# Spectre réel, site réel étale

## I - Théorie d'Artin - Schreier.

**Déf** : un corps ordonné est un couple $(F, \leq)$

$F$ corps $\leq$ ordre total sur $F$

tq (i) $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

(ii) $\left.\begin{matrix} 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 \leq xy$

$a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b-a$ $\rightarrow$ Cônes propres (maximaux)

ex : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ordonnés

**Déf** : un corps $F$ est réel s'il peut être ordonné

Prop $\Leftrightarrow$ $-1 \notin \Sigma F^2$ $\quad \Sigma F^2 = \{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2, x_i \in F, n \in \mathbb{N} \}$.

Rq : car $F = p > 0$ $\rightarrow$ $F$ ne peut pas être ordonné

### Corps réels clos

**Déf** : $F$ corps réel clos si $F$ est réel et $\forall F'/F$ non triviale algébrique $F'$ n'est pas réel

**Thm** : soit $F$ un corps. LASSE :

(a) $F$ réel clos

(b) $F$ admet un unique ordre dont le cône $\geq 0$ est $\{x^2, x \in F\}$, et

si $f \in F[X]$ deg $f$ impair $\Rightarrow \exists x \in F, f(x) = 0$.

(c) la $F$-algèbre $F[t]/\langle t^2+1 \rangle$ est un corps alg. clos

$$\underset{F(\sqrt{-1})}{\overset{\shortparallel}{F[t]/\langle t^2+1\rangle}}$$

ex : $\mathbb{R}$ réel clos, $\mathbb{R}_{alg}$ réel clos

Clôture réelle

Déf : soit $(F, \leq)$ un corps ordonné ; une clôture réelle de $F$ est une extension $R/F$ où

(i) $R$ réel clos ;

(ii) $R/F$ est alg ;

(iii) $F \to R$ préserve l'ordre.

ex : $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}_{alg}$ = clôture réelle

Thm : - tout corps ordonné admet une clôture réelle

. soit $(F, \leq)$ corps ordonné

$R/F$ clôture réelle

$R'/F$ $R'$ réel clos, $F \to R'$ préserve l'ordre.

alors $\exists !\ \varphi : R \to R'$ F. morphisme (préserve automatiquement l'ordre ?).

si $R'/F$ est une clôture réelle $\varphi$ est un iso.

Rq : on parle donc de la clôture réelle de $(F, \leq)$.

Principe de Tarski - Seidenberg

$a, b, c \in R$ $\quad (\exists x \quad ax^2+bx+c=0) \iff (b^2-4ac \geq 0)$.

$a \neq 0$

$R$ réel clos $\quad a \in R \quad \mathrm{sign}(a) = \begin{cases} -1 & \text{si } a<0 \\ +1 & \text{si } a>0 \\ 0 & \text{si } a=0. \end{cases}$

Thm : soit $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{Z}_F[X, Y]$ $\quad Y = (Y_1, \dots, Y_n)$

$\varepsilon : [\![1, s]\!] \to \{-1, 0, 1\}$

alors $\exists\ \mathcal{B}(Y)$ combinaison booléenne d'inégalités pol à coeff ds $\mathbb{Z}_F$ en $(Y_1, \dots, Y_n)$

tq : si $R$ réel clos, $y \in R^n$,

$$\begin{cases} \mathrm{sign}\, f_1(X, y) = \varepsilon(1) \\ \quad \vdots \\ \mathrm{sign}\, f_s(X, y) = \varepsilon(s) \end{cases}$$

a une sol $\iff \mathcal{B}(y)$ vraie
$x \in R$

utile pour les constructibles. [BCR]

II Spectre réel, site réel étale

Déf : $A$ anneau $\mathrm{Sper}\, A = \{ \xi = (x, \leq_\xi),\ \leq_\xi$ ordre sur $k(x) \}$, $x \in \mathrm{Spec}\, A$

$a \in A$ $D(a) = \{ \xi,\ a(\xi) > 0 \}$ $a \mapsto a(\xi)$, $a(\xi) = (A \to k(\xi))$

$k(\xi)$ : clôture réelle de $(k(x), \leq_\xi)$.

top : ouverts $= \bigcup\limits_{\text{quelconque}} \bigcap\limits_{\text{finie}} D(a)$

topologie de Zariski de Sper A.

ex : $\mathrm{Sper}\, \mathbb{Q} = \{*\}$ $\mathrm{Sper}\, k = \{*\}$ $k$ réel clos

$\mathrm{Sper}\, K = \emptyset$ si $\mathbb{Q} \not\subset K$

$A \mapsto \mathrm{Sper}\, A$ fonctorielle $f : A \to B$ $\xi \in \mathrm{Sper}\, B$, $y \in \mathrm{Spec}\, B$

$x = f^*(y)$

$k(x) \hookrightarrow k(y)$

$\leq_\xi \leftarrow \leq_\xi$

$f^*(\xi) = \xi$

$\xi = (x, \leq_\xi)$.

$f^* : \mathrm{Sper}\, B \to \mathrm{Sper}\, A$ $\underline{C^0}$

$\mathrm{Supp} : \mathrm{Sper}\, A \to \mathrm{Spec}\, A$

$(x, \leq) \mapsto x$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sper}\, A \arrow[r] & \mathrm{Spec}\, A \\ \mathrm{Sper}\, B \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Spec}\, B \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Sper A <u>spectral</u> ⇝ topologie sur Sper A
↳ <u>constructible</u>

$\left( C = \bigcup_{\text{finie}} U_i \cap {}^{\complement}V_i \right)$ ouverts quasi-compacts

<u>ex</u> : $\begin{cases} \text{constructible} \\ \text{stable par spé.} \end{cases}$ ⟹ fermé pour la top <u>standard</u> (Zariski)

$\xi' \subseteq \xi \iff \xi \in \overline{\{\xi'\}}$

X schéma $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ $U_i$ affine

les $\mathrm{Sper}\, \mathcal{O}_X(U_i)$ se recollent en $X_r$ ← espace réel associé à $X$

<u>Site réel étale</u>

<u>Déf</u> : $(f_i : U_i \to U)_i$ est <u>réel-surjective</u> si
schémas

$U_r = \bigcup_i f_r\left((U_i)_r\right)$

<u>Lemme</u> : X schéma. Les familles réel-surjectives de morphismes de X-schémas induisent une prétopologie sur Sch / X.

$X_r \leftrightsquigarrow \alpha : \operatorname{Spec} k \to X$ $\quad k$ réel clos

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Spec} k \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\operatorname{Spec} k'' \arrow[rr] \arrow[ur, bend left] \arrow[dr, bend right] & & X \ni x \\
 & \operatorname{Spec} k' \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$X \ni x \longrightarrow$ amalgamation des corps réels clos.

$$\begin{tikzcd}
\xi \in X_r & R \arrow[r] \arrow[dr] & R' \arrow[r] & S \\
 & & R'' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$R, R', R'', S$ réels clos

$$\begin{tikzcd}
 & & k \arrow[dr] & \\
\underbrace{k(x) \arrow[r] & k(\xi)}_{k''} \arrow[ur] \arrow[dr] & & k'' \\
 & & k' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

**Déf**, le site réel-étale de $X$ est

$$(\text{Ét}/X, \ r\text{ét})$$

**Rq** : $r\text{ét}$ n'est pas sous-canonique [les préfaisceaux re-présentables ne sont pas ~~toujours~~ des faisceaux].

$\mathrm{Sch}/X \qquad S = \operatorname{Spec} \mathbb{R} \qquad \underbrace{D(T^2+1)}_{U} \hookrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = X$

$$U \times_X U = U$$

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(X, X) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(U, X)$$

$$\frac{1}{T^2+1} \qquad [illegible]$$

$\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(-, X)$ n'est pas un faisceau.

**Thm** : $X_{rét} = (\text{Ét}/X, \text{rét}) \rightsquigarrow \widetilde{X}_{rét}$ topos = faisceaux $/X_{rét}$

alors $\widetilde{X}_{rét} \simeq \widetilde{X}_r$ $X_r$ espace réel associé à $X$.

$$\underset{\text{formel}}{\widetilde{X}_{rét} \xleftarrow{\ \ } \widetilde{X}_{aux}} \longrightarrow \widetilde{X}_r$$

étales $\rightsquigarrow$ homéo locaux sur les espaces réels.

## Anneaux de valuation réels clos (décrire les spécialisations de $X_r$).

**Déf** : $A$ anneau de valuation réel clos si

$A$ est un anneau de valuation ($A$ intègre, $K = \text{Frac}\,A$, $x \in K \Rightarrow x \in A$ ou $x^{-1} \in A$)

et $\text{Frac}\,A$, $k_A$ sont réels clos

$k_A$ : corps résiduel

**Lemme** : $A$ intègre, alors $A$ est de valuation réel clos

$\iff A \subseteq K$ convexe où $K$ réel clos.

$K = \text{Frac}\,A$

($A$ convexe $\iff x \leq z \leq y$, $x \in A$, $z \in K$, $y \in A$ $\Rightarrow z \in A$)

$\iff [0,1] \subseteq A$

$A$ avrc (anneau de valuation réel clos)

$\xi' \succ \xi$ ds $\text{Sper}\,A \simeq \text{Spec}\,A$

pt correspondant à $A \to K_A$

point correspondant à $A \hookrightarrow K$

Déf : soit $X$ schéma

$\xi' \succ \xi$ spécialisation de $X_r$ $\left(\xi \in \overline{\{\xi'\}}\right)$

on dit que $\xi' \succ \xi$ est induite par

$$v : V \to X$$
$$V = \operatorname{Spec} B,\quad B \text{ de val. réel clos}$$

si $\xi' = v_r(\eta')$ $\quad \xi = v_r(\eta)$

$\eta'$ pt générique de Spec $B$

$\eta$ pt fermé de Spec $B$.

Lemme : toute spécialisation de $X_r$ est construite ainsi

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[dd, dashed, "\exists !"'] \arrow[dr, bend left, "v'"] & \\ & X \\ V \arrow[ur, bend right, "v"'] & \end{tikzcd} \qquad \xi' \succ \xi$$

pas local

Lemme : $Y \xrightarrow{f} X$ $\forall y \in Y$ $\kappa(y)/\kappa(f(y))$ alg.

a) $\alpha : \operatorname{Spec} R \to X \quad \mapsto \xi \in X_r$

$R$ réel clos

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & X \end{tikzcd}$$

$$\operatorname{Hom}_X(\operatorname{Spec} R, Y) \longrightarrow Y_r \supseteq f_r^{-1}(\xi)$$

$$\downarrow$$

$f_r^{-1}(\xi)$ est une bijection

$f_r : Y_r \to X_r$

b)

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \\ V \arrow[r, "v"] \arrow[ur, dashed, "\exists!"] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \xi' \succ \xi \in Y_r \arrow[d, "f_r"] \\ \xi' \succ \xi \in X_r \end{tikzcd}$$

induite par $v$

$\exists!\ u : V \to Y$

tq $u$ induit $\xi' \succ \xi$ ds $Y_r$

dém : a) $X \to \operatorname{Spec} k(x)$, $x = \alpha(*)$

$$Y \longrightarrow Y_x = \coprod_{f(y)=x} \operatorname{Spec} k(y)$$

$X = \operatorname{Spec} k$ $\quad Y = \operatorname{Spec} K$.

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} K \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[ur] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

$\leq$ ordre sur $K$

qui induit $\xi$ ordre sur $k$

$\exists!\ \varphi : K \to R$ $k$-morphisme

tq $\varphi$ induit $\leq$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & L \\ k \arrow[u, "\text{alg}"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$L$ = clôture réelle de $K$ et de $k$

Prop : 
$$\begin{tikzcd} Y \times_X Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$
$k(y)/k(f(y))$ alg

alors $\gamma : (Y \times_X Z)_r \to Y_r \times_{X_r} Z_r$

est un homéo.

Cor : $U \mapsto U_r$ commute aux produits fibrés de $\acute{E}t/X$ vers Top.

dém : $\gamma$ bijection par le lemme (a)), continue.

pour voir c'est un homéo, il suffit de voir $\gamma^{-1}$ préserve les spécialisations

$\xi' \succ \xi \mapsto \zeta' \succ \zeta$

$$\begin{tikzcd} & Y \times_X Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ V \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[urr, bend left] \arrow[rr, bend right, "r"'] & Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

$\eta' \succ \eta$

Pf du lemme

Prop : $f : Y \to X$ étale $\Rightarrow$ $f_r : Y_r \to X_r$ est homéo local.

<u>dém</u> : mq $f_r$ ouverte.

ie $f_r$ relève les | généralisations / générisations

lié à la constructibilité donc à T-S

$$\begin{array}{ccc} Y_r & \eta' & \succ \eta \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow f_r \\ X_r & \xi' & \succ \xi \end{array}$$

(C constructible, f de pf) $\Rightarrow$ $f(C)$ cons

se ramener à X, Y affine

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\,K = Z & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ V & \longrightarrow & X \end{array}$$

K corps résiduel du pt fermé de V

de valuation réel clos

changement de base le long Id : V → V

$X = V$

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \text{étale} \\ V & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & V \end{array}$$

ce trouver une section de $Y \to V$

Lemme : $V$ hensélien

$$\begin{tikzcd} Y \times z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\text{étale}"] \\ z \arrow[u, bend left, "\text{section facile}"] \arrow[ur] \arrow[r] & V \arrow[u, bend right] \end{tikzcd}$$

idée

$f \in A[X]$ unitaire $\qquad V = \operatorname{Spec} A$

$\bar f \in k[X] \qquad b$ racine simple de $\bar f$

$\Rightarrow$ changement de signe de $\bar f$

$b \in [\bar x, \bar y] \qquad \bar f(\bar x)\, \bar f(\bar y) < 0$

$x, y \in A$

| | $\bar x$ | $b$ | $\bar y$ |
|---|---|---|---|
| | $+$ | $0$ | $-$ |

alors $f(x)\, f(y) < 0$.

ordre sur $k$ : $z \in A^*$

$z > 0 \iff \pi(z) > 0$

projection standard

donc $\exists\, a \in (x, y)$ tq $f(a) = 0$ (TVI)

alors $\pi(a) = b$. Pas fini !