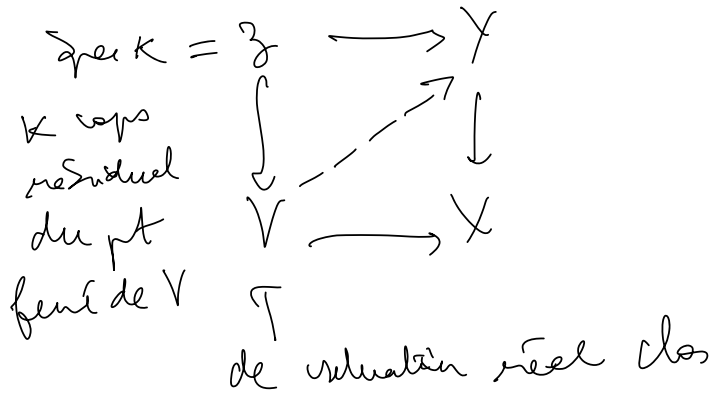
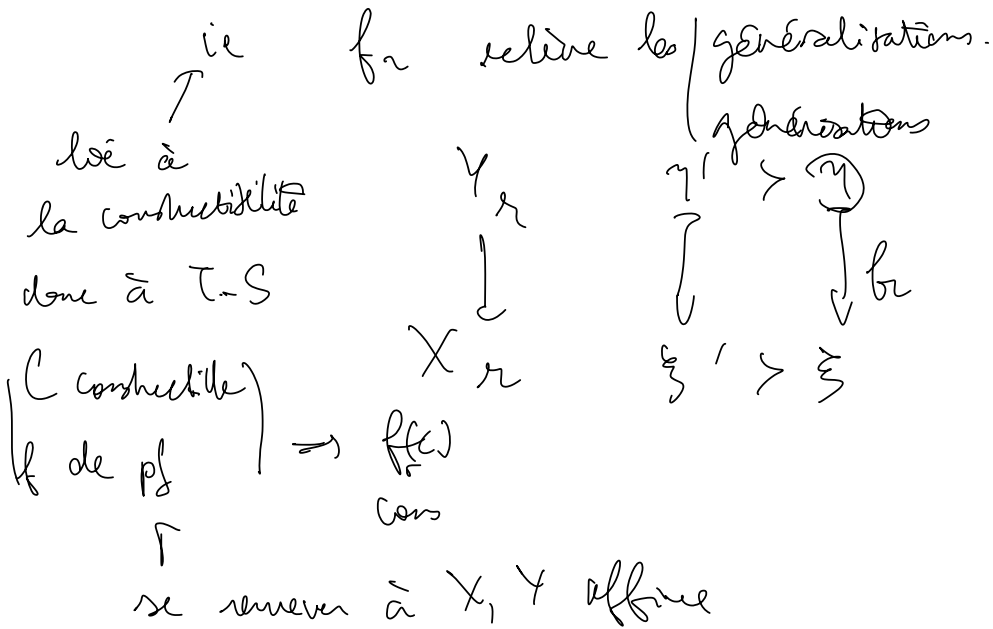
$\gamma^{-1}$  préserve les spécialisations



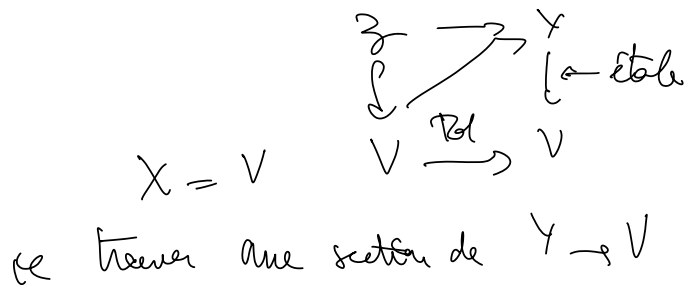
bil du lemme

Prop:  $f: Y \rightarrow X$  étale  $\Rightarrow$   $f_r: Y_r \rightarrow X_r$   
 est hame local.

dém: mg  $f_r$  ouverte.

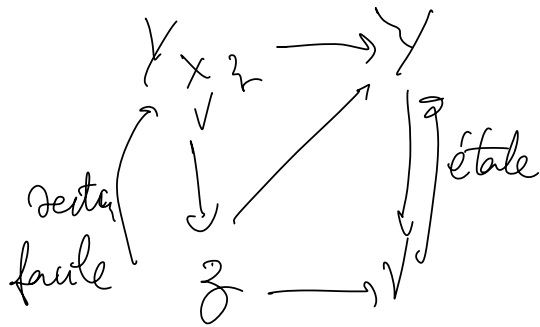


changement de base  
 le long  $\text{Tot}: V \rightarrow V$



Lemme :  $V$  lisse

idée



$f \in A[x]$  unitaire

$V = \text{Spec } A$

$\bar{f} \in k[x]$

$b$  racine simple de  $\bar{f}$

$\Leftrightarrow$  changement de signe de  $\bar{f}$

$b \in [\bar{x}, \bar{y}]$   
 $x, y \in A$

$\bar{f}(\bar{x}) \bar{f}(\bar{y}) < 0$

	$\bar{x}$	$b$	$\bar{y}$
	+	0	-
			+

alors  $f(x) f(y) < 0$ .

ordre sur  $k$  :  $z \in A^*$

$z > 0 \Leftrightarrow \pi(z) > 0$

$\uparrow$   
proposition standard

donc  $\exists a \in (x, y)$  tq  $f(a) = 0$  (TVB)

alors  $\pi(a) = b$ . Pas fini!