Prop : $f : Y \to X$ étale

$\rightsquigarrow$ $f_r : Y_r \to X_r$ homéo local

dém : · f_r ouverte

· f étale : $\Delta : Y \to Y \times_X Y$ ouverte
immersion

$\rightsquigarrow$ $\Delta_r : Y_r \to Y_r \times_{X_r} Y_r$ application ouverte

alors f_r homéo local

Thm de comparaison

X $\qquad$ $\widetilde{X}_{\text{rét}}$

$\widetilde{X}_r$

$$\widetilde{X}_{\text{rét}} \xleftarrow[(\varphi^*, \varphi_*)]{} \widetilde{X}_{\text{aux}} \xrightarrow[(\psi^*, \psi_*)]{} \widetilde{X}_r$$

A $\quad (U, W)$, $W \subseteq U_{r}$ ouvert

$$\begin{tikzcd}
(U, W) \arrow[d, "f"] \\
(V, \Omega)
\end{tikzcd}
\iff
\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & V \arrow[dl] \\
& X &
\end{tikzcd}
\quad f(W) \subseteq \Omega$$

$\left(f_i : (U_i, W_i) \to (U, W) \right)_i$ couvrante

si $W = \bigcup_i (f_i)_r (W_i)$ $\longrightarrow$ site X_{aux}.

A a les prod fibrés

$$(U', W') \times_{(U,W)} (U'', W'') = \Big(U' \times_U U'', \underbrace{W' \times_W W''}_{\hookrightarrow (U' \times_U U'')_r} \Big)$$

$$\begin{tikzcd}
X_r \arrow[r, "i"] & X_{aux} \\
X_{réel} \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l}
i(W) = (X, W) \\
j(U \to X) = (U, U_r)
\end{array}$$

$\mathcal{F}$ faisceau sur X_{aux}

$\mathcal{F} \circ i$ $\mathcal{F} \circ j$ faisceaux sur les bons sites

$$\widetilde{X_{ret}} \xleftarrow{\varphi} \widetilde{X_{aux}} \xrightarrow{\psi} \overline{X_{r}}$$

$\varphi_* = - \circ i$ φ^* = adjoint à gauche

$\psi_* = - \circ j$ ψ^* = ______

<u>Lemme</u> : φ est une éq.

<u>dém</u> : lemme de comparaison (SGA4)

φ_* éq $\Leftarrow$ les objets de X_{aux} sont couverts par des (U_1, U_2) $U \to X$ étale.

(U, W) $\xi \in W \subseteq U_2$

$$\begin{tikzcd} \exists\, V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & U \arrow[dl, hook'] \\ X & \end{tikzcd}$$

$\xi \in f_r(V_r) \subseteq W$.

U affine $\quad D(a) \subseteq W$

$D(a) = \{\xi,\ a(\xi) > 0\} \quad a \in \mathcal{O}_U(U)$.

$B = A_{2a}[t]/\langle t^2 - a\rangle \quad V = \operatorname{Spec} B$

$V \to U$ satisfait aux conditions.

. Le cas de $\mathcal{Y}$

$S \in \widetilde{X_{aux}} \quad (U, W) \mapsto S(U, W)$

$S_U : W \mapsto S(U, W)$ faisceau sur U_r
$\subseteq U_r$

$f : V \to U$ étale $\rightsquigarrow f_r^* S_U \to S_V$ sur V_r (restrictions de S)

<u>Lemme</u> : $f_r^* S_U \to S_V$ est un iso

<u>dém</u> : W $\quad f_r : W \to f_r(W)$ injectif

$\leadsto \quad \Delta : W \to W \times_{X_r} W$ bijection

$U = X \qquad V = U$

$$(U, W) \to (X, f_r(W))$$

$$S(X, f_r(W)) \to S(U,W) \overset{p^*}{\underset{q^*}{\rightrightarrows}} S(U \times_X U, W \times_{X_r} W)$$

$$\Delta : (U, W) \to (U \times_X U, W \times_{X_r} W)$$

est un recouvrement pour Zar.

$$\overset{p^*}{\underset{q^*}{\rightrightarrows}} S(U \times_X U, W \times_{X_r} W) \xrightarrow{\Delta^*} S(U, W)$$

injectif

$\Rightarrow p^* = q^*$ $\quad S(X, f_r(W)) \xrightarrow{\simeq} S(U, W)$

$\blacksquare$

on va mq ψ^*, ψ_* soit pleinement fidèles.

$\psi^* \psi_* S \longrightarrow S$ iso $\quad (S \in \widetilde{X_{ana}})$

$\mathcal{F} \to \underbrace{\psi_* \psi^* \mathcal{F}}$ iso $\quad (\mathcal{F} \in \widetilde{X_r})$.

$= \underbrace{(\psi^* \mathcal{F})}_{X}$

$= f_r^* \mathcal{F} \quad f : X \xrightarrow{Id_X} X$

ramené à $(\psi^* \mathcal{F})_{/U} = f_r^* \mathcal{F} \quad f : U \to X$

faisceau associé à $(U, W) \mapsto \mathcal{F}(f_r(W))$

$$\begin{array}{c} U \\ \downarrow f_r \\ X \end{array}$$

$\psi^* \psi_* S \longrightarrow S$ iso de faisceaux

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\varphi^* \overbrace{\varphi_* S}^{S_X}}_{= f_r^* S_X}\Big|_U \longrightarrow S_U \quad \text{iso de faisceaux}$$

$$\forall\, U \xrightarrow{f} X$$

c'est le lemme.

On peut rendre ces éq. plus explicite.

Recollement étale - réel étale

$$\mathcal{U} \hookrightarrow Z \hookleftarrow Y = Z \setminus \mathcal{U}$$

$\mathcal{E}$ = topos généralisation des esp. top.

$\mathcal{U} \subseteq X$ ouvert $\rightsquigarrow$ faisceau

$$h^{\mathcal{U}} : W \mapsto \begin{cases} \emptyset & \text{si } W \nsubseteq \mathcal{U} \\ * & \text{si } W \subseteq \mathcal{U} \end{cases}$$

sous-faisceau du faisceau $*$.

$\mathcal{G}$ sous-faisceau de $*$

$$\mathcal{U} = \bigcup_{\mathcal{G}(W) \neq \emptyset} W \quad \text{ouvert de } X$$

$$\mathcal{G} = h^{\mathcal{U}}.$$

<u>Déf</u> : un <u>ouvert</u> de $\mathcal{E}$ est un sous-objet de $*$.

$$\left(X \underset{\text{mono}}{\overset{}{\hookrightarrow}} * \right)$$

Déf : E topos

Un sous-topos est une sous-cat $F \subseteq E$ strictement pleine qui est un topos et telle que $i : F \hookrightarrow E$ est de la forme i_*, où i_* admet un adjoint à gauche exact

$$i = (i^*, i_*) : F \hookrightarrow E$$

. E topos U ouvert de E
$U \hookrightarrow *$

E/U est un topos
$\cup$
(X, f), X objet de E
$f : X \to U$ est un morphisme.

$(Y, v) \to (X, u) \iff f : Y \to X$

tq

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "v"'] & & X \arrow[dl, "u"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$E/U \xrightarrow{j_{U!}} E \qquad (X, f) \mapsto X$

$E/U \leftarrow E : j_U^* \quad X \mapsto (X \times U \to U).$

j_U^* admet un adjoint à droite

j_{U*}

et $j_{U!}$ est l'adjoint à gauche de j_U^*.

$(j_{U!}, j_U^*, j_{U*})$

Déf : $j_U = (j^*, j_{U*}) : E/U \to E$

est le plongement du sous-topos ouvert

E/U

<u>ex</u> : $\mathcal{F}$ faisceau sur X espace top.
$U \subseteq X$ ouvert

$\mathcal{F} \to h_Y^U \iff \mathcal{F}(W)$ est vide
$\mathrm{Hom}(\cdot, U)$ si $W \not\subseteq U$

$\iff \mathcal{F} = j_! j^* \mathcal{F}$

$j : U \hookrightarrow X$

<u>Plongement</u> : j_{U*} est pleinement fidèle

<u>Déf</u> : $f : F \to E$ plongement ouvert

si
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & E \\ E/U \arrow[ur, "j_U"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

. $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ fermé $U = X \setminus Y$

faisceau sur $Y \hookrightarrow$ faisceau F sur X tel que
$j^* F$ est final.

$j : U \hookrightarrow X$

$F \overset{(i^*, i_*)}{\hookrightarrow} E$ sous-topos de E

i_* pleinement fidèle

$U \hookrightarrow *,$

Déf F fermé de complémentaire U si

$F = \{ X \in E, \ j_U^* X$ final dans $E/U \}$.

Rq : $E = \widetilde{C}$, C site

(E = faisceaux sur C)

$U \hookrightarrow * \quad U(X) \in \{\emptyset, *\}$

$\mathcal{F} \in \widetilde{C}$ $\quad \mathcal{F}$ objet du complémentaire de U

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{F} \times U \to U$ iso

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}(X) = *$ si $U(X) = *$

C catégorie $\quad \tau, \tau'$ topologies sur C

($\tau =$ ét, $\tau' =$ rét).

$C = Ét/X$

$\tau \cap \tau'$

$j : \widetilde{C}_\tau \to \widetilde{C}_{\tau\cap\tau'}$ morphismes de topos

$i : \widetilde{C}_{\tau'} \to \widetilde{C}_{\tau\cap\tau'}$

$j_*, i_* =$ identiques

$j^*, i^* =$ foncteurs de faisceautisation

Prop : CASSE :

(i) j plongement ouvert de complémentaire fermé i

(ii) X objet de C ; alors, X admet un raffinement $R \hookrightarrow h^X$ pour τ tel

que si $U \to X \in R(U)$, tq

$\emptyset \hookrightarrow U$ est un raffinement pour τ'

(pour nous : $\forall X$ schéma

$\exists (X_i \to X)_i$ recouvrement étale

tel que $(X_i)_r = \emptyset$)

Déf : $b = \text{rét} \cap \text{ét}$ sur $\text{Ét}/X$.

both (beide)

$$\begin{tikzcd} \big(U_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr] & U\big)_i \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

recouvrement pour b

$\Leftrightarrow U = \bigcup_i f_i(U_i)$

et $U_r = \bigcup_i f_i((U_i)_r)$.

Lemme : $\widetilde{X}_{\text{ét}} \overset{j}{\hookrightarrow} \widetilde{X}_{b} \overset{i}{\hookleftarrow} X_{\text{rét}}$

j est un plongement ouvert de complémentaire fermé i.

dém : Y schéma.

On va recouvrir Y pour la top étale par des schémas de spectre réel vide

p premier

$Y_{(p)} = D(p) \subseteq Y$ = lieu d'inversibilité de $p \in \mathcal{O}_Y(Y)$

$\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}]$ = sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par les puissances de ζ_{p^n}, racine primitive de l'unité.

$Y_{(p)} \times \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\zeta_{p^n}] \longrightarrow Y_{(p)}$ recouvrement étale.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\zeta_{p^n}] & \longrightarrow & \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \end{array}$$

top étale

$$Y = \underbrace{Y_{(2)}[\sqrt{-1}]} \cup Y_{(3)}[\zeta_3]$$

racine 3-ième de 1.

$$= Y_{(2)} \times \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$$

il suffit de mq

$$(\underbrace{Y_{(2)}[\sqrt{-1}]}_{Y_2'})_{\mathbb{R}} = \emptyset, \quad (\underbrace{Y_3[\zeta_3]}_{Y_3'})_{\mathbb{R}} = \emptyset.$$

$$Y_2' \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$$

il suffit de mq $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \emptyset$

mais les corps résiduels ne sont pas réels : $i^2+1=0$.

$t^2 + t + 1 > 0 \quad \forall t \in R$ R réel clos

$(\Delta = -3)$.

donc $(Y_3[\zeta_3])_r = \emptyset$.

Déf : $\rho = i^* j_* : \widetilde{X_{ét}} \to \widetilde{X_{rét}}$

associe à $\mathcal{F}$ étale

le faisceau réel étale associé.

$(\widetilde{X_{rét}}, \widetilde{X_{ét}}, \rho)$

objets $= (B, A, \phi : B \to \rho(A))$.

dans $\widetilde{X_{rét}}$

$B \in \widetilde{X_{rét}}$

$A \in \widetilde{X_{ét}}$

morphismes déf de façon naturelle

$$\mathcal{F} \in \tilde{X}_b \rightsquigarrow \left(i^*\mathcal{F},\ j^*\mathcal{F},\ i^*\mathcal{F} \to \underset{\substack{\Vert \\ i^* j_* j^* \mathcal{F}}}{\ell j^* \mathcal{F}}\right)$$

déduit de

$\mathcal{F} \to j_* j^* \mathcal{F}$.

Prop: ce foncteur est une équivalence de cat.

Un quasi-inverse envoie

$(B, A, \phi : B \to \ell A)$ sur P :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & j_* A \arrow[d, "\text{adjonction}"] \\
i_* B \arrow[r, "i_*\phi"'] & i_* \ell A = i_* i^* j_* A
\end{tikzcd}$$

Corollaire : j^* a adjoint à gauche

$j_! : \tilde{X}_{ét} \to \tilde{X}_b$

ex : $j_! \mathcal{F}(W) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } W \not\subseteq U \\ \mathcal{F}(W) & \text{si } W \subseteq U \end{cases}$.

extension par le vide

$$\left.\begin{array}{l} Ab(X_b) \xrightarrow{j^*} Ab(X_{ét}) \\ \\ Ab(X_b) \xrightarrow{i^*} Ab(X_{ét}) \end{array}\right\} \text{faisceau associé}$$

Prop : j^* a un adjoint à gauche

$$j_! : Ab(X_{ét}) \longrightarrow Ab(X_b)$$

extension par zéro

i_* a un adjoint à droite

$$i^! : Ab(X_b) \longrightarrow Ab(X_{ét}).$$

Cor : $\mathcal{A} \in Ab(X_b)$:

$$0 \to j_! j^* A \to A \to i_* i^* A \to 0$$

et $\quad 0 \to i_* i^! A \to A \to j_* j^* A$

$\forall\, \mathcal{B} \in Ab(X_{et})$:

$$0 \to j_! \mathcal{B} \to j_* \mathcal{B} \to i_* \mathcal{C}\mathcal{B} \to 0.$$

(général de sous-topos ouvert + complémentaire fermé).

Ex : $\quad X = \operatorname{Spec} R \qquad R$ réel clos

$C = R[\sqrt{-1}]$ corps alg clos

$G = \operatorname{Gal}(C/R) \quad (\simeq \mathbb{Z}/2)$.

F faisceau étale sur Et/X

$\sigma : C \to C \quad z \mapsto \bar{z} \quad a+ib \mapsto a-ib$

$$F(\sigma) : \underset{\underset{A}{\shortparallel}}{F(\operatorname{Spec} \mathbb{C})} \to F(\operatorname{Spec} \mathbb{C})$$

$F(\sigma) \Longleftrightarrow$ action de G sur A

$x \mapsto \sigma(x)$.

F étale : $\underset{\underset{B}{\shortparallel}}{F(\operatorname{Spec} \mathbb{R})} \to F(\operatorname{Spec} \mathbb{C}) \underset{\sigma^*}{\overset{\mathrm{Id}^*}{\rightrightarrows}} F(\operatorname{Spec} \mathbb{C}) \times F(\operatorname{Spec} \mathbb{C})$

est exacte ($\mathbb{C}/\mathbb{R}$ galoisienne)

$B = A^G$. (pts fixes sous l'action de G)

X-schéma étale $=$

$\coprod \operatorname{Spec} K_i$, $K_i \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

. F réel étale :

$F(\operatorname{Spec} \mathbb{C}) = *$ $\emptyset \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ recouvrement

$F(\mathrm{Spec}\ R) =$ ensemble B.

. F étale $j^* F =$ faisceau réel étale correspondant à $F(\mathrm{Spec}\ R) = F(\mathrm{Spec}\ C)^G$

$(\widetilde{X_{r\acute{e}t}}, \widetilde{X_{\acute{e}t}}, \varphi)$ est équivalente à

$(B, A, \phi : B \to A^G)$ A G-ensemble

B ensemble

ϕ application ensembliste.

<u>Quelques propriétés</u>

M ensemble $\to \underline{M}_t$ $t \in \{\text{rét}, \text{ét}, \text{b}\}$

faisceau constant, associé à $(U \to X) \mapsto M$ pour la top t

Prop : ∂_*, ℓ préservent les faisceaux constants :

$$\partial_* \underline{M}_{\acute{e}t} = \underline{M}_b$$

$$\ell \, \underline{M}_{\acute{e}t} = \underline{M}_{r\acute{e}t} .$$

$$\ell = i^* j_*$$

(faux pour localement constant).

$f : Y \to X$ $\quad f^{-1} : \acute{E}t/X \to \acute{E}t/Y$

$$f_t : \tilde{Y}_t \to \tilde{X}_t .$$

f étale $\quad \acute{E}t/Y \xrightarrow{f_*} \acute{E}t/X$

$f_{t!}$ adjoint à gauche de f_t^*. $\quad$ t.q. ... ét. ... les ... bj.

$f : Y \to X$ entier surjectif, radiciel

$\Rightarrow f : \tilde{Y}_b \to \tilde{X}_b$ est une équivalence