Table des matières

Recollement des sites réel étale et étale

Les catégories en jeu sont localement petites et, lorsque c'est nécessaire pour la correction des énoncés, petites.

1. Cribles, sites, topos

1.1 Préfaisceaux

Notation 1.1.1. Soit C une (petite) catégorie. Un *préfaisceau* (d'ensembles) sur C est un foncteur contravariant de C vers la catégorie des ensembles ; un *sous-préfaisceau* d'un préfaisceau $\mathscr{F}$ sur C est un préfaisceau $\mathscr{G}$ sur C tel que $\mathscr{G}(\mathrm{X}) \subseteq \mathscr{F}(\mathrm{X})$ pour tout objet X de C et, pour toute flèche $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$, le préfaisceau $\mathscr{F}$ induit une flèche bien définie $\mathscr{F}(f)$ de $\mathscr{G}(\mathrm{X})$ vers $\mathscr{G}(\mathrm{Y})$ qui est égale à $\mathscr{G}(f)$. Les préfaisceaux (d'ensembles) sur C forment une catégorie que nous notons $\widehat{\mathsf{C}}$. Si X est un objet de C, il induit un préfaisceau $h^{\mathrm{X}} = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{X})$: c'est le *préfaisceau représenté par* X.

Il est bon de noter que la catégorie des préfaisceaux (d'ensembles) possède toutes les (petites) (co)limites et qu'elles sont calculées « objet par objet ». Les monomorphismes (respectivement les épimorphismes, respectivement les isomorphismes) de $\widehat{\mathsf{C}}$ sont les morphismes de préfaisceaux injectifs (respectivement surjectifs, respectivement bijectifs) en chaque objet.

Le lemme de Yoneda. Soit C une (petite) catégorie et soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur C. Le lemme de Yoneda fournit une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \cong \mathscr{F}(\mathrm{X})$$

pour tout objet X de C. Elle associe au morphisme $\varphi : \mathrm{X} \to \mathscr{F}$ de préfaisceaux l'élément $\varphi(\mathrm{X})(\mathrm{Id}_{\mathrm{X}})$ de $\mathscr{F}(\mathrm{X})$. En particulier, $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(h^{\mathrm{X}}, h^{\mathrm{Y}}) \cong h^{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ pour tout couple (X, Y) d'objets de C. Ainsi, l'association $\mathrm{X} \mapsto h^{\mathrm{X}}$ définit un foncteur pleinement fidèle appelé *plongement de Yoneda*. En raison de cette observation, nous noterons parfois indifféremment X et le préfaisceau qu'il représente.

Désignons par $\mathsf{C}/\mathscr{F}$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathsf{C}}/\mathscr{F}$ dont les objets sont de la forme $\mathrm{X} \to \mathscr{F}$ où X est un objet de C[1]. On dispose d'un foncteur source $s : \mathsf{C}/\mathscr{F} \to \widehat{\mathsf{C}}$ qui envoie $\mathrm{X} \to \mathscr{F}$ sur (le préfaisceau représenté par) X. On peut le voir comme un $\mathsf{C}/\mathscr{F}$-diagramme de $\widehat{\mathsf{C}}$; on sait qu'il possède une colimite dans $\widehat{\mathsf{C}}$ et en fait :

Lemme 1.1.2. *Le cocône naturel $s \to \Delta\mathscr{F}$ fait de $\mathscr{F}$ la colimite de s.*

Démonstration. Rappelons que si $\mathscr{G}$ est un préfaisceau sur C, un cocône η de s vers $\Delta\mathscr{G}$ consiste en la donnée, pour tout objet $u : \mathrm{X} \to \mathscr{F}$ de $\mathsf{C}/\mathscr{F}$, d'un morphisme $\eta(u) : \mathrm{X} \to \mathscr{G}$ tel que pour toute flèche $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ entre les objets $v : \mathrm{Y} \to \mathscr{F}$ et $u : \mathrm{X} \to \mathscr{F}$ de $\mathsf{C}/\mathscr{F}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta(v)"'] & & \mathrm{X} \arrow[dl, "\eta(u)"] \\ & \mathscr{G} & \end{tikzcd}$$

1. Vu comme préfaisceau sur C par le plongement de Yoneda.

commute. Le cocône évident $\iota : s \to \Delta\mathscr{F}$ envoie $u : \mathrm{X} \to \mathscr{F}$ sur $\iota(u) = u : s(u) = \mathrm{X} \to \mathscr{F}$: c'est un cocône par définition même des morphismes de la catégorie $\mathsf{C}/\mathscr{F}$. Dire que le cocône évident $s \to \Delta\mathscr{F}$ fait de $\mathscr{F}$ la colimite de s revient à dire que pour tout cocône $\eta : s \to \Delta\mathscr{G}$, il existe un unique morphisme $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de préfaisceaux tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{X} \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "\eta(u)"] & \\ \mathscr{F} \arrow[rr, "\varphi"] & & \mathscr{G} \end{tikzcd}$$

commute pour tout objet $u : \mathrm{X} \to \mathscr{F}$ de $\mathsf{C}/\mathscr{F}$. Soit donc $\eta : s \to \Delta\mathscr{G}$ un cocône.

– Construisons un morphisme $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de préfaisceaux possédant la propriété requise. Soit X un objet de C. Soit ξ un élément de $\mathscr{F}(\mathrm{X})$. D'après le lemme de Yoneda, ξ provient d'un unique morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathscr{F}$. Le morphisme u induit un morphisme $\eta(u) : \mathrm{X} \to \mathscr{G}$ et donc un objet ζ de $\mathscr{G}(\mathrm{X})$: on pose $\varphi(\mathrm{X})(\xi) = \zeta$.
  La collection des applications $\varphi(\mathrm{X})$ définit un morphisme de préfaisceaux de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$. Soit en effet $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de la catégorie C. Il s'agit de montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(\mathrm{X}) \arrow[r, "\varphi(\mathrm{X})"] \arrow[d, "\mathscr{F}(f)"] & \mathscr{G}(\mathrm{X}) \arrow[d, "\mathscr{G}(f)"] \\ \mathscr{F}(\mathrm{Y}) \arrow[r, "\varphi(\mathrm{Y})"] & \mathscr{G}(\mathrm{Y}) \end{tikzcd}$$

  commute. Soit ξ un élément de $\mathscr{F}(\mathrm{X})$; ξ est donné par un morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathscr{F}$. Par définition, $\xi = u(\mathrm{X})(\mathrm{Id}_{\mathrm{X}})$ donc

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \mathscr{F}(f)(u(\mathrm{X})(\mathrm{Id}_{\mathrm{X}})) = u(\mathrm{Y})(\mathrm{Id}_{\mathrm{X}} \circ f) = u(\mathrm{Y})(f)$$

  car $u : \mathrm{X} \to \mathscr{F}$ est une transformation naturelle. Or, si on pose $v = u \circ f : \mathrm{Y} \to \mathscr{F}$, alors

$$v(\mathrm{Y})(\mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}) = u \circ f(\mathrm{Y})(\mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}) = u(\mathrm{Y})(f \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}) = u(\mathrm{Y})(f).$$

  On en déduit que $\mathscr{F}(f)(\xi) = \zeta$ où ζ est associé au morphisme v.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "v"'] & & \mathrm{X} \arrow[dl, "u"] \\ & \mathscr{F} & \end{tikzcd}$$

  Par définition, $\varphi(\mathrm{Y})(\zeta)$ est l'élément de $\mathscr{G}(\mathrm{Y})$ induit par $\eta(v)$, c'est-à-dire que

$$\varphi(\mathrm{Y})(\zeta) = \eta(v)(\mathrm{Y})(\mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}).$$

  Par ailleurs, toujours par définition, $\varphi(\mathrm{X})(\xi)$ est l'élément θ de $\mathscr{G}(\mathrm{X})$ déterminé par $\eta(u) : \mathrm{X} \to \mathscr{G}$. Par conséquent, vu le calcul déjà mené pour $\mathscr{F}$,

$$\mathscr{G}(f)(\theta) = \eta(u)(\mathrm{Y})(f) = \eta(u) \circ f(\mathrm{Y})(\mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}) = \eta(v)(\mathrm{Y})(\mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}),$$

  où la dernière égalité suit de ce que η est un cocône donc $\eta(v) = \eta(u) \circ f$. Finalement,

$$\mathscr{G}(f)(\varphi(\mathrm{X})(\xi)) = \mathscr{G}(f)(\theta) = \eta(v)(\mathrm{Y})(\mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}) = \varphi(\mathrm{Y})(\zeta) = \varphi(\mathrm{Y})(\mathscr{F}(f)(\xi)),$$

  ce qu'il fallait démontrer.
  Le morphisme φ possède la propriété de commutation requise. Plus précisément, soit $u : \mathrm{X} \to \mathscr{F}$ un objet de $\mathsf{C}/\mathscr{F}$. Il s'agit de montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{X} \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "\eta(u)"] & \\ \mathscr{F} \arrow[rr, "\varphi"] & & \mathscr{G} \end{tikzcd}$$

commute. Soit Y un objet de C et soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme. Il s'agit de montrer que

$$\varphi(\mathrm{Y})(u(\mathrm{Y})(f)) = \eta(u)(\mathrm{Y})(f).$$

Posons $v = u \circ f$. Notons que comme η est un cocône, $\eta(v) = \eta(u) \circ f$ donc

$$\eta(u)(\mathrm{Y})(f) = \eta(u) \circ f(\mathrm{Y})(\mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}) = \eta(v)(\mathrm{Y})(\mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}).$$

Ainsi, $\eta(u)(f)$ est l'élément de $\mathscr{G}(\mathrm{Y})$ déterminé par $\eta(v)$ par la bijection du lemme de Yoneda. Or,

$$\varphi(\mathrm{Y})(u(\mathrm{Y})(f)) = \varphi(\mathrm{Y})(v(\mathrm{Y})(\mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}))$$

est égal à l'élément de $\mathscr{G}(\mathrm{Y})$ déterminé par $\eta(v)$ par définition de φ. L'égalité attendue est bien satisfaite.

– Montrons qu'il existe au plus un morphisme possédant les propriétés du morphisme φ construit à l'item précédent. Soit $\psi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de préfaisceaux possédant les propriétés requises. Soit X un objet de C. Soit ξ un élément de $\mathscr{F}(\mathrm{X})$; il est déterminé par un unique morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathscr{F}$. Comme ψ possède la propriété de commutation requise, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\mathrm{X},\mathrm{X}) \arrow[dl, "u(\mathrm{X})"'] \arrow[dr, "\eta(u)(\mathrm{X})"] & \\ \mathscr{F}(\mathrm{X}) \arrow[rr, "\psi(\mathrm{X})"] & & \mathscr{G}(\mathrm{X}) \end{tikzcd}$$

commute. En particulier,

$$\psi(\mathrm{X})(\xi) = \psi(\mathrm{X})(u(\mathrm{X})(\mathrm{Id}_{\mathrm{X}})) = \eta(u)(\mathrm{X})(\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}) = \varphi(\mathrm{X})(\xi)$$

par définition de φ. Ainsi, $\varphi(\mathrm{X})(\xi) = \psi(\mathrm{X})(\xi)$; comme ξ est quelconque, $\varphi(\mathrm{X}) = \psi(\mathrm{X})$; comme X est quelconque, $\varphi = \psi$, ce qu'il fallait démontrer.

□

Corollaire 1.1.3. *Soit $\mathscr{G}$ un préfaisceau sur C ; alors,*

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) = \lim_{\mathrm{X}\to\mathscr{F}} \mathscr{G}(\mathrm{X})$$

fonctoriellement en $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.

Démonstration. Par définition des colimites, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(-,\mathscr{G})$ transforme colimites en limites ; la fonctorialité vient de celle des limites et de celle des catégories $\mathsf{C}/\mathscr{F}$. □

Fonctorialité des catégories de préfaisceaux. Soient C et C' des catégories et soit $u : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ un foncteur. Le foncteur u induit un foncteur $\widehat{u}^* : \widehat{\mathsf{C}}' \to \widehat{\mathsf{C}}$ associant à un préfaisceau $\mathscr{F}$ le faisceau $\widehat{u}^*\mathscr{F} = \mathscr{F} \circ u$.

Lemme 1.1.4. *Si C est petite, le foncteur $\widehat{u}^*$ admet un adjoint à gauche que nous notons $\widehat{u}_!$.*

Démonstration. C'est [AGV71, Exposé I, Proposition 5.1]. Rappelons le principe de la démonstration. Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur C. Soit Y un objet de D. Considérons la catégorie $\mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}}$ suivante. Les objets sont les couples (X, m) formé d'un objets X de C et d'un morphisme $m : \mathrm{Y} \to u(\mathrm{X})$. Les flèches de (X, m) vers (X', m') sont les morphismes $\xi : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ tels que $m' = u(\xi) \circ m$; ils se composent de manière évidente et l'identité est tout aussi évidente. Si Y' est un objet de D et si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ est un morphisme, il induit un foncteur $\mathsf{I}_u^f : \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}} \to \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}'}$ par composition — nous dirons que l'association $\mathrm{Y}' \mapsto \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}'}$ est fonctorielle. On dispose en outre d'un foncteur $p_{\mathrm{Y}} : \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}} \to \mathsf{C}$ associant à un objet (X, m) de $\mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}}$ l'objet X de C. Si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ est un morphisme de D, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}} \arrow[rr, "\mathsf{I}_u^f"] \arrow[dr, "p_{\mathrm{Y}}"'] & & \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}'} \arrow[dl, "p_{\mathrm{Y}'}"] \\ & \mathsf{C} & \end{tikzcd}$$

est commutatif. On pose

$$\widehat{u}_!\mathscr{F}(\mathrm{Y}) = \operatorname{colim} \mathscr{F} \circ p_{\mathrm{Y}}.$$

La fonctorialité des colimites et de l'association $\mathrm{Y}' \mapsto \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}'}$ étend l'association ainsi définie en un préfaisceau $\widehat{u}_!\mathscr{F}$ sur D puis $\mathscr{F}' \mapsto \widehat{u}_!\mathscr{F}'$ en un foncteur $\widehat{u}_!$ de $\widehat{\mathsf{C}}$ vers $\widehat{\mathsf{D}}$ qui est adjoint à gauche du foncteur $\widehat{u}^*$. □

Le foncteur $\widehat{u}^*$ possède aussi un adjoint à droite que nous notons $\widehat{u}_*$ qui possède une description analogue à celle obtenue ci-dessus (*cf.* [Sta22, Tag 00XF]) — on peut aussi déduire l'existence de $\widehat{u}_*$ de la commutation aux colimites de $\widehat{u}^*$.

1.2 Cribles

Le but de cette sous-section est de rappeler la notion de crible qui est utile pour parler de façon commode de faisceaux sur des catégories possédant peu de produits fibrés.

Définition 1.2.1. Soit C une catégorie. Un *crible* de C est une sous-catégorie pleine D de C possédant la propriété suivante : si X est un objet de D et si $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est un morphisme de C, alors Y est un objet de D. Si X est un objet de C, un *crible de* X est un crible de la catégorie C/X.

Remarque. Soit D un crible de X, vu comme une sous-catégorie pleine de C/X. Considérons l'association R sur C attachant à un objet Y l'ensemble $\mathrm{R}(\mathrm{Y})$ des flèches $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ telles que (Y, f) est un objet de D. Si $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ est une flèche de C et si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est un élément de $\mathrm{R}(\mathrm{Y})$, alors $f \circ g$ est un élément de $\mathrm{R}(\mathrm{Z})$: en effet, g induit une flèche dans C/X de $(\mathrm{Z}, f \circ g)$ vers (Y, f) donc comme D est un crible, $(\mathrm{Z}, f \circ g)$ est un objet de D. On en déduit que l'association R s'étend en un foncteur de C vers la catégorie des ensembles qui est par définition un sous-préfaisceau du préfaisceau $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{X})$ représenté par X.

Réciproquement, soit R un sous-préfaisceau de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{X})$. Considérons la sous-catégorie pleine D de C/X dont les objets sont les couples (Y, f) où $f \in \mathrm{R}(\mathrm{Y})$. Alors, D est un crible de X. Soit en effet (Y, f) un objet de D et soit $g : (\mathrm{Z}, h) \to (\mathrm{Y}, f)$ un morphisme de C/X : il s'agit de prouver que (Z, h) est un objet de D. Par définition, $f \circ g = h$ donc $h = \mathrm{R}(g)(f) \in \mathrm{R}(\mathrm{Z})$. Par conséquent, (Z, h) est un objet de D.

Les cribles de C/X ne sont donc pas autre chose que les sous-préfaisceaux du préfaisceau $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{X})$ représenté par X.

Exemple 1.2.2. Soit C une catégorie. Le préfaisceau $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{X})$ est un crible de X pour tout objet X de C ; l'association $\mathrm{Y} \mapsto \emptyset$ définit un sous-préfaisceau de X appelé le *crible vide* de X.

Exemple 1.2.3. Soit X un objet d'une catégorie C et soit $(\mathrm{R}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de cribles de X.

- Considérons le foncteur R associant à un objet Y de C la réunion des ensembles $\mathrm{R}_i(\mathrm{Y})$. On vérifie aisément qu'on définit ainsi un crible R de X appelé la *réunion* des cribles R_i et noté $\mathrm{R} = \bigcup \mathrm{R}_i$.
- Considérons le foncteur S associant à un objet Y de C l'intersection des ensembles $\mathrm{R}_i(\mathrm{Y})$. On vérifie aisément qu'on définit ainsi un crible S de X appelé l'*intersection* des cribles R_i et noté $\mathrm{S} = \bigcap \mathrm{R}_i$.

Définition 1.2.4. Soit C une catégorie et soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de C. Soit R un crible de X. Le produit fibré $f^*\mathrm{R} = \mathrm{R} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ dans $\widehat{\mathsf{C}}$ est un préfaisceau sur C muni d'un monomorphisme vers Y fourni par la projection ; nous l'identifions à son image par cette projection, ce qui en fait un crible de Y : c'est le crible de Y déduit de R par *changement de base* le long de f.

Remarque. Par définition, le crible $\mathrm{R} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ — une fois identifié à un sous-préfaisceau de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{Y})$ — a pour valeur en un objet Z de C l'ensemble des morphismes $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ tels que $f \circ g$ appartient à $\mathrm{R}(\mathrm{Z})$.

Exemple 1.2.5. Avec les notations de la définition, si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est un élément de $\mathrm{R}(\mathrm{Y})$, alors $\mathrm{R} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y} = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{Y})$ par définition de la notion de crible.

Définition 1.2.6. Soit C une catégorie. Une *topologie* τ sur C consiste en la donnée, pour tout objet X de C, d'une classe $\mathcal{J}_\tau(\mathrm{X})$ de cribles de X qu'on appelle *cribles couvrants* ou *raffinements* de X pour la topologie τ, cette donnée étant assujettie aux conditions suivantes.

(T 1) Si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est un morphisme et si R est un crible couvrant de X, alors $\mathrm{R} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ est un crible couvrant de Y (stabilité par changement de base).

(T 2) Si R et R′ sont des cribles de X tels que R est couvrant et si $\mathrm{R}' \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ est un crible couvrant de Y pour tout $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ appartenant à R(Y), alors R′ est un crible couvrant de X (caractère local).

(T 3) Pour tout objet X de C, le crible $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{X})$ est couvrant. En particulier, $\mathcal{J}(\mathrm{X})$ est non vide pour tout tel X (identité).

Une catégorie munie d'une topologie est un *site*.

Exemple 1.2.7. Soit C une catégorie. La *topologie discrète* sur C est la topologie telle que tout crible d'un objet de C est couvrant. La *topologie grossière* sur C est la topologie telle que pour tout objet X, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{X})$ est le seul crible couvrant de X.

Lemme 1.2.8. *Soit* C *un site et soit* X *un objet de* C*. La classe* $\mathcal{J}(\mathrm{X})$ *des raffinements de* X *est alors stable par intersection et si* R *est un crible de* X *contenant*[2] *un crible couvrant de* X*, alors* R *est un crible couvrant de* X*. Ainsi, la catégorie* $\mathcal{J}(\mathrm{X})$ *munie de l'ordre induit par l'inclusion est cofiltrante.*

Remarque. En particulier, la topologie de C est discrète si, et seulement si, le crible vide de X est un raffinement de X pour tout objet X de C.

Démonstration. Soient R et R′ des cribles tels que R′ est un raffinement de X et R contient R′. On utilise pour démontrer que R est un raffinement de X l'axiome (T 2) : si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ appartient à R′(Y), alors $\mathrm{R}' \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y} = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{Y})$ est contenu dans $\mathrm{R} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$: il lui est dès lors égal donc $\mathrm{R} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ est un raffinement de Y. Prouvons désormais la propriété d'intersection finie. Le cas de l'intersection vide est couvert par l'axiome (T 3) : il suffit donc de le prouver pour l'intersection de deux raffinements. Soient R et R′ des raffinements de X ; posons $\mathrm{S} = \mathrm{R} \cap \mathrm{R}' : \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{S}(\mathrm{Y}) = \mathrm{R}(\mathrm{Y}) \cap \mathrm{R}(\mathrm{Y})$. D'après l'axiome (T 2), il suffit de vérifier que pour tout $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ appartenant à R(Y), $f^*\mathrm{S} = \mathrm{S} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ est un raffinement de X : or, on vérifie aisément que $f^*\mathrm{S} = f^*\mathrm{R}'$ car R est un crible donc $f^*\mathrm{S}$ est un raffinement de Y d'après l'axiome (T 1). □

Exemple 1.2.9. Soit X un espace topologique. Nous attachons à X la catégorie $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X})$ dont les objets sont les ouverts de X et dont les morphismes sont les inclusions d'ouverts. Si U est un ouvert de X et si R est un crible de U (vu comme objet de $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X})$), alors R(W) est vide — c'est automatiquement le cas si W n'est pas un ouvert de U car R(W) admet alors une application vers $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ouv}(\mathrm{X})}(\mathrm{W}, \mathrm{U}) = \emptyset$ — ou est un singleton pour tout ouvert W de X. On décrète qu'un tel crible R est couvrant lorsque la réunion des W tels que R(W) est non vide est égale à U — noter qu'elle est automatiquement incluse dans U. On obtient ainsi une topologie sur $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X})$ en vertu des propriétés suivantes des recouvrements ouverts :

- si $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est un recouvrement ouvert de U et si V est un ouvert de U, alors $(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{V})_{i\in\mathrm{I}}$ est un recouvrement ouvert de V ;
- si $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille d'ouverts de U, si $(\mathrm{V}_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est un recouvrement ouvert de U et si $(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{V}_j)_{i\in\mathrm{I}}$ est un recouvrement ouvert de V_j pour tout j, alors $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est un recouvrement ouvert de U ;
- les ouverts de U forment un recouvrement ouvert de U.

Si la topologie de l'espace X est grossière, alors la topologie de $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X})$ ainsi construite est la topologie grossière. En revanche, si X est un espace topologique discret non vide, alors la topologie induite sur $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X})$ n'est pas la topologie discrète au sens des sites : par exemple, le crible vide n'est pas un raffinement d'un ouvert non vide de X. La raison est qu'un site est discret s'il admet tous les raffinements possibles alors qu'un espace topologique est discret lorsqu'il admet tous les ouverts possibles.

2. Si R et R′ sont des sous-préfaisceaux de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{X})$, on dit que R contient R′ lorsque $\mathrm{R}'(\mathrm{Y}) \subseteq \mathrm{R}(\mathrm{Y})$ pour tout objet Y de C.

Définition 1.2.10. Soit C une catégorie et soient τ et τ' des topologies sur C. On dit que τ est *plus fine* que τ' lorsque $\mathcal{J}_{\tau'}(\mathrm{X}) \subseteq \mathcal{J}_{\tau}(\mathrm{X})$ pour tout objet X de C ; si c'est le cas, on dit aussi que τ' est plus grossière ou moins fine que τ.

Exemple 1.2.11. La topologie grossière (respectivement discrète) sur une catégorie C est plus grossière (respectivement plus fine) que toute topologie sur C.

Lemme 1.2.12. *Soit C une catégorie et soit $(\tau_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de topologies sur C ; si X est un objet de C, nous posons $\mathcal{J}_i(\mathrm{X}) = \mathcal{J}_{\tau_i}(\mathrm{X})$ et*

$$\mathcal{J}(\mathrm{X}) = \bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathcal{J}_i(\mathrm{X}).$$

La collection des classes $\mathcal{J}(\mathrm{X})$ induit alors une topologie τ sur C. C'est la topologie la plus fine qui soit plus grossière que τ_i pour tout i.

Définition 1.2.13. Avec les notations du lemme, nous appelons la topologie τ l'*intersection* des τ_i et nous la notons $\tau = \bigcap \tau_i$.

Corollaire 1.2.14. *Il existe une topologie τ' plus fine que τ_i pour tout i et plus grossière que toute autre topologie possédant cette propriété.*

Démonstration. Il suffit de considérer l'intersection des topologies t telles que t est plus fine que τ_i pour tout i — noter que la topologie discrète est une telle topologie. ☐

Faisons le lien avec le point de vue peut-être plus familier des prétopologies.

Définition 1.2.15. Soit $\Phi = (f_i : \mathrm{X}_i \to \mathrm{X})_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de morphismes d'une catégorie C. Le *crible engendré par la famille* Φ ou par les morphismes f_i est le crible R de X tel que pour tout objet Y de X, R(Y) est l'ensemble des morphismes $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ tels qu'il existe un indice i et une factorisation $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}_i \xrightarrow{f_i} \mathrm{X}$ de $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$. Si (C, τ) est un site et si X est un objet de C, une famille de morphismes de but X est *couvrante* si le crible qu'elle engendre est un crible couvrant de X pour la topologie τ.

Exemple 1.2.16. Soit X un espace topologique, soit U un ouvert de X et soit $(\mathrm{U}_i)_i$ une famille d'ouverts de U. Le crible engendré par les ouverts U_i, c'est-à-dire par les inclusions $\mathrm{U}_i \hookrightarrow \mathrm{U}$, associe à un ouvert W de X le singleton $*$ si W est inclus dans l'un des U_i et l'ensemble vide sinon. La famille $(\mathrm{U}_i \hookrightarrow \mathrm{U})_i$ est couvrante pour la topologie définie dans l'exemple 1.2.9 si, et seulement si, $(\mathrm{U}_i)_i$ est un recouvrement ouvert de U.

La notion de crible engendré mène naturellement à celle de topologie engendrée :

Définition 1.2.17. Soit C une catégorie ; donnons-nous, pour tout objet X de C, une classe C(X) de familles de morphismes de but X. Il existe alors une topologie τ qui est la moins fine des topologies pour lesquelles les cribles engendrés par les éléments de C(X) sont des raffinements de X pour tout objet X de C — c'est l'intersection de toutes les telles topologies — : on l'appelle la *topologie engendrée par la donnée* C(–).

En général, il est difficile de décrire la topologie engendrée au sens ci-dessus ; la situation s'améliore si la donnée C(–) est celle d'une prétopologie :

Définition 1.2.18. Soit C une catégorie. Une *prétopologie* sur C consiste en la donnée, pour tout objet X de C, d'un ensemble Cov(X) de familles de morphismes de but X, cette donnée étant assujettie aux axiomes suivants.

(PT 0) Soit $(\mathrm{X}_i \to \mathrm{X})_i$ un élément de Cov(X) et soit $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de C. Alors, pour tout i, le produit fibré $\mathrm{Y}_i \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ existe dans C.

(PT 1) Soit $(\mathrm{X}_i \to \mathrm{X})_i$ un élément de Cov(X) et soit $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de C. La famille $(\mathrm{X}_i \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y} \to \mathrm{Y})_i$ est alors un élément de Cov(Y) (stabilité par changement de base).

(PT 2) Si $(\mathrm{X}_i \to \mathrm{X})_{i\in \mathrm{I}}$ est un élément de Cov(X) et si, pour tout i, $(\mathrm{V}_{ij} \to \mathrm{U}_i)_{j\in \mathrm{J}_i}$ est un élément de $\mathrm{Cov}(\mathrm{U}_i)$, alors $(\mathrm{V}_{ij} \to \mathrm{U}_i \to \mathrm{X})_{i\in \mathrm{I}, j\in \mathrm{J}_i}$ est un recouvrement de X (caractère local).

(PT 3) Si $Y \to X$ est un isomorphisme, alors il existe un ensemble $I = \{i\}$ et une famille couvrante $(X_i \to X)_i$ de X telle que $X_i \to X = Y \to X$.

Remarque. Dans [AGV71, Exposé II, Définition 1.3], l'axiome (PT 3) est le même sauf qu'on ne considère que l'isomorphisme $\mathrm{Id}_X : X \to X$. En présence des axiomes (PT i) pour $i \leqslant 2$, les topologies engendrées sont les mêmes — car le crible de X engendré par un isomorphisme $Y \to X$ est égal à $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, X)$ — donc faire le choix de l'un ou l'autre est une question de goût du point de vue des sites.

Proposition 1.2.19 ([AGV71, Exposé II, Proposition 1.4])**.** *Soit* C *une catégorie munie d'une prétopologie* $\mathrm{Cov}(-)$*. La topologie engendrée par la donnée* $\mathrm{Cov}(-)$ *est alors la topologie* τ *telle que pour tout objet* X *de* C*, les raffinements de* X *pour* τ *sont les cribles de* X *contenant un crible engendré par un élément de* $\mathrm{Cov}(X)$*.*

Démonstration. Si X est un objet de C, nous notons $\mathcal{J}_E(X)$ la classe des cribles de X engendrés par un élément de $\mathrm{Cov}(X)$. Il s'agit donc de montrer que les raffinements de X pour la topologie τ forment une classe que nous notons $\mathcal{J}(X)$ qui est égale à la classe $\mathcal{J}'(X)$ des cribles contenant un élément de $\mathcal{J}_E(X)$. Si $R \in \mathcal{J}'(X)$, alors R contient un crible R' engendré par un élément Φ de $\mathrm{Cov}(X)$: par définition de τ, R' est couvrant pour τ donc R, qui contient R', est couvrant pour τ, c'est-à-dire que $R \in \mathcal{J}(X)$. On a ainsi prouvé que $\mathcal{J}'(X) \subseteq \mathcal{J}(X)$.

Pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit de prouver que la collection des classes $\mathcal{J}'(X)$ induit une topologie sur C. L'axiome (T 3) est vérifié : en effet, $\mathrm{Id}_X : X \to X$ est un élément de $\mathrm{Cov}(X)$ pour tout X en vertu de l'axiome (PT 3) donc le crible engendré par Id_X, qui est égal à $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, X)$, appartient à $\mathcal{J}'(X)$. En outre, si R est un élément de $\mathcal{J}'(X)$, il contient un crible R' engendré par une famille couvrante $(X_i \to X)_i$ de X ; pour tout morphisme $Y \to X$, le crible $R' \times_X Y$ est contenu dans $R \times_X Y$ et contient la famille $(X_i \times_X Y \to Y)_i$ qui est couvrante d'après l'axiome (PT 1) donc $R \times_X Y$ appartient à $\mathcal{J}'(X)$.

Reste à montrer le caractère local. Pour cela, il suffit de prouver que si X est un objet de C, si R est un crible de X et si S est un élément de $\mathcal{J}_E(X)$ tel que $R \times_X Y \in \mathcal{J}'(X)$ pour tout $f : Y \to X \in S(Y)$, alors $R \in \mathcal{J}'(X)$. Soit donc X, soit R et soit S ainsi. Comme S est un élément de $\mathcal{J}_E(X)$, il existe un élément $(f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ de $\mathrm{Cov}(X)$ tel que $f_i \in S(X_i)$ pour tout i. Alors, $R \times_X X_i$ appartient à $\mathcal{J}'(X_i)$ pour tout i donc il existe $(g_{ij} : X_{ij} \to X_i)_j$ appartenant à $\mathrm{Cov}(X_i)$ tel que $R \times_X X_i$ contient le crible engendré par $(g_{ij} : X_{ij} \to X)_j$. Alors, $(f_i \circ g_{ij} : X_{ij} \to X_i \to X)_{ij}$ appartient à $\mathrm{Cov}(X)$ d'après l'axiome (PT 2) et engendre un crible inclus dans R donc R appartient à $\mathcal{J}'(X)$ comme annoncé. $\square$

Lemme 1.2.20. *Soit* C *une catégorie admettant les produits fibrés et soit* τ *une topologie sur* C *; si* X *est un objet de* C*, notons* $\mathrm{Cov}(X)$ *la classe des familles couvrantes pour la topologie* τ*, c'est-à-dire engendrant un crible couvrant de* X *pour la topologie* τ*. Les classes* $\mathrm{Cov}(X)$ *définissent alors une prétopologie sur* C *et la topologie engendrée par la donnée* $\mathrm{Cov}(-)$ *est égale à* τ*.*

Démonstration. Les produits fibrés existent dans C par hypothèse donc l'axiome (PT 0) est automatiquement vérifié. Vérifions les autres axiomes.

(PT 1) Soit $(X_i \to X)_i$ un élément de $\mathrm{Cov}(X)$ engendrant un crible R et soit $Y \to X$ un morphisme de C ; alors, le crible engendré par la famille $(X_i \times_X Y \to Y)_i$ est égal à $R \times_X Y$ donc c'est un crible de τ d'après l'axiome T 1), de sorte que $(X_i \times_X Y \to Y)_i$ appartient à $\mathrm{Cov}(Y)$ par définition de ce dernier.

(PT 2) Soit $(X_i \to X)_i$ un élément de $\mathrm{Cov}(X)$ et soit, pour tout i, $(X_{ij} \to X_i)_{j \in J_i}$ un élément de $\mathrm{Cov}(X_i)$. Notons R le crible engendré par la famille $(X_{ij} \to X_i \to X)_{ij}$: comme $(X_i \to X)_i$ engendre un crible couvrant de X, d'après l'axiome T 2) R appartient à $\mathcal{J}(X)$ si, et seulement si, $R_i = R \times_X X_i$ appartient à $\mathcal{J}(X_i)$ pour tout i ; si i est un indice fixé, $R_i \in \mathcal{J}(X_i)$ si, et seulement si, $R_{ij} = R \times_{X_i} X_{ij} = R \times_X X_{ij}$ appartient à $\mathcal{J}(X_{ij})$: or, par définition de R, $R \times_X X_{ij} = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, X_{ij})$ donc R_{ij} appartient à $\mathcal{J}(X_{ij})$ d'après l'axiome T 3).

(PT 3) Si $f : Y \to X$ est un isomorphisme, alors le crible de X qu'il engendre est $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, X)$ qui est couvrant pour τ d'après l'axiome T 3) donc $(f : Y \to X)$ est un élément de $\mathrm{Cov}(X)$.

Ainsi, $\mathrm{Cov}(-)$ est une prétopologie sur C qui engendre clairement τ. $\square$

1.3 Faisceaux

Définition 1.3.1. Soit (C, τ) un site et soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur C. On dit que $\mathscr{F}$ est *séparé* (respectivement est un *faisceau*) pour la topologie τ lorsque pour tout objet X de C et tout raffinement $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{X}$ de X pour la topologie τ, l'application évidente

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(\mathrm{R}, \mathscr{F})$$

est injective (respectivement bijective). Les faisceaux pour la topologie τ forment une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathsf{C}}$ que nous notons $\widetilde{\mathsf{C}}$ ou $\widetilde{\mathsf{C}}_\tau$ lorsqu'une confusion sur la topologie considérée est à craindre.

Remarque. Lorsque la topologie de C est engendrée par une prétopologie, on retrouve naturellement la notion usuelle de faisceau (voir notamment [AGV71, Exposé II, Remarque 3.3]). Cela tient essentiellement au fait qu'on peut calculer le foncteur L défini ci-dessous grâce aux cribles engendrés par une famille couvrante de la prétopologie car ces cribles forment un sous-ensemble cofinal des cribles d'un objet donné de C (proposition 1.2.19).

Remarque. Un faisceau pour la topologie τ est parfois appelé un τ-faisceau.

Profitons-en pour définir les topos :

Définition 1.3.2. Un *topos* est une catégorie équivalente à la catégorie $\widetilde{\mathsf{C}}$ pour un site C convenable.

Exemple 1.3.3. Soit C une (petite) catégorie. La catégorie $\widehat{\mathsf{C}}$ des préfaisceaux sur C est un topos car c'est la catégorie des faisceaux sur C pour la topologie grossière. La catégorie finale $*$, qui possède un objet et un morphisme de cet objet vers lui-même, est un topos car c'est la catégorie des faisceaux sur la catégorie vide. Notons que la catégorie des ensembles est équivalente, et même isomorphe, à la catégorie des préfaisceaux sur $*$ et est donc un topos. Ce dernier joue un rôle très important dans la théorie des topos.

Dans [AGV71, Exposé II, 3. Faisceau associé à un préfaisceau] est construit, pour tout site $\mathsf{C} = (\mathsf{C}, \tau)$, un foncteur

$$\mathrm{L}_\tau = \mathrm{L} : \widehat{\mathsf{C}} \to \widehat{\mathsf{C}}, \quad \mathscr{F} \mapsto \mathrm{L}\mathscr{F}$$

possédant les propriétés suivantes (voir notamment [AGV71, Exposé II, Proposition 3.2]).

1. Si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau sur C et si X est un objet de C, alors

$$\mathrm{L}\mathscr{F}(\mathrm{X}) = \varinjlim_{\mathcal{J}(\mathrm{X})^{op}} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(\mathrm{R}, \mathscr{F})$$

— rappelons que $\mathcal{J}(\mathrm{X})$ est cofiltrante pour l'inclusion (lemme 1.2.8) — et la fonctorialité de $\mathrm{L}\mathscr{F}$ est déterminée par la fonctorialité des colimites filtrantes et des catégories $\mathcal{J}(\mathrm{X})$. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{X})$ est un raffinement de X, on a en particulier un morphisme

$$\ell(\mathscr{F})(\mathrm{X}) : \mathscr{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{L}\mathscr{F}(\mathrm{X}).$$

Ces morphismes s'assemblent en un morphisme $\ell(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \to \mathrm{L}\mathscr{F}$ de préfaisceaux et les morphismes $\ell(\mathscr{F})$ induisent une transformation naturelle $\ell : \mathrm{Id}_{\widehat{\mathsf{C}}} \to \mathrm{L}$.

2. Le foncteur L commute aux limites finies car c'est le cas des colimites filtrantes dans la catégorie des ensembles.
3. Pour tout préfaisceau $\mathscr{F}$ sur C, le préfaisceau $\mathrm{L}\mathscr{F}$ est séparé.
4. Si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau sur C, alors $\mathscr{F}$ est séparé si, et seulement si, le morphisme $\ell(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \to \mathrm{L}\mathscr{F}$ est un monomorphisme. Dans ce cas, le préfaisceau $\mathrm{L}\mathscr{F}$ est un faisceau.
5. Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur C. Les assertions suivantes sont alors équivalentes.
   - Le préfaisceau $\mathscr{F}$ est un faisceau.
   - Le morphisme $\ell(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \to \mathrm{L}\mathscr{F}$ est un isomorphisme.

On déduit de ces propriétés le théorème suivant.

Théorème 1.3.4 ([AGV71, Exposé II, Théorème 3.4])**.** *Soit* (C, τ) *un site. L'inclusion* $i : \widetilde{\mathsf{C}} \to \widehat{\mathsf{C}}$ *possède alors un adjoint à gauche* $a_\tau : \widehat{\mathsf{C}} \to \widetilde{\mathsf{C}}$*. Le foncteur* $i \circ a_\tau$ *est naturellement isomorphe au foncteur* $\mathrm{L} \circ \mathrm{L}$ *et modulo cet isomorphisme, l'unité* $\mathrm{Id}_{\widehat{\mathsf{C}}} \to i \circ a_\tau$ *de cette adjonction est donnée en tout préfaisceau* $\mathscr{F}$ *par* $\ell(\mathrm{L}\mathscr{F}) \circ \ell(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \to \mathrm{L} \circ \mathrm{L}(\mathscr{F})$*.*

Définition 1.3.5. Le foncteur a_τ est le foncteur de *faisceautisation* ou de *faisceau associé* ; si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau, $a_\tau(\mathscr{F})$ est le *faisceautisé* de ou le *faisceau associé* à $\mathscr{F}$. Notons que a_τ commute aux colimites car c'est un adjoint à gauche, et aux limites finies car c'est le cas du foncteur L.

Remarque. Il résulte formellement du fait que le foncteur d'inclusion $\widetilde{\mathsf{C}} \to \widehat{\mathsf{C}}$ possède un adjoint à gauche que la limite dans $\widehat{\mathsf{C}}$ d'un diagramme de la catégorie $\widetilde{\mathsf{C}}$ est un faisceau et est la limite de ce diagramme dans la catégorie des faisceaux. En outre, le fait que a_τ soit un adjoint à gauche implique que la catégorie $\widetilde{\mathsf{C}}$ possède les (petites) colimites : elles sont obtenues en appliquant le foncteur a_τ à la colimite du diagramme correspondant vu comme un diagramme dans la catégorie des préfaisceaux. Il s'ensuit qu'un topos possède les (petites) limites et les (petites) colimites.

Notation 1.3.6. Soit (C, τ) un site. Nous notons ε_τ le foncteur de C vers $\widetilde{\mathsf{C}_\tau}$ composé du plongement de Yoneda et du foncteur a_τ : autrement dit, par définition, pour tout objet X de C, $\varepsilon_\tau(\mathrm{X})$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{X})$.

Exemple 1.3.7. La topologie *canonique* est la topologie la plus fine parmi les topologies pour lesquelles les préfaisceaux représentables, c'est-à-dire les préfaisceaux isomorphes à $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{X})$ pour un objet X de C, sont des faisceaux ; une topologie moins fine que la topologie canonique est dite *sous-canonique.* Beaucoup de topologies sont sous-canoniques en géométrie algébrique : c'est le cas de la topologie fidèlement plate quasi-compacte donc de toutes les topologies plus grossières comme la topologie fidèlement plate de présentation finie, la topologie étale, la topologie de Zariski... Ce n'est néanmoins pas le cas de la topologie réel-étale sur la catégorie des schémas sur un schéma de base comme nous l'avons déjà remarqué.

Les sous-catégories strictement pleines de la catégorie des préfaisceaux. Ce paragraphe est un aparté : il montre qu'on peut détecter certaines sous-catégories d'un topos qui sont des topos par les propriétés de leur foncteur d'inclusion.

Définition 1.3.8. Soit C une catégorie. Une sous-catégorie D de C est *strictement pleine* lorsqu'elle est égale à l'image essentielle du foncteur d'inclusion $\mathsf{D} \to \mathsf{C}$. Autrement dit, la sous-catégorie D est pleine et tout objet de C isomorphe à un objet de D est un objet de D.

Exemple 1.3.9. La sous-catégorie pleine de la catégorie des groupes dont les objets sont les groupes abéliens est strictement pleine.

Si C est un groupoïde connexe contenant au moins deux objets et si x est un point de C, alors la sous-catégorie pleine de C dont la classe des objets est $\{x\}$ n'est pas strictement pleine. Par exemple, si X est un espace topologique connexe par arcs dont le cardinal est supérieur ou égal à 2 et si x est un point de X, alors la sous-catégorie pleine du groupoïde fondamental $\pi_{\leqslant 1}(\mathrm{X})$ dont l'unique objet est x est une sous-catégorie pleine de $\pi_{\leqslant 1}(\mathrm{X})$ qui n'est pas strictement pleine.

Soit C une (petite) catégorie. Soit τ une topologie sur C. La topologie τ induit une sous-catégorie strictement pleine de $\widehat{\mathsf{C}}$, à savoir la sous-catégorie $\widetilde{\mathsf{C}}_\tau$ des faisceaux sur C pour la topologie τ. Cependant, en général, toute sous-catégorie strictement pleine de $\widehat{\mathsf{C}}$ ne peut être réalisée ainsi : le foncteur d'inclusion d'une catégorie de faisceaux dans la catégorie des préfaisceaux correspondante est un adjoint à droite et son adjoint à gauche est exact, c'est-à-dire commute aux limites finies [3]. Le théorème suivant énonce que c'est la seule restriction :

3. Un foncteur est *exact à gauche* (respectivement exact *à droite*) lorsqu'il commute aux limites (respectivement colimites) *finies* ; il est exact s'il est exact à gauche et à droite. Dans le cas d'un foncteur additif entre catégories additives, on retrouve la notion usuelle d'exactitude. Un adjoint à gauche commute aux colimites quelconques : il est donc exact si, et seulement si, il est exact à gauche.

Théorème 1.3.10 (Giraud, [AGV71, Exposé II, Théorème 5.5])**.** *L'application $\tau \mapsto \widehat{\mathsf{C}}_\tau$ est une bijection de l'ensemble des topologies sur C sur l'ensemble* SCat *des sous-catégories strictement pleines de $\widehat{\mathsf{C}}$ dont le foncteur d'inclusion admet un adjoint à gauche exact.*

Démonstration. Nous nous contentons de décrire la réciproque. Soit C' une sous-catégorie strictement pleines de $\widehat{\mathsf{C}}$ dont le foncteur d'inclusion i admet un adjoint à gauche a. Si X est un objet de C, nous notons $\mathcal{T}(\mathrm{X})$ l'ensemble des cribles $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{X}$ tels que le morphisme $a(\mathrm{R}) \to a(\mathrm{X})$ est un isomorphisme. La collection des ensembles $\mathcal{T}(\mathrm{X})$ induit une topologie sur C. Cela définit la bijection réciproque de l'application de l'énoncé du théorème. □

1.4 Foncteurs (co)continus, morphismes de sites et de topos

Définition 1.4.1. Soient C et D des sites. Un foncteur $u : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ (entre les catégories sous-jacentes) est *continu* lorsque pour tout faisceau $\mathscr{G}$ sur D, le préfaisceau $\widehat{u}^*\mathscr{G} = \mathscr{G} \circ u$ est un faisceau. On note alors $u_s : \widetilde{\mathsf{D}} \to \widetilde{\mathsf{C}}$ le foncteur induit par u entre catégories de faisceaux.

Remarque. On montre (voir par exemple la preuve de [Sta22, Tag 00WW]) que si les topologies de C et D sont données par des prétopologies — par exemple si C et D admettent les produits fibrés —, la continuité de u est équivalente à la conjonction des conditions suivantes ([Sta22, Tag 00WV]) :

1. si V est un objet de C et si $(f_i : \mathrm{V}_i \to \mathrm{V})_i$ est une famille couvrante dans C, alors $(u(f_i) : u(\mathrm{V}_i \to u(\mathrm{V}))_i$ est couvrante ;
2. si V est un objet de C, si $(\mathrm{V}_i \to \mathrm{V})_i$ est une famille couvrante dans C et si $\mathrm{T} \to \mathrm{V}$ est un morphisme de C, alors le produit fibré $u(\mathrm{V}_i) \times_{u(\mathrm{V})} u(\mathrm{T})$ existe et le morphisme évident $u(\mathrm{V}_i \times_{\mathrm{V}} \mathrm{T}) \to u(\mathrm{V}_i) \times_{u(\mathrm{V})} u(\mathrm{T})$ est un isomorphisme.

La satisfaction de la première assertion de l'item 2. est automatique en présence de celle de l'item 1. en vertu de l'axiome (PT 0) que vérifie la prétopologie de D.

Lemme 1.4.2. *Soient (C, τ) et (C', τ') des sites et soit $u : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ un foncteur continu. Le foncteur $u^s : \mathscr{F} \mapsto a_{\tau'}(\widehat{u}_!\mathscr{F})$ est alors un adjoint à gauche de u_s.*

Démonstration. En effet, pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur C et tout faisceau $\mathscr{G}$ sur C',

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathsf{C}'}}(u^s\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}'}}(\widehat{u}_!\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(\mathscr{F}, \widehat{u}^*\mathscr{G}) = \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathsf{C}}}(\mathscr{F}, u_s\mathscr{G})$$

fonctoriellement en $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. □

Définition 1.4.3. Un *morphisme de sites* d'un site C' vers un cite C est un foncteur continu $u : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ [4] tel que le foncteur $u^s : \widetilde{\mathsf{C}} \to \widetilde{\mathsf{C}'}$ est exact à gauche, c'est-à-dire qu'il commute aux limites finies.

Remarque. Il résulte de [AGV71, Exposé III, Proposition 1.3 5)] que la condition sur u^s est par exemple satisfaite lorsque $\widehat{u}_!$ est exact à gauche puisque u^s préserve les limites préservées par $\widehat{u}_!$. C'est par exemple le cas lorsque C admet les limites finies et u les préserve d'après [AGV71, Exposé I, Proposition 5.4 4)].

Exemple 1.4.4. Si Z est un espace topologique, nous notons $\mathsf{Ouv}(\mathrm{Z})$ la catégorie des ouverts de Z. Nous munissons $\mathsf{Ouv}(\mathrm{Z})$ de la topologie décrite dans l'exemple 1.2.9 ; nous notons $\widetilde{\mathrm{Z}}$ le topos associé.

Soient X et Y des espaces topologiques et soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application continue. L'application f induit un foncteur $u : \mathsf{Ouv}(\mathrm{Y}) \to \mathsf{Ouv}(\mathrm{X})$ associant à un ouvert V de Y l'ouvert $f^{-1}(\mathrm{V})$ de X. Il est connu en topologie que ce foncteur est continu et par définition, u_s est le foncteur f_* bien connu en topologie. En particulier, il résulte de l'adjonction (f^{-1}, f_*) que $u^s = f^{-1}$ est exact. Ainsi, u induit un morphisme $\varphi : \widetilde{\mathrm{X}} \to \widetilde{\mathrm{Y}}$ de topos tel que $\varphi^* = f^{-1}$ et $\varphi_* = f_*$: pour cette raison, nous notons $\varphi = f$. Lorsque Y est sobre [5], *tout* morphisme de topos est construit ainsi : plus précisément, si $\psi : \widetilde{\mathrm{X}} \to \widetilde{\mathrm{Y}}$

4. Le sens des flèches est intentionnel.

5. Par définition, un espace topologique est *sobre* si tout fermé irréductible d'icelui possède un et un seul point générique. Presque tous les espaces topologiques rencontrés « dans la nature » sont sobres, y compris les espaces topologiques dont les points sont fermés et l'espace topologique sous-jacent à un schéma ou l'espace réel associé à un schéma car tout espace localement spectral est sobre.

est un morphisme de topos, alors il est isomorphe (en un sens naturel mais à préciser ; voir 2.1.1) à $f : \widetilde{\mathrm{X}} \to \widetilde{\mathrm{Y}}$ pour une application continue $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ bien déterminée ([AGV71, Exposé IV, 4.2.3]). C'est en cela que les topos sont une généralisation des espaces topologiques (sobres [6]).

Définition 1.4.5. Soient E et E' des topos. Un *morphisme de topos* de E vers E' consiste en la donnée d'un couple $f = (f^*, f_*)$ de foncteurs $f^* : \mathsf{E}' \to \mathsf{E}$ et $f_* : \mathsf{E} \to \mathsf{E}'$ et d'une adjonction du couple (f^*, f_*) tels que le foncteur f^* est exact.

Remarque. Notre convention diffère de celle de SGA 4 [AGV71, Exposé IV, Définition 3.1] (mais suit celle de [Sch94] et de [Sta22]) : dans SGA 4, un morphisme de topos de E vers E' est un couple (f_*, f^*) où $f_* : \mathsf{E} \to \mathsf{E}'$ et $f^* : \mathsf{E}' \to \mathsf{E}$ sont tels que (f^*, f_*) est un couple de foncteurs adjoints et f^* est exact. Nous avons fait le choix de présenter les morphismes dans le sens de l'adjonction.

Par définition :

Lemme 1.4.6. *Soient C et C' des sites ; considérons un morphisme de sites de C' vers C de foncteur continu sous-jacent $u : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$. Le couple (u^s, u_s) induit alors un morphisme de topos $f : \widetilde{\mathsf{C}'} \to \widetilde{\mathsf{C}}$.*

Définition 1.4.7. Soient C et C' des sites et soit u un foncteur de C vers C'. On dit que u est *cocontinu* lorsqu'il possède la propriété suivante : pour tout objet X de C et tout raffinement R de $u(\mathrm{X})$, le crible de X formé des flèches $f : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ telles que $u(f)$ se factorise par R est un raffinement de X.

Remarque. En termes de familles couvrantes, c'est la condition suivante ([Sta22, Tag 00XJ]) : pour tout objet X de C et toute famille couvrante $(\mathrm{Y}_j \to u(\mathrm{X}))_{j \in \mathrm{J}}$, il existe une famille couvrante $(\mathrm{X}_i \to \mathrm{X})_i$ de X telle que $(u(\mathrm{X}_i) \to u(\mathrm{X}))_i$ est un raffinement de $(\mathrm{Y}_j \to u(\mathrm{X}))_j$, c'est-à-dire qu'il existe une application $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ et, pour tout i, un morphisme $u(\mathrm{X}_i) \to \mathrm{Y}_{\alpha(i)}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} u(\mathrm{X}_i) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Y}_{\alpha(i)} \arrow[dl] \\ & u(\mathrm{X}) & \end{tikzcd}$$

commute. La famille $(u(\mathrm{X}_i) \to u(\mathrm{X}))_i$ n'est pour autant *pas couvrante* en général.

Proposition 1.4.8. *Soient (C, τ) et C' des sites et soit $u : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ un foncteur entre les catégories sous-jacentes ; notons $\widehat{u}_*$ l'adjoint à droite du foncteur $\widehat{u}^* = - \circ u : \widehat{\mathsf{C}'} \to \widehat{\mathsf{C}}$. Le foncteur u est alors cocontinu si, et seulement si, $\widehat{u}_* \mathscr{F}$ est un faisceau pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur C. Si c'est le cas, notons u_* le foncteur induit de $\widetilde{\mathsf{C}}$ vers $\widetilde{\mathsf{C}'}$; le foncteur $a_\tau \circ \widehat{u}^* = u^* : \widetilde{\mathsf{C}'} \to \widetilde{\mathsf{C}}$ est alors adjoint à gauche du foncteur u_* et est exact.*

Démonstration. Voir [AGV71, Exposé III, Proposition 2.2] et [AGV71, Exposé III, Proposition 2.3 1), 3)]. □

Corollaire 1.4.9. *Si $u : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ est un foncteur cocontinu entre sites, il induit un morphisme $f = (u^*, u_*)$ de topos de $\widetilde{\mathsf{C}}$ vers $\widetilde{\mathsf{C}'}$.*

En particulier, soient C et C' des sites et soit $u : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ un foncteur continu et cocontinu. Dans ce cas, on note $u_!$ le foncteur u^s adjoint à gauche de $u_s = u^*$ défini dans le lemme 1.4.2. Dans ce cas, on dispose d'une suite $(u_!, u^*, u_*)$ de foncteurs entre catégories de faisceaux où chaque foncteur est adjoint à gauche du suivant (quand on lit de gauche à droite). Le cas qui va nous intéresser est celui de la *localisation*.

6. Il n'y a pas lieu d'espérer mieux : si Z est un espace topologique, il existe un espace topologique sobre Z' et une application continue $i : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}'$ initiale parmi les applications continues de Z vers un espace topologique sobre et l'application induite par i entre topos est un isomorphisme ([AGV71, Exposé IV, 4.2.1]).

1.5 Localisation

Commençons par la notion de topologie induite :

Définition 1.5.1. Soit C une catégorie, soit C' un site et soit $u : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$. La *topologie induite sur* C *par* C' *au moyen de* u ou topologie induite par u est la topologie la plus fine parmi les topologies sur C faisant de u un foncteur continu.

Soit (C, τ) un site. Rappelons que si $\mathscr{X}$ est un préfaisceau sur C, nous notons $\mathsf{C}/\mathscr{X}$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathsf{C}}/\mathscr{X}$ formée des préfaisceaux de la forme $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{Y})$ où Y est un objet de C. On dispose d'un foncteur d'oubli $j_{\mathscr{X}} : \mathsf{C}/\mathscr{X} \to \mathsf{C}$ qui associe à un objet $(\mathrm{Y}, f : \mathrm{Y} \to \mathscr{X})$ de $\mathsf{C}/\mathscr{X}$ l'objet Y de C et qui est identique sur les flèches. Nous munissons la catégorie $\mathsf{C}/\mathscr{X}$ de la topologie induite par $j_{\mathscr{X}}$: nous notons cette dernière $\tau_{\mathscr{X}}$. Le foncteur $\widehat{j_{\mathscr{X}}}^*$ possède un adjoint à gauche $\widehat{j_{\mathscr{X}!}} : \widehat{\mathsf{C}/\mathscr{X}} \to \widehat{\mathsf{C}}$, donné explicitement par

$$\widehat{j_{\mathscr{X}!}}\mathscr{F}(\mathrm{Y}) = \coprod_{u : \mathrm{Y} \to \mathscr{X}} \mathscr{F}(u).$$

Le foncteur $\widehat{j_{\mathscr{X}!}}$ se factorise par le foncteur d'oubli $\widehat{\mathsf{C}}/\mathscr{X} \to \widehat{\mathsf{C}}$ en un foncteur $\widehat{e_{\mathscr{X}}} : \widehat{\mathsf{C}/\mathscr{X}} \to \mathsf{C}/\mathscr{X}$ — en effet, il suffit pour le montrer de vérifier que $\widehat{j_{\mathscr{X}!}}$ envoie l'objet final $f : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ sur $\mathscr{X}$; d'après le lemme de Yoneda, $f = \varinjlim_{\mathrm{Y} \to \mathscr{X}} \mathrm{Y}$ et d'après [AGV71, Exposé I, Proposition 5.4, 3)],

$$\widehat{j_{\mathscr{X}!}}(f) = \operatorname*{colim}_{u : \mathrm{Y} \to \mathscr{X}} j_{\mathscr{X}}(u) = \operatorname*{colim}_{u : \mathrm{Y} \to \mathscr{X}} \mathrm{Y}$$

donc $\widehat{j_{\mathscr{X}!}}(f) = \mathscr{X}$ toujours d'après le lemme de Yoneda. En outre, le foncteur $\widehat{e_{\mathscr{X}}}$ est une équivalence de catégories : un quasi-inverse est donné par

$$(\mathscr{F} \to \mathscr{X}) \mapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}/\mathscr{X}}(\mathrm{Y} \to \mathscr{X}, \mathscr{F} \to \mathscr{X}).$$

En particulier, $\widehat{j_{\mathscr{X}!}}$ commute aux produits fibrés reflète les monomorphismes : dès lors, si $\mathrm{Y} \to \mathscr{X}$ est un objet de $\mathsf{C}/\mathscr{X}$, $\widehat{j_{\mathscr{X}!}}$ induit une correspondance biunivoque entre les cribles de $\mathrm{Y} \to \mathscr{X}$ dans $\mathsf{C}/\mathscr{X}$ et les cribles de Y dans C.

Lemme 1.5.2. *Soit* $\mathrm{Y} \to \mathscr{X}$ *un objet de* $\mathsf{C}/\mathscr{X}$. *Si* $\mathrm{R} \hookrightarrow (\mathrm{Y} \to \mathscr{X})$ *est un crible de* $\mathrm{Y} \to \mathscr{X}$, *alors* R *est couvrant (pour la topologie induite par* $j_{\mathscr{X}}$*) si, et seulement si,* $\widehat{j_{\mathscr{X}!}}\mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{Y}$ *est un crible couvrant de* Y *pour la topologie* τ. *En conséquence, le foncteur* $j_{\mathscr{X}}$ *est cocontinu.*

Démonstration. Voir [AGV71, Exposé III, Proposition 5.2, 1), 2)]. □

Comme le foncteur $j_{\mathscr{X}}$ est en outre continu par définition de la topologie sur $\mathsf{C}/\mathscr{X}$, il induit des foncteurs

$$j_{\mathscr{X}!} : \widetilde{\mathsf{C}/\mathscr{X}} \to \widetilde{\mathsf{C}}, \ \ j_{\mathscr{X}}^* : \widetilde{\mathsf{C}} \to \widetilde{\mathsf{C}/\mathscr{X}}, \ \ j_{\mathscr{X}*} : \widetilde{\mathsf{C}/\mathscr{X}} \to \widetilde{\mathsf{C}}$$

où chaque foncteur est adjoint à gauche du suivant (de gauche à droite). Si $\mathscr{P}$ est un préfaisceau sur $\mathsf{C}/\mathscr{X}$, le foncteur $j_{\mathscr{X}!}$ associe à $a_{\tau_{\mathscr{X}}}(\mathscr{P})$ le faisceau associé au préfaisceau $\widehat{j_{\mathscr{X}!}}\mathscr{P}$ déjà décrit (proposition 1.4.8) — rappelons que $a_{\tau_{\mathscr{X}}}$ désigne le foncteur de faisceautisation. Autrement dit, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathsf{C}/\mathscr{X}} \arrow[r, "\widehat{j_{\mathscr{X}!}}"] \arrow[d, "a_{\tau_{\mathscr{X}}}"] & \widehat{\mathsf{C}} \arrow[d, "a_\tau"] \\ \widetilde{\mathsf{C}/\mathscr{X}} \arrow[r, "j_{\mathscr{X}!}"] & \widetilde{\mathsf{C}} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme naturel près.

Définition 1.5.3. On appelle $j_{\mathscr{X}}^*$ (respectivement $j_{\mathscr{X}*}$, respectivement $j_{\mathscr{X}!}$) le foncteur de restriction (respectivement le foncteur image directe, respectivement le foncteur prolongement par le vide).

Exemple 1.5.4. Ces noms proviennent de la topologie. Plus précisément, soit X un espace topologique et soit U un ouvert de X. Le foncteur d'inclusion de $\mathsf{Ouv}(\mathrm{U})$ vers $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X})$, induit par l'immersion ouverte $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$, se factorise par le foncteur d'oubli j_{U} de $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X})/\mathrm{U}$ vers $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X})$ et le foncteur $\mathsf{Ouv}(\mathrm{U}) \to \mathsf{Ouv}(\mathrm{X})/\mathrm{U}$ est un *isomorphisme* de catégories : cela permet d'interpréter les foncteurs définis ci-dessus comme des foncteurs entre $\widetilde{\mathrm{U}}$ et $\widetilde{\mathrm{X}}$. Ils admettent alors les expressions suivantes.

- Le foncteur $j^* : \widetilde{\mathrm{X}} \to \widetilde{\mathrm{U}}$ associe à un faisceau $\mathscr{G}$ sur X le faisceau $j^{-1}\mathscr{G}$ (familier en topologie) sur U, défini par la règle suivante : $j^*\mathscr{G}(\mathrm{V}) = \mathscr{G}(\mathrm{V})$ pour tout ouvert V de U.
- Le foncteur $j_* : \widetilde{\mathrm{U}} \to \widetilde{\mathrm{X}}$ associe à un faisceau $\mathscr{F}$ sur X le faisceau $j_*\mathscr{F}$ (familier en topologie) sur X, défini par la règle suivante : $j_*\mathscr{F}(\mathrm{V}) = \mathscr{F}(\mathrm{V} \cap \mathrm{U})$ pour tout ouvert V de X.
- Le foncteur $j_! : \widetilde{\mathrm{U}} \to \widetilde{\mathrm{X}}$ associe à un faisceau $\mathscr{F}$ sur X le faisceau $j_!\mathscr{F}$ associé au préfaisceau qui attache à un ouvert V de X l'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{V})$ si V est inclus dans U et l'ensemble vide sinon. En particulier, comme la faisceautisation préserve les fibres, $(j_!\mathscr{F})_x = \emptyset$ pour tout $x \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{U}$; mais bien sûr, *a priori*, $j_!\mathscr{F}(\mathrm{V})$ n'est pas vide si V est un ouvert de X tel que $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}$ est non vide.

Proposition 1.5.5. *Le foncteur $j_{\mathscr{X}!}$ se factorise par $\widetilde{\mathsf{C}}/a_\tau(\mathscr{X}) \to \widetilde{\mathsf{C}}$ en un foncteur $\widetilde{e_{\mathscr{X}}} : \widetilde{\mathsf{C}/\mathscr{X}} \to \widetilde{\mathsf{C}}/a_\tau(\mathscr{X})$. Ce foncteur est une équivalence de catégories. Si $*$ désigne l'objet final de $\widetilde{\mathsf{C}}$, c'est-à-dire le faisceau constant de valeur $*$, alors le foncteur*

$$\widetilde{e_{\mathscr{X}}} \circ j^*_{\mathscr{X}} : \widetilde{\mathsf{C}} \to \widetilde{\mathsf{C}}/a_\tau(\mathscr{X})$$

est isomorphe au foncteur de changement de base le long de $a_\tau(\mathscr{X}) \to *$ qui envoie un faisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{F} \times a_\tau(\mathscr{X}) \to a_\tau(\mathscr{X})$ (de morphisme structural la deuxième projection).

Démonstration. Voir [AGV71, Exposé III, Proposition 5.4] — le raisonnement permettant de montrer que $\widetilde{e_{\mathscr{X}}}$ est une équivalence est détaillé dans la preuve de [Sta22, Tag 00Y1]. □

Nous notons aussi $a_\tau : \widehat{\mathsf{C}/\mathscr{X}} \to \widetilde{\mathsf{C}/\mathscr{X}}$ le foncteur de faisceautisation. Par ailleurs, nous notons $h : \mathsf{C}/\mathscr{X} \to \widehat{\mathsf{C}/\mathscr{X}}$ le plongement de Yoneda — associant donc à $\mathrm{Y} \to \mathscr{X}$ le préfaisceau $(\mathrm{Z} \to \mathscr{X}) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}/\mathscr{X}}(\mathrm{Z} \to \mathscr{X}, \mathrm{Y} \to \mathscr{X})$ sur $\mathsf{C}/\mathscr{X}$ — et $h_{\mathscr{X}} : \mathsf{C}/\mathscr{X} \to \widehat{\mathsf{C}}/\mathscr{X}$ la factorisation du plongement de Yoneda : ainsi, par définition, $h_{\mathscr{X}}(\mathrm{Y} \to \mathscr{X}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}/\mathscr{X}}(-, \mathrm{Y} \to \mathscr{X})$. Enfin, nous notons $(a_\tau)_{\mathscr{X}} : \widehat{\mathsf{C}}/\mathscr{X} \to \widetilde{\mathsf{C}}/a_\tau(\mathscr{X})$ la factorisation analogue de a_τ qui associe à $u : \mathscr{P} \to \mathscr{X}$ le $a_\tau(\mathscr{X})$-faisceau $a_\tau(u) : a_\tau(\mathscr{P}) \to a_\tau(\mathscr{X})$.

Proposition 1.5.6. *Le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}/\mathscr{X} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \widehat{\mathsf{C}/\mathscr{X}} \arrow[r, "a_\tau"] \arrow[d, "\widehat{e_{\mathscr{X}}}"] & \widetilde{\mathsf{C}/\mathscr{X}} \arrow[d, "\widetilde{e_{\mathscr{X}}}"] \\
\mathsf{C}/\mathscr{X} \arrow[r, "h_{\mathscr{X}}"] & \widehat{\mathsf{C}}/\mathscr{X} \arrow[r, "(a_\tau)_{\mathscr{X}}"] & \widetilde{\mathsf{C}}/a_\tau(\mathscr{X})
\end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme naturel près. En notant $j_{a_\tau(\mathscr{X})!} : \widetilde{\mathsf{C}}/a_\tau(\mathscr{X}) \to \widetilde{\mathsf{C}}$ le foncteur associant à $\mathscr{F} \to a_\tau(\mathscr{X})$ le faisceau $\mathscr{F}$ et $j^*_{a_\tau(\mathscr{X})} : \widetilde{\mathsf{C}} \to \widetilde{\mathsf{C}}/a_\tau(\mathscr{X})$ le foncteur associant à $\mathscr{F}$ le $a_\tau(\mathscr{X})$-faisceau $\mathscr{F} \times a_\tau(\mathscr{X}) \to a_\tau(\mathscr{X})$ (de morphisme structural la deuxième projection), les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathsf{C}/\mathscr{X}} \arrow[r, "j_{\mathscr{X}!}"] \arrow[d, "\widetilde{e_{\mathscr{X}}}"] & \widetilde{\mathsf{C}} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
\widetilde{\mathsf{C}}/a_\tau(\mathscr{X}) \arrow[r, "j_{a_\tau(\mathscr{X})!}"] & \widetilde{\mathsf{C}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathsf{C}} \arrow[r, "j^*_{\mathscr{X}}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \widetilde{\mathsf{C}/\mathscr{X}} \arrow[d, "\widetilde{e_{\mathscr{X}}}"] \\
\widetilde{\mathsf{C}} \arrow[r, "j^*_{a_\tau(\mathscr{X})}"] & \widetilde{\mathsf{C}}/a_\tau(\mathscr{X})
\end{tikzcd}$$

sont aussi commutatifs à isomorphisme près.

Démonstration. Cela résulte de la définition de $\widehat{e_{\mathscr{X}}}$ et $\widetilde{e_{\mathscr{X}}}$. □

2. Sous-topos ouverts et fermés

2.1 Compléments sur les topos

Morphismes de topos isomorphes.

Définition 2.1.1. Soient E, E' et F des topos, soit f un morphisme de topos de E vers F et soit f' un morphisme de E' vers F. Un *isomorphisme* de f sur f' est une équivalence de catégorie $u : \mathsf{E} \to \mathsf{E}'$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathsf{E} \arrow[d, "u"] & \mathsf{F} \arrow[l, "f^*"'] \arrow[dl, "f'^*"] \\ \mathsf{E}' & \end{tikzcd}$$

commute à isomorphisme près.

La notion de plongement.

Définition 2.1.2. Soient E et E' des topos et soit $f : \mathsf{E}' \to \mathsf{E}$ un morphisme de topos. On dit que f est un *plongement* lorsque f_* est pleinement fidèle.

Remarque. C'est le cas si, et seulement si, pour tout objet $\mathscr{F}$ de E, la counité $f^* f_* \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ est un isomorphisme.

Définition 2.1.3 (sous-topos)**.** Soit E un topos. Un *sous-topos* de E est une sous-catégorie strictement pleine F de E qui est un topos et telle que le foncteur d'inclusion $\alpha : \mathsf{F} \hookrightarrow \mathsf{E}$ est de la forme i_* où $i : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ est un morphisme de topos, dès lors bien déterminé : on l'appelle l'*inclusion* de F dans E.

2.2 Ouvert d'un topos, sous-topos ouvert

Soit C un site ; notons $\widetilde{\mathsf{C}}$ le topos associé. La catégorie $\widetilde{\mathsf{C}}$ possède un objet final : il s'agit du faisceau $*$ associant à un objet U de C l'ensemble $*$ (singleton). Ainsi, tout topos (c'est-à-dire toute catégorie équivalente à la catégorie des faisceaux sur un site) possède un objet final. La définition suivante est celle de SGA4 ([AGV71, Exposé IV, Définition 8.3]) :

Définition 2.2.1. Un *ouvert* d'un topos E est un sous-objet de l'objet final E.

Lemme 2.2.2. *Soit C une catégorie. Si $\mathscr{P}$ est un préfaisceau sur C, nous notons $\mathcal{E}_{\mathscr{P}}$ la classe des objets* W *de C tels que $\mathscr{P}(\mathrm{W})$ est vide.*

Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau et soit $\mathscr{G}$ un sous-préfaisceau de $*$. La classe des morphismes de préfaisceaux de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$ est alors vide si $\mathcal{E}_{\mathscr{G}}$ n'est pas incluse dans $\mathcal{E}_{\mathscr{F}}$ et est un singleton si $\mathcal{E}_{\mathscr{G}}$ est incluse dans $\mathcal{E}_{\mathscr{F}}$. En particulier, si $\mathscr{F}$ est un sous-préfaisceau de $*$, alors il existe des morphismes $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ et $\mathscr{G} \to \mathscr{F}$ si, et seulement si, $\mathcal{E}_{\mathscr{F}} = \mathcal{E}_{\mathscr{G}}$: ces morphismes alors uniques et sont des isomorphismes réciproques.

Démonstration. Si $\mathcal{E}_{\mathscr{G}}$ n'est pas incluse dans $\mathcal{E}_{\mathscr{F}}$, alors il existe un objet W de C tel que $\mathscr{G}(\mathrm{W})$ est vide et $\mathscr{F}(\mathrm{W})$ est non vide. En particulier, il n'y a pas d'application de $\mathscr{F}(\mathrm{W})$ vers $\mathscr{G}(\mathrm{W})$; *a fortiori*, il n'y a pas de morphisme de préfaisceaux de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$. Supposons que $\mathcal{E}_{\mathscr{G}}$ soit incluse dans $\mathcal{E}_{\mathscr{F}}$. Soit W un objet de C. Comme $\mathscr{G}$ est un sous-faisceau de $*$, $\mathscr{G}(\mathrm{W})$ est vide ou égal à $*$. S'il est vide, alors $\mathscr{F}(\mathrm{W})$ est vide par hypothèse donc il existe une unique application $\varphi(\mathrm{W})$ de $\mathscr{F}(\mathrm{W})$ vers $\mathscr{G}(\mathrm{W})$. Sinon, comme $\mathscr{G}(\mathrm{W}) = *$, il existe une unique application de $\varphi(\mathrm{W})$ de $\mathscr{F}(\mathrm{W})$ vers $* = \mathscr{G}(\mathrm{W})$. Montrons que les $\varphi(\mathrm{W})$ s'assemblent en un morphisme de préfaisceaux φ de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$. Soit $f : \mathrm{W}' \to \mathrm{W}$ un morphisme de C ; il s'agit de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathrm{W}) & \xrightarrow{\varphi(\mathrm{W})} & \mathscr{G}(\mathrm{W}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{F}(f)} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{G}(f)} \\ \mathscr{F}(\mathrm{W}') & \xrightarrow{\varphi(\mathrm{W}')} & \mathscr{G}(\mathrm{W}') \end{array}$$

est commutatif. Si $\mathscr{G}(\mathrm{W}) = \emptyset$, alors $\mathscr{F}(\mathrm{W})$ est vide par hypothèse donc le diagramme commute de façon évidente. Sinon, $\mathscr{G}(\mathrm{W})$ est non vide donc $\mathscr{G}(\mathrm{W}')$ est non vide puisqu'il reçoit une application de source non vide : par conséquent, $\mathscr{G}(\mathrm{W}') = *$ donc le diagramme commute encore de façon évidente. L'unicité de φ résulte immédiatement de l'unicité de l'application de $\mathscr{F}(\mathrm{W})$ vers $\mathscr{G}(\mathrm{W})$ pour pour tout objet W de C. Si en outre, $\mathscr{F}$ est un sous-préfaisceau de $*$ tel que $\mathcal{E}_{\mathscr{F}} = \mathcal{E}_{\mathscr{G}}$, alors ce qui précède fournit des morphismes $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ et $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{F}$; $\mathrm{Id}_{\mathscr{F}}$ et $\psi \circ \varphi$ sont des morphismes de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{F}$ donc ils sont égaux ; de même, $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathscr{G}}$: par conséquent, φ et ψ sont des isomorphismes réciproques. □

Exemple 2.2.3. Soit X un espace topologique ; considérons le topos associé $\widetilde{\mathrm{X}}$: c'est la catégorie des faisceaux (d'ensembles) sur X. Soit U un ouvert de X. Considérons le faisceau $\mathscr{U}$ associant à un ouvert W de X l'ensemble $\emptyset$ si W n'est pas inclus dans U et l'ensemble $*$ si W est inclus dans U : ce n'est autre que le préfaisceau représenté par U. *Le préfaisceau $\mathscr{U}$ est un faisceau.* En effet, soit W un ouvert de X et soit $(\mathrm{W}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'ouverts de X de réunion W. Si W n'est pas inclus dans U, alors il existe $k \in \mathrm{I}$ tel que W_k n'est pas inclus dans U : les ensembles

$$\mathscr{U}(W),\ \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathscr{U}(\mathrm{W}_i),\ \prod_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{I}} \mathscr{U}(\mathrm{W}_i \cap \mathrm{W}_j)$$

sont alors vides car le produit d'ensembles dont l'un est vide est l'ensemble vide donc la propriété de faisceau est évidente. Si W est inclus dans U, alors W_i est inclus dans U pour tout i donc les ensembles

$$\mathscr{U}(\mathrm{W}),\ \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathscr{U}(\mathrm{U}_i),\ \prod_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{I}} \mathscr{U}(\mathrm{W}_i \cap \mathrm{W}_j)$$

sont des produits de singletons et sont dès lors des singletons : la propriété de faisceau est encore évidente. Ainsi, $\mathscr{U}$ est un sous-faisceau de $*$. Notons $\mathcal{E}_{\mathrm{U}}$ l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathscr{U}}$ introduit dans le lemme précédent : par définition de $\mathscr{U}$, il s'agit de l'ensemble des ouverts W de X tels que W n'est pas inclus dans U. On constate que si U' est un ouvert de X inclus dans U, alors $\mathcal{E}_{\mathrm{U}}$ est inclus dans $\mathcal{E}_{\mathrm{U}'}$ d'où d'après le lemme un unique morphisme de $\mathscr{U}'$ vers $\mathscr{U}$. On a ainsi défini un foncteur $\mathrm{U} \mapsto \mathscr{U}$ de $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X})$ vers la sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathrm{X}}$ formée des sous-faisceaux de $*$ qui est pleinement fidèle d'après le lemme 2.2.2.

Soit $\mathscr{G}$ un sous-faisceau de $*$ sur X. La classe $\mathcal{E}_{\mathscr{G}}$ est alors l'ensemble des ouverts W de X tels que $\mathscr{G}(\mathrm{W}) = \emptyset$. Notons $\mathrm{U}_{\mathscr{G}} = \mathrm{U}$ la réunion des ouverts W *n'appartenant pas* à $\mathcal{E}_{\mathscr{G}}$. Alors, $\mathcal{E}_{\mathrm{U}} = \mathcal{E}_{\mathscr{G}}$ donc $\mathscr{U}$ et $\mathscr{G}$ sont canoniquement isomorphes — et même égaux si on choisit toujours le « même » singleton. En effet, par définition même de U, l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathrm{U}}$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathscr{G}}$. Réciproquement, soit W un ouvert de X tel que $\mathscr{U}(\mathrm{W})$ est non vide, c'est-à-dire que W est un ouvert de U ; alors, l'inclusion de W dans U induit un morphisme de $\mathscr{G}(\mathrm{U})$ vers $\mathscr{G}(\mathrm{W})$: il suffit dès lors de prouver que $\mathscr{G}(\mathrm{U})$ est non vide pour établir que $\mathscr{G}(\mathrm{W})$ est non vide. Or, comme $\mathscr{G}$ est un faisceau, on dispose d'une suite

$$\mathscr{G}(\mathrm{U}) \longrightarrow \prod_{\mathrm{V}\notin\mathcal{E}_{\mathscr{G}}} \mathscr{G}(\mathrm{V}) \overset{p^*}{\underset{q^*}{\rightrightarrows}} \prod_{\mathrm{V}\notin\mathcal{E}_{\mathscr{G}},\mathrm{V}'\notin\mathcal{E}_{\mathscr{G}}} \mathscr{G}(\mathrm{V}\cap\mathrm{V}')$$

qui identifie $\mathscr{G}(\mathrm{U})$ à l'égalisateur de (p^*, q^*). La source de p^* est un singleton car $\mathscr{G}(\mathrm{V})$ est un singleton pour tout $\mathrm{V} \in \mathcal{E}_{\mathscr{G}}$; en outre, si V' est un ouvert de V et si $\mathrm{V} \notin \mathcal{E}_{\mathscr{G}}$, alors $\mathscr{G}(\mathrm{V}')$ reçoit une flèche de $\mathscr{G}(\mathrm{V})$ et est dès lors non vide : en particulier, $\mathscr{G}(\mathrm{V}\cap\mathrm{V}')$ est non vide pour tous ouverts V et V' de X n'appartenant tout deux pas à $\mathcal{E}_{\mathscr{G}}$ donc le but de p^* est un singleton. En conséquence, $\mathscr{G}(\mathrm{U})$ est un singleton et est en particulier non vide. En outre, si $\mathscr{G}'$ est un sous-faisceau de $*$ et si $\mathscr{G}' \to \mathscr{G}$ est un morphisme de faisceaux, en posant $\mathrm{U}' = \mathrm{U}_{\mathscr{G}'}$, il vient $\mathcal{E}_{\mathrm{U}} = \mathcal{E}_{\mathscr{G}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{G}'} = \mathcal{E}_{\mathrm{U}'}$ d'où un morphisme de $\mathscr{U}'$ vers $\mathscr{U}$ qui provient d'un morphisme de U' dans U : l'association $\mathscr{G} \mapsto \mathrm{U}_{\mathscr{G}}$ est fonctorielle et ce foncteur est naturellement un quasi-inverse (voire un inverse) du foncteur $\mathrm{U} \mapsto \mathscr{U}$.

Ainsi, les ouverts du topos $\widetilde{\mathrm{X}}$ correspondent aux ouverts de l'espace X.

Les ouverts des topos généralisent donc les ouverts des espaces topologiques — comme il se doit. La question naturelle est la suivante : un ouvert d'un topos E « est-il » un sous-topos de E ? La question n'a bien sûr pas de sens ainsi posée puisque les objets ne sont pas du bon type ; une meilleure question est donc : peut-on associer de manière naturelle un sous-topos de E à un ouvert de E ? Nous allons montrer que la réponse est positive.

Retour sur la localisation. Soit E un topos et soit $\mathscr{X}$ un objet de E. Il suit des résultats de la sous-section 1.5 que la catégorie $\mathsf{E}/\mathscr{X}$ des objets au-dessus de $\mathscr{X}$ est un topos. Nous définissons un morphisme de topos de $\mathsf{E}/\mathscr{X}$ vers E appelé *morphisme d'inclusion* de $\mathsf{E}/\mathscr{X}$ vers E. Le morphisme d'inclusion consiste en une suite $(j_{\mathscr{X}!}, j^*_{\mathscr{X}}, j_{\mathscr{X}*})$ de foncteurs adjoints — ainsi, $(j_{\mathscr{X}!}, j^*_{\mathscr{X}})$ et $(j^*_{\mathscr{X}}, j_{\mathscr{X}*})$ sont des couples de foncteurs adjoints et le second induit un morphisme de topos de $\mathsf{E}/\mathscr{X}$ vers E — et on peut expliciter $j_{\mathscr{X}!}$ et $j^*_{\mathscr{X}}$ comme suit.

- Le foncteur $j_{\mathscr{X}!} : \mathsf{E}/\mathscr{X} \to \mathsf{E}$ est le foncteur « source » d'oubli de la flèche structurale : il associe à la flèche $\mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ l'objet $\mathscr{Y}$ de E et il est identique sur les flèches.
- Le foncteur $j^*_{\mathscr{X}} : \mathsf{E} \to \mathsf{E}/\mathscr{X}$ associe à un objet $\mathscr{F}$ de E l'objet $\mathscr{F} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$.

Noter que $j_{\mathscr{X}!}$ envoie l'objet final de $\mathsf{E}/\mathscr{X}$ sur $\mathscr{X}$ et n'est donc pas exact à gauche en général, ce qui lève toute éventuelle ambiguïté sur le sens du morphisme d'inclusion.

Considérons désormais le cas particulier où $\mathscr{X}$ est un ouvert U de E, c'est-à-dire un sous-objet de l'objet final de $*$; notons $j : \mathsf{E}_{\mathrm{U}} \to \mathsf{E}$ le foncteur de localisation. Comme $\mathrm{U} \to *$ est un monomorphisme, le foncteur $j_!$ d'oubli de la structure d'objet au-dessus de U est pleinement fidèle. D'après [AGV71, Exposé I, 5.7], il s'ensuit que son biadjoint j_* est un foncteur pleinement fidèle : par définition, le morphisme d'inclusion $j : \mathsf{E}/\mathrm{U} \to \mathsf{E}$ est un plongement de topos.

Définition 2.2.4. Soient E et F des topos et soit $f : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ un plongement de topos. On dit que f est un *plongement ouvert* lorsque f est isomorphe au plongement de topos défini par un ouvert de E, dès lors uniquement déterminé : c'est l'image par $f_!$ — qui existe sous-cette hypothèse — de l'objet final de F. Si E' est un sous-topos de E, on dit que E' est un *sous-topos ouvert* de E lorsque le morphisme de topos d'inclusion $\mathsf{E}' \to \mathsf{E}$ est un plongement ouvert.

2.3 Complémentaire fermé d'un sous-topos ouvert

Exemple 2.3.1. Soit U un ouvert d'un espace topologique X et soit F le complémentaire fermé de U. Notons j (respectivement i) l'inclusion de U (respectivement de F) dans X. L'application $i : \mathrm{F} \to \mathrm{X}$ induit un morphisme de topos i de $\widetilde{\mathrm{F}}$ vers $\widetilde{\mathrm{X}}$. Soit $\mathscr{F}$ est un faisceau sur F ; alors pour tout ouvert V de U, $i_*\mathscr{F}(\mathrm{V}) = \mathscr{F}(\mathrm{V} \cap \mathrm{F}) = \mathscr{F}(\emptyset) = *$ car $\mathscr{F}$ est un faisceau. Réciproquement, soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur X tel que $j^*\mathscr{F}$ est final. Considérons $\mathscr{G} = i^*\mathscr{F}$ et le morphisme évident $\mathscr{F} \to i_*\mathscr{G}$: il suffit de montrer que ce dernier est un isomorphisme. On peut le vérifier fibre à fibre. Par hypothèse, $\mathscr{F}$ et $i_*\mathscr{G}$ coïncident sur U donc c'est évident sur U ; si $x \in \mathrm{F}$, alors

$$(i_*\mathscr{G})_x = \varinjlim_{x \in \mathrm{V}} \mathscr{G}(\mathrm{V} \cap \mathrm{F}) = \mathscr{G}_x = \mathscr{F}_x.$$

Ainsi, i_* identifie $\widetilde{\mathrm{F}}$ au sous-topos de $\widetilde{\mathrm{X}}$ formé des faisceaux $\mathscr{F}$ sur X tels que $j^*\mathscr{F}$ est final.

Cette situation est en fait générale :

Proposition 2.3.2. *Soit E un topos et soit U un sous-topos ouvert de E déterminé par un ouvert U de E. Notons F la sous-catégorie strictement pleine de E formée des objets $\mathscr{G}$ de E tels que $j^*\mathscr{G}$ est un objet final de U. Alors, F est un sous-topos de E.*

Démonstration. Si X est un objet de E, on pose

$$i^*\mathrm{X} = \mathrm{U} \coprod_{\mathrm{U} \times \mathrm{X}} \mathrm{X},$$

l'amalgamation étant faite le long des projections $\mathrm{X} \times \mathrm{U} \to \mathrm{X}, \mathrm{U}$. On vérifie que le foncteur i^* est adjoint à gauche de l'inclusion i_* de F dans E, et que i^* est exact à gauche ([AGV71, Exposé IV, Proposition 9.3.4]). D'après le théorème 1.3.10, F est un topos et $i = (i^*, i_*)$ est un plongement de F dans E. □

Définition 2.3.3. Le topos F de la proposition est le *sous-topos fermé complémentaire de l'ouvert* U *de* E ou du sous-topos ouvert U ; le morphisme $i = (i^*, i_*)$ où i^* est défini dans la preuve ci-dessus est le *morphisme d'inclusion* de F dans E. Comme l'ouvert U est déterminé par F — c'est l'objet $i_*(\emptyset_{\mathsf{F}})$ de

E où $\emptyset_{\mathsf{F}}$ est l'objet initial de F —, on l'appelle aussi l'*ouvert complémentaire* du sous-topos fermé F et le sous-topos qui lui correspond est le *sous-topos ouvert complémentaire* de F. Un *plongement fermé* est un plongement $\mathsf{E}' \to \mathsf{E}$ isomorphe au plongement $\mathsf{F}' \to \mathsf{E}$ pour un sous-topos fermé F' convenable.

Remarque. Si U est un ouvert de E, par définition, les objets du complémentaire fermé sont les objets $\mathscr{G}$ de E tels que le morphisme $\mathscr{G} \times \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ est un isomorphisme : si E est la catégorie des faisceaux sur un site C, on voit que c'est la classe des faisceaux $\mathscr{G}$ tels que $\mathscr{G}(\mathrm{X}) = *$ dès que $\mathrm{U}(\mathrm{X}) = *$.

Terminons par la définition du foncteur de recollement.

Définition 2.3.4. Soit E un topos, soit U un ouvert de E, soit $j = (j_!, j^*, j_*)$ le plongement ouvert correspondant et soit $i = (i^*, i_*)$ le plongement correspondant au sous-topos fermé complémentaire de U. Le *foncteur de recollement* est le foncteur $\rho = i^* j_*$.

3. Recollement du site étale et du site réel étale

3.1 Le recollement abstrait

Soit C une catégorie. Considérons des topologies τ et τ' sur C et leur intersection $\tau \cap \tau'$, c'est-à-dire la topologie la plus fine parmi les topologies plus grossières que τ et τ'. Comme tout crible couvrant pour $\tau \cap \tau'$ est un crible couvrant pour τ et pour τ' par définition, si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau sur C qui est un faisceau pour τ ou pour τ', alors c'est un faisceau pour $\tau \cap \tau'$. Autrement dit, les foncteurs

$$\mathrm{Id} : (\mathsf{C}, \tau \cap \tau') \to (\mathsf{C}, \tau), \quad \mathrm{Id} : (\mathsf{C}, \tau \cap \tau') \to (\mathsf{C}, \tau')$$

sont continus. Ils induisent donc des morphismes de topos

$$j = (j^*, j_*) : \widetilde{\mathsf{C}}_{\tau} \to \widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}, \quad i = (i^*, i_*) : \widetilde{\mathsf{C}}_{\tau'} \to \widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}.$$

Notons que j_* et i_* sont évidemment pleinement fidèles : les morphismes de topos j et i sont donc des plongements.

Proposition ([Sch94, (2.2) Proposition])**.** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le morphisme j est un plongement ouvert et le morphisme i est le plongement du sous-topos fermé complémentaire.*
2. *Pour tout objet X de C, il existe un raffinement R de X pour la topologie τ tel que pour tout morphisme $\mathrm{U} \to \mathrm{X}$ de C tel que $(\mathrm{U} \to \mathrm{X}) \in \mathrm{R}(\mathrm{U})$, le crible vide est un raffinement de U pour la topologie τ'.*

Rappelons que si U est un objet de C, $\varepsilon_{\tau}(\mathrm{U})$ désigne le faisceautisé de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, \mathrm{U})$ pour τ.

Démonstration. Notons $\emptyset_{\tau'}$ l'objet initial du topos $\widetilde{\mathsf{C}}_{\tau'}$. D'après [AGV71, Exposé II, Proposition 4.6, 2)], si U est un objet de C, alors le crible vide est un raffinement de U pour la topologie τ' si, et seulement si, $\varepsilon_{\tau'}(\mathrm{U}) = \emptyset_{\tau'}$. Posons $\mathrm{W} = i_*(\emptyset_{\tau'})$: ainsi,

$$\mathrm{W}(\mathrm{X}) = \begin{cases} * & \text{si } \varepsilon_{\tau'}(\mathrm{X}) = \emptyset_{\tau'}, \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, si $\varepsilon_{\tau'}(\mathrm{X}) = \emptyset_{\tau'}$, alors X est couvert par le crible vide pour la topologie τ' donc d'après la formule du faisceautisé d'un préfaisceau, $\emptyset_{\tau'}(\mathrm{X}) = * = \mathrm{W}(\mathrm{X})$; sinon, toujours d'après la formule explicite, $\varepsilon_{\tau'}(\mathrm{X}) \neq \emptyset$ donc $\mathrm{W}(\mathrm{X}) = \emptyset$. Le faisceau $\mathrm{W} \in \widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}$ est un sous-faisceau de $*$ et détermine donc un topos ouvert $\widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}/\mathrm{W}$.

Supposons l'assertion de l'item 2. satisfaite. Nous allons d'abord montrer que j est isomorphe au plongement ouvert $\widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}/\mathrm{W} \to \widetilde{\mathsf{C}}$. Soit $\mathscr{F}$ un objet de $\widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}$. L'objet $j^*\mathscr{F}$ de $\widetilde{\mathsf{C}}_{\tau}$ est alors le faisceau associé au préfaisceau $\mathscr{F}$ pour la topologie τ.

Soit X un objet de C tel que $\varepsilon_{\tau'}(\mathrm{X}) = \emptyset_{\tau'}$. Alors, le crible vide est un raffinement de X pour la topologie τ'. Si R est un raffinement de X pour la topologie τ, il contient le crible vide : c'est donc un raffinement pour la topologie τ' est dès lors pour la topologie $\tau \cap \tau'$. Ainsi, puisque $\mathscr{F}$ est un faisceau pour la topologie $\tau \cap \tau'$, d'après la formule explicite du faisceau associé, $j^*\mathscr{F}(\mathrm{X}) = \mathscr{F}(\mathrm{X})$. Par conséquent,

$$\mathrm{W} \times j_* j^* \mathscr{F} : \mathrm{X} \mapsto \begin{cases} \mathscr{F}(\mathrm{X}) & \text{si } \varepsilon_{\tau'}(\mathrm{X}) = \emptyset_{\tau'}, \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, si $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(\mathscr{F}, \mathrm{W}) = \{\varphi\}$ est non vide, de sorte que $\mathscr{F}(\mathrm{X}) = \emptyset$ si $\varepsilon_{\tau'}(\mathrm{X}) \neq \emptyset_{\tau'}$ d'après le lemme 2.2.2, alors on déduit de φ et du morphisme d'adjonction un morphisme $\mathscr{F} \to \mathrm{W} \times j_* j^* \mathscr{F}$ qui est visiblement un isomorphisme fonctoriel en $\mathscr{F}$.

Le faisceau $j^*\mathrm{W}$ *est l'objet final de* $\widetilde{\mathsf{C}}_\tau$. Soit en effet X un objet de C. Si le crible vide est un raffinement de X pour la topologie τ, alors comme $j^*\mathrm{W}$ est un τ-faisceau,

$$j^*\mathrm{W}(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(\emptyset, j^*\mathrm{W}) = *.$$

Sinon, d'après l'assertion de l'item 2., il existe un crible couvrant R de X pour la topologie τ, *nécessairement non vide*, tel que pour tout $\mathrm{U} \to \mathrm{X}$ appartenant à R(U), le crible vide recouvre U pour la topologie τ'. On va montrer qu'il existe un morphisme de R vers $j^*\mathrm{W}$. Le foncteur j^* est exact donc il commute à la formation des monomorphismes : par conséquent, $j^*\mathrm{W}$ est un sous-préfaisceau de l'objet final de $\widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}$. D'après le lemme 2.2.2, il suffit dès lors de vérifier que si $j^*\mathrm{W}(\mathrm{U}) = \emptyset$, alors $\mathrm{R}(\mathrm{U}) = \emptyset$, c'est-à-dire encore que si R(U) est non vide, alors $j^*\mathrm{W}(\mathrm{U}) = *$. Or, si R(U) est non vide, alors il existe une flèche $\mathrm{U} \to \mathrm{X}$ appartenant à R(U) donc d'après l'assertion de l'item 2., le crible vide est un raffinement de U pour la topologie τ' de sorte que d'après ce qui précède appliqué à $\mathscr{F} = \mathrm{W}$, $j^*\mathrm{W}(\mathrm{U}) = \mathrm{W}(\mathrm{U}) = *$. En particulier, $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(\mathrm{R}, j^*\mathrm{W})$ est non vide : comme $j^*\mathrm{W}$ est un τ-faisceau, cet ensemble est isomorphe à $j^*\mathrm{W}(\mathrm{X})$ qui est donc non vide, c'est-à-dire égal à $*$. On a donc montré que $j^*\mathrm{W}$ était final.

Notons u le foncteur $j^* \circ j_{\mathrm{W}!} : \widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}/\mathrm{W} \to \widetilde{\mathsf{C}}_\tau$: il associe donc à $\mathscr{F} \to \mathrm{W}$ le τ-faisceau $j^*\mathscr{F}$ et v le foncteur de $\widetilde{\mathsf{C}}_\tau$ vers $\widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}$ associant à un τ-faisceau $\mathscr{G}$ l'objet $\mathrm{W} \times j_*\mathscr{G} \to \mathrm{W}$ de $\widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}/\mathrm{W}$. *Le foncteur* u *est alors une équivalence de catégories dont* v *est un quasi-inverse.* En effet :

- le foncteur $v \circ u$ associe à un objet $\mathscr{F} \to \mathrm{W}$ de $\widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}/\mathrm{W}$ l'objet $\mathrm{W} \times j_* j^* \mathscr{F}$; on a vu qu'il y avait un isomorphisme $\mathscr{F} \to \mathrm{W} \times j_* j^* \mathscr{F}$ qui est automatiquement un W-morphisme d'après le lemme 2.2.2 : cela montre qu'il existe un isomorphisme $\mathrm{Id}_{\widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}/\mathrm{W}} \xrightarrow{\simeq} v \circ u$;
- le foncteur $u \circ v$ associe à un objet $\mathscr{G}$ de $\widetilde{\mathsf{C}}_\tau$ l'objet $j^*(\mathrm{W} \times j_*\mathscr{G})$ de C_τ : or, comme j^* est exact à gauche, j_* est pleinement fidèle et $j^*\mathrm{W}$ est final, on dispose d'un isomorphisme

  $$j^*(\mathrm{W} \times j_*\mathscr{G}) \cong j^*\mathrm{W} \times j^* j_* \mathscr{G} \cong \mathscr{G}$$

  fonctoriel en $\mathscr{G}$ car $j^*\mathrm{W}$ est final, d'où un isomorphisme $u \circ v \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Id}_{\widetilde{\mathsf{C}}_\tau}$.

Enfin, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'} \arrow[r, "j^*_{\mathrm{W}}"] \arrow[d, "j^*"'] & \widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}/\mathrm{W} \arrow[dl, "u"] \\ \widetilde{\mathsf{C}}_\tau & \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près. En effet, par définition, pour tout $\tau \cap \tau'$-faisceau $\mathscr{F}$,

$$u \circ j^*_{\mathrm{W}} \mathscr{F} = j^*(\mathscr{F} \times \mathrm{W}) \cong j^*\mathscr{F} \times j^*\mathrm{W} \cong j^*\mathscr{F}$$

de façon fonctorielle en $\mathscr{F}$.

Nous avons donc démontré que j est isomorphe au plongement ouvert déterminé par l'ouvert W. Le complémentaire fermé de $\widetilde{\mathsf{C}}_\tau$ dans $\widetilde{\mathsf{C}}_{\tau\cap\tau'}$ est la sous-catégorie strictement pleine E des $\tau \cap \tau'$-faisceaux $\mathscr{F}$ tels que la première projection $\mathrm{W} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ est un isomorphisme, c'est-à-dire tels que $\mathscr{F}(\mathrm{X}) = *$

dès que $W(X) = *$, soit lorsque $\varepsilon_{\tau'}(X) = \emptyset_{\tau'}$. Si $\mathscr{G}$ est un objet de $\widetilde{\mathsf{C}}_{\tau'}$, alors $i_*(\mathscr{G})$ est un objet de E : en effet, si X vérifie $\varepsilon_{\tau'}(X) = \emptyset_{\tau'}$, alors

$$(i_*\mathscr{G})(X) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(X, \mathscr{G}) = \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathsf{C}}_{\tau'}}(\varepsilon_{\tau'}(X), \mathscr{G}) = *$$

où la première égalité résulte du lemme de Yoneda et la seconde et troisième du fait que $\mathscr{G}$ est un τ'-faisceau. Il suffit pour conclure de montrer que l'image essentielle de i_* est *égale* à E, c'est-à-dire que tout objet de E est un faisceau pour la topologie τ'. Soit donc $\mathscr{F}$ un objet de E, soit X un objet de C et soit R' un raffinement de X pour la topologie τ'. Il s'agit de montrer que l'application évidente de $\mathscr{F}(X)$ vers $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(R', \mathscr{F})$ est bijective. Par hypothèse, il existe un crible R couvrant de X pour la topologie τ tel que pour tout objet U, si R(U) est non vide, alors U est couvert par le crible vide pour la topologie τ'. Le crible $R \cup R'$ de X contient R donc est un raffinement de X pour la topologie τ, et R' donc est un raffinement de X pour la topologie τ' : c'est donc un crible couvrant de X pour la topologie $\tau \cap \tau'$. Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(X) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(R \cup R', \mathscr{F}) = \lim\limits_{U \to R \cup R'} \mathscr{F}(U) \arrow[d] \\
 & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(R', \mathscr{F}) = \lim\limits_{U \to R'} \mathscr{F}(U)
\end{tikzcd}$$

(dans les limites, U est un objet de C). La flèche horizontale est une bijection car $\mathscr{F}$ est un faisceau pour la topologie $\tau \cap \tau'$. En outre, si $U \to R$ est un morphisme de $\widehat{\mathsf{C}}$, alors R(U) est non vide d'après le lemme de Yoneda donc le crible vide est un raffinement de U pour la topologie τ', c'est-à-dire que $\varepsilon_{\tau'}(U) = \emptyset_{\tau'}$: par conséquent, puisque $\mathscr{F}$ est un objet de E, si U admet un morphisme vers R, alors $\mathscr{F}(U) = *$. Il s'ensuit aisément que la flèche verticale entre limites est bijective donc la flèche diagonale est bijective, ce qu'il fallait démontrer.

Supposons l'assertion de l'item 1. satisfaite. Alors, on peut identifier j au plongement ouvert induit par W. En particulier, j^*W est l'objet final de $\widetilde{\mathsf{C}}_\tau$, c'est-à-dire que le τ-faisceau associé à W est $*$. Notons que W est un sous-préfaisceau de $*$ donc W est séparé, de sorte que $j^*W = L_\tau W$. Par définition du foncteur L_τ, il existe un crible R couvrant X pour la topologie τ tel que $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(R, W)$ est non vide. Cela signifie d'après le lemme 2.2.2 que pour tout U tel que R(U) est non vide, W(U) est non vide, c'est-à-dire que $\varepsilon_{\tau'}(U) = \emptyset_{\tau'}$. C'est l'assertion de l'item 2., ce qui achève la démonstration. □

3.2 La b-topologie

Soit X un schéma.

Définition 3.2.1. La b-topologie[7] sur la catégorie Ét/X des X-schémas étales est l'intersection de la topologie étale et de la topologie réel-étale. Ainsi, une famille couvrante d'un X-schéma étale U est une famille $(f_i : U_i \to U)_i$ de X-morphismes étales qui est surjective et réel-surjective : U est la réunion des $f_i(U_i)$ et U_r est la réunion des $f_r((U_i)_r)$.

On note $X_{\text{ét}}$ le site (Ét/X, ét), $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ le topos associé — ses objets sont les *faisceaux étales* —, X_b le site (Ét/X, b), $\widetilde{X_b}$ le topos associé et

$$j = (j^*, j_*) : \widetilde{X_{\text{ét}}} \to \widetilde{X_b}, \quad i = (i^*, i_*) = \widetilde{X_{\text{rét}}} \to \widetilde{X_b}$$

les morphismes de topos associés.

Lemme 3.2.2 ([Sch94, (2.4)])**.** *Le morphisme j est un plongement ouvert et le morphisme i est le plongement fermé complémentaire.*

7. Il semble (voir [Sch94, (2.3) Definition]) que ce soit b pour *b*oth ; peut-être aussi pour *b*eide en allemand.

Démonstration. Il suffit de vérifier qu'on est dans les conditions énoncées plus haut. Autrement dit, soit Y un schéma ; il s'agit de recouvrir Y — pour la topologie étale — par des schémas dont le spectre réel est vide. Si p est un nombre premier et ν est un nombre entier, notons $\mathbb{Z}[\zeta_{p^\nu}]$ le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par les puissances de ζ_{p^ν} où ζ est une racine primitive p^ν-ième de l'unité. Si $\mathrm{D}(p)$ désigne l'ouvert d'inversibilité du nombre premier p sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, le morphisme évident

$$\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta_{p^\nu}] \times \mathrm{D}(p) \to \mathrm{D}(p)$$

est étale surjectif donc par changement de base, si $\mathrm{Y}_{(p)}$ désigne le plus grand ouvert de Y sur lequel $p \in \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{Y})$ est inversible, le morphisme

$$\mathrm{Y}_{(p)}[\zeta_{p^\nu}] = \mathrm{Y}_{(p)} \times \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta_{p^\nu}] \to \mathrm{Y}_{(p)}$$

est étale surjectif. Par conséquent, les morphismes

$$\mathrm{Y}_{(2)}[\sqrt{-1}] \to \mathrm{Y}_{(2)}, \quad \mathrm{Y}_{(3)}[\zeta_3] \to \mathrm{Y}_{(3)}$$

sont étales et la réunion de leurs images est $\mathrm{Y}_{(2)} \cup \mathrm{Y}_{(3)}$ et est donc égale à Y d'après la relation $3-2=1$. Il suffit pour conclure de montrer que les spectres réels de $\mathrm{Y}_{(2)}[\sqrt{-1}]$ et $\mathrm{Y}_{(3)}[\zeta_3]$ sont vides. Comme le premier admet un morphisme vers $\mathbb{Z}[t]/\langle t^2+1\rangle$, il suffit de prouver que le spectre réel de ce dernier est vide : cela résulte de ce que t^2+1 est nul sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[t]/\langle t^2+1\rangle$ donc le corps $\kappa(x)$ n'est pas réel pour tout $x \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[t]/\langle t^2+1\rangle$. De même, $\mathrm{Y}_{(3)}[\zeta_3]$ admet un morphisme vers $\mathbb{Z}[t]/\langle t^2+t+1\rangle$ dont le spectre réel est vide : il suffit en effet de prouver que $x^2+x+1>0$ pour tout élément x d'un corps réel clos ; cela revient à voir que $1-4=-3=-(1^2+1^2+1^2)<0$ dans un tel corps, ce qui est exact. □

Rappelons la définition du *foncteur de recollement* :

Définition 3.2.3. Le *foncteur de recollement* est le foncteur $\rho = i^* j_* : \widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}} \to \widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$.

Le foncteur ρ est exact à gauche, c'est-à-dire qu'il commute aux limites finies. Il attache à un faisceau étale le faisceau associé pour la topologie réel-étale. On peut décrire le topos $\widetilde{\mathrm{X}_b}$ en termes des topos $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}}$ et $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$ et du foncteur ρ comme suit. Considérons la classe des triplets $(\mathscr{G}, \mathscr{F}, \phi)$ où $\mathscr{G}$ est un objet de $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$, $\mathscr{F}$ est un objet de $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}}$ et le morphisme $\phi : \mathscr{G} \to \rho\mathscr{F}$ est un morphisme de $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$. On peut munir cette classe d'une structure naturelle de catégorie : nous notons cette catégorie $(\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}, \widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}}, \rho)$. On dispose d'un foncteur Φ de $\widetilde{\mathrm{X}_b}$ vers $(\widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}}, \widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}}, \rho)$ qui associe à un faisceau $\mathscr{H}$ le triplet

$$(i^*\mathscr{H}, j^*\mathscr{H}, \phi_{\mathscr{H}} : i^*\mathscr{H} \to i^* j_* j^* = \rho j^*\mathscr{H})$$

où $\rho_{\mathscr{H}}$ est déduit du morphisme $\mathscr{H} \to i_* i^* \mathscr{H}$ d'unité.

Proposition 3.2.4 ([Sch94, (2.6.1) Proposition])**.** *Le foncteur Φ est une équivalence de catégories. Un quasi-inverse de Φ est donné par le foncteur qui associe à un triplet $(\mathscr{G}, \mathscr{F}, \phi : \mathscr{G} \to \mathscr{F})$ la limite du diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & & j_*\mathscr{F} \\ & & \big\downarrow \\ i_*\mathscr{G} & \xrightarrow{i_*(\phi)} & i_*\rho\mathscr{F} = i_* i^* j_*\mathscr{F} \end{array}$$

dans $\widetilde{\mathrm{X}_b}$ où la flèche verticale est la flèche d'unité pour $j_*\mathscr{F}$.

Démonstration. Voir [AGV71, Exposé IV, Théorème 9.5.4]. □

Notons aussi un corollaire du lemme 3.2.2 :

Corollaire 3.2.5 ([Sch94, (2.7) Corollary])**.** *Le morphisme j^* possède un adjoint à gauche $j_! : \widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}} \to \widetilde{\mathrm{X}_b}$.*

Les foncteurs $(j_!, j^*, j_*, i^*, i_*)$ admettent les descriptions suivantes en termes $(\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}, \widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}}, \rho)$ ([Sch94, (2.8)]) :

$$\begin{array}{lccc} j_! : \widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}} \to \widetilde{\mathrm{X}_b}, & \mathscr{F} & \mapsto & (\emptyset_{\text{rét}}, \mathscr{F}, \emptyset_{\text{rét}} \to \rho\mathscr{F}) \\ j^* : \widetilde{\mathrm{X}_b} \to \widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}}, & (\mathscr{G}, \mathscr{F}, \phi) & \mapsto & \mathscr{F} \\ j_* : \widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}} \to \widetilde{\mathrm{X}_b}, & \mathscr{F} & \mapsto & (\rho\mathscr{F}, \mathscr{F}, \mathrm{Id} : \rho\mathscr{F} \to \rho\mathscr{F}) \\ i^* : \widetilde{\mathrm{X}_b} \to \widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}, & (\mathscr{G}, \mathscr{F}, \phi) & \mapsto & \mathscr{G} \\ i_* : \widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}} \to \widetilde{\mathrm{X}_b}, & \mathscr{G} & \mapsto & (\mathscr{G}, *, \mathscr{G} \to *) \end{array}$$

La propriété de complémentarité a aussi la conséquence suivante sur les faisceaux *abéliens* : par définition, si C est un site, nous notons $\mathsf{Ab}(\mathsf{C})$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur C.

Corollaire 3.2.6 ([Sch94, (2.9) Corollary]). *Le foncteur $j^* : \mathsf{Ab}(\mathrm{X}_b) \to \mathsf{Ab}(\mathrm{X}_{\text{ét}})$ possède un adjoint à gauche $j_! : \mathsf{Ab}(\mathrm{X}_{\text{ét}}) \to \mathsf{Ab}(\mathrm{X}_b)$ appelé l'*extension par zéro*. Le foncteur $j_!$ est exact. En outre, le foncteur $i_* : \mathsf{Ab}(\mathrm{X}_{\text{rét}}) \to \mathsf{Ab}(\mathrm{X}_b)$ possède un adjoint à droite $i^! : \mathsf{Ab}(\mathrm{X}_b) \to \mathsf{Ab}(\mathrm{X}_{\text{rét}})$: en particulier, le foncteur i_* est exact.*

Les foncteurs $j_!$ (abélien) et i^* admettent les descriptions suivantes en termes de la catégorie $(\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}, \widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}}, \rho)$ ([Sch94, (2.9.1) Corollary]) :

$$\begin{array}{lccc} j_! : \widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}} \to \widetilde{\mathrm{X}_b}, & \mathscr{B} & \mapsto & (0, \mathscr{B}, 0 \to \rho\mathscr{B}) \\ i^! : \widetilde{\mathrm{X}_b} \to \widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}, & (\mathscr{C}, \mathscr{B}, \phi : \mathscr{C} \to \mathscr{B}) & \mapsto & \operatorname{Ker} \phi \end{array}$$

Corollaire 3.2.7. *Soit $\mathscr{A}$ un faisceau abélien sur X_b. On dispose alors de suites exactes naturelles :*

$$0 \to j_! j^* \mathscr{A} \to \mathscr{A} \to i_* i^* \mathscr{A} \to 0$$

et

$$0 \to i_* i^! \mathscr{A} \to \mathscr{A} \to j_* j^* \mathscr{A} \tag{1}$$

de faisceaux sur X_b. En particulier, si $\mathscr{B}$ est un faisceau étale abélien, alors on dispose d'une suite exacte naturelle

$$0 \to j_! \mathscr{B} \to j_* \mathscr{B} \to i_* \rho \mathscr{B} \to 0 \tag{2}$$

de faisceaux sur X_b.

Le corollaire 3.2.5 est démontré dans [AGV71, Exposé IV, 5. Topos induit] et les corollaires 3.2.6 et 3.2.7 dans [AGV71, Exposé IV, 14. Modules sur un topos défini par recollement] : ils sont généraux des topos définis par recollement.

Nous allons désormais décrire les foncteurs introduits précédemment en termes de la catégorie des préfaisceaux sur Ét/X ([Sch94, (2.11)]).

- Les foncteurs i_* et j_* sont identiques — plus précisément, il s'agit de foncteurs d'inclusion ([Sch94, (2.11.1)]).
- Le foncteur j^* (respectivement i^*) associe à un faisceau sur X_b le faisceau étale (respectivement le faisceau pour la topologie réel-étale) associé. Le foncteur ρ associe à un faisceau étale le faisceau associé pour la topologie réel-étale ([Sch94, (2.11.2)]).
  On peut rendre le foncteur j^* plus explicite ([Sch94, (2.11.2)]). Soit $\mathscr{H}$ un faisceau sur X_b. Si U' est sans point réel, alors les familles couvrantes de U' pour la topologie b sont les familles couvrantes pour la topologie étale donc $j^*\mathscr{H}(\mathrm{U}') = \mathscr{H}(\mathrm{U}')$. On en déduit que si U est un $\mathbb{Z}[1/2]$-schéma, c'est-à-dire que 2 est inversible dans $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}(\mathrm{U})$, alors $\mathrm{U}' = \mathrm{U} \times \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \to \mathrm{U}$ est un recouvrement de U pour la topologie étale et U' et $\mathrm{U}' \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}'$ sont sans point réel car ils admettent un morphisme vers $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ qui n'a pas de point réel, d'où une suite

$$j^*\mathscr{H}(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{U}') \underset{q^*}{\overset{p^*}{\rightrightarrows}} \mathscr{H}(\mathrm{U}' \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}')$$

identifiant $j^*\mathscr{H}(\mathrm{U})$ à l'égalisateur de (p^*, q^*). Posons $\mathrm{A} = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. Le morphisme $\mathrm{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{A} \to \mathrm{A} \times \mathrm{A}$ qui envoie $z \otimes w$ sur $(zw, z\overline{w})$ est un isomorphisme : cela signifie que les morphismes $\mathrm{A} \to \mathrm{A} \times \mathrm{A}$ donnés par $z \mapsto (z, z)$ et $w \mapsto (w, \overline{w})$ font de $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$ le coproduit de A et A dans la catégorie des anneaux. Notons σ l'automorphisme de A donné par la conjugaison et σ l'automorphisme de $\operatorname{Spec} \mathrm{A}$ qu'il induit ; on en déduit un automorphisme σ de U'. Il résulte de l'observation précédente que la somme disjointe $\mathrm{U}' \coprod \mathrm{U}'$ munie des morphismes $\mathrm{U}' \coprod \mathrm{U}' \to \mathrm{U}'$ donnés par $(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ et (Id, σ) respectivement est le produit fibré $\mathrm{U}' \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}'$ donc on peut réécrire la suite ci-dessus ainsi :

$$j^*\mathscr{H}(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{U}') \underset{(\mathrm{Id},\sigma)^*}{\overset{(\mathrm{Id},\mathrm{Id})*}{\rightrightarrows}} \mathscr{H}(\mathrm{U}') \times \mathscr{H}(\mathrm{U}')$$

et la suite ci-dessus identifie $j^*\mathscr{H}(\mathrm{U})$ à l'égalisateur de Id et $\sigma : \mathscr{H}(\mathrm{U}') \to \mathscr{H}(\mathrm{U}')$. Si désormais, $\mathscr{A}$ est un faisceau abélien sur X_b et si U est un $\mathbb{Z}[1/2]$-schéma, alors on déduit de cette description de $j^*\mathscr{A}(\mathrm{U})$ et de la suite exacte (1) que

$$(i^!\mathscr{A})(\mathrm{U}) = \operatorname{Ker}(\mathscr{F}(\mathrm{U}) \to \mathscr{F}(\mathrm{U}'))$$

où $\mathrm{U}' = \mathrm{U} \times \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. On peut donc voir $i^!\mathscr{A}$ comme le sous-faisceau de $\mathscr{A}$ des sections à support réel.

- Le faisceau $\emptyset_{\text{rét}}$ — donc le b-faisceau $\mathrm{W} = i_*(\emptyset_{\text{rét}})$ — envoie un X-schéma étale U sur $*$ si $\mathrm{U}_r = \emptyset$ et sur $\emptyset$ si U_r est non vide. D'ailleurs, tout faisceau pour la topologie réel-étale envoie un X-schéma étale sans point réel sur $*$: c'est la propriété de fermé complémentaire ([Sch94, (2.11.3)]).
- Le foncteur $j_!$ ensembliste d'extension par le vide envoie un faisceau étale $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{F} \times \mathrm{W}$, le faisceau envoyant U sur $\mathscr{F}(\mathrm{U})$ si U_r est vide et sur $\emptyset$ si U_r est non vide ([Sch94, (2.11.4)]).
- Le faisceau $j_!$ abélien d'extension par zéro peut être vu comme le foncteur qui envoie un faisceau sur son sous-faisceau des sections *à support non réel*. En effet, la suite exacte (2) montre que si $\mathscr{B}$ est un faisceau étale abélien, alors les sections de $j_!\mathscr{B}$ sont les sections de $\mathscr{B}$ qui deviennent nulles sur un recouvrement de U pour la topologie réel-étale ou, de manière équivalente, sur un ouvert contenant les points dont le corps résiduel est réel. Ainsi,

$$(j_!\mathscr{B})(\mathrm{U}) = \{b \in \mathscr{B}(\mathrm{U}), \exists \mathrm{T} \hookrightarrow \mathrm{U}, \mathrm{T}_r = \emptyset, b_{|\mathrm{U}\setminus\mathrm{T}} = 0\} = \varinjlim_{\mathrm{T}\hookrightarrow\mathrm{U}, \mathrm{T}_r=\emptyset} \mathrm{H}^0_{\mathrm{T}}(\mathrm{U}, \mathscr{B})$$

(on signifie par $\mathrm{T} \hookrightarrow \mathrm{U}$ que T est un sous-schéma fermé de U). Comme $j_!$ n'envoie pas nécessairement les faisceaux étales abéliens injectifs sur des b-faisceaux acycliques, l'analogue pour le n-ième groupe de cohomologie est inexact si $n \geqslant 1$ en général ([Sch94, (2.11.5)]).

3.3 Un exemple : le cas $\mathrm{X} = \operatorname{Spec} \mathrm{R}$

La topologie étale coïncide avec la b-topologie si, et seulement si, $\mathrm{X}_r = \emptyset$. En effet, si $\mathrm{X}_r = \emptyset$, alors $\mathrm{U}_r = \emptyset$ pour tout X-schéma étale $\mathrm{U} \to \mathrm{X}$ donc la topologie réel-étale est la topologie discrète de sorte que la b-topologie coïncide avec la topologie étale. Réciproquement, si la topologie étale coïncide avec la b-topologie, alors $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}}$ correspond à l'ouvert W égal au faisceau final donc tout X-schéma étale est recouvert par le crible vide : c'est en particulier le cas de $\mathrm{Id}_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ donc $\mathrm{X}_r = \emptyset$.

Le premier cas intéressant est donc celui où X est le spectre d'un corps réel clos R ([Sch94, (2.14) Example]. Posons $\mathrm{C} = \mathrm{R}[\sqrt{-1}]$, de sorte que C est algébriquement clos, et notons G le groupe de Galois de C/R : nous désignons par σ son élément non trivial. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau étale sur Ét/X, alors $\mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{C})$ est un G-ensemble car cet ensemble hérite de la G-action de C par fonctorialité et la donnée de ce G-ensemble est *équivalente* à la donnée de $\mathscr{F}$. En effet, il suffit de montrer que la donnée de ce G-ensemble détermine $\mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{R})$: si c'est le cas, alors tout X-schéma étale U étant de la forme $\operatorname{Spec} \mathrm{K}_1 \coprod \cdots \coprod \operatorname{Spec} \mathrm{K}_r$ où K_i est égal à R ou à C, le faisceau $\mathscr{F}$ sera prescrit. Or, le morphisme $\operatorname{Spec} \mathrm{C} \to \operatorname{Spec} \mathrm{R}$ est un recouvrement pour la topologie étale car C/R est séparable — le corps R est réel, en particulier de caractéristique zéro — donc comme $\mathscr{F}$ est un faisceau, on dispose d'une suite exacte

$$\mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{R}) \longrightarrow \mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{C}) \underset{q^*}{\overset{p^*}{\rightrightarrows}} \mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{C} \times_{\mathrm{R}} \operatorname{Spec} \mathrm{C}) = \mathscr{F}(\operatorname{Spec}(\mathrm{C} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{C}))$$

Or, le morphisme $\mathrm{C} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{C} \to \mathrm{C}^{\mathrm{G}}$ envoyant $x \otimes y$ sur $(xy, x\sigma(y))$ est un isomorphisme donc l'égalisateur du couple de morphismes structuraux $\mathrm{C} \to \mathrm{C} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{C}$ est exactement l'ensemble des $x \in \mathrm{C}$ tels que $x = \sigma(x)$: comme l'extension C/R est galoisienne — elle est séparable car R est réel donc de caractéristique zéro, et normale car C est algébriquement clos vu que R est réel clos —, cet ensemble s'identifie à R donc $\mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{R})$ s'identifie à l'égalisateur des flèches $\mathrm{Id} : \mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{C}) \to \mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{C})$ et $\sigma^* : \mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{C}) \to \mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{C})$, c'est-à-dire à l'ensemble des points fixes de $\mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{C})$ sous l'action de G. En particulier, la donnée du G-ensemble $\mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{C})$ détermine l'ensemble $\mathrm{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{R})$.

La donnée d'un faisceau réel-étale $\mathscr{F}$ correspond à la donnée d'un ensemble, à savoir $\mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{R})$. En effet, comme le crible vide est un raffinement de $\operatorname{Spec} \mathrm{C}$, $\mathscr{F}(\operatorname{Spec} \mathrm{C}) = *$. Enfin, si $\mathscr{F}$ est un faisceau étale correspondant au G-ensemble A, alors $i^*\mathscr{F}$ est le faisceau réel étale correspondant à A^{G}. Finalement :

Lemme. *Soit* R *un corps réel clos ; notons* G *son groupe de Galois absolu et* X *son spectre. La catégorie* $(\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}, \widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}}, \rho)$ *est alors équivalente à la catégorie des triplets* $(\mathrm{B}, \mathrm{A}, \phi : \mathrm{B} \to \mathrm{A}^{\mathrm{G}})$ *où* B *est un ensemble,* A *est un* G*-ensemble et* A^{G} *est l'ensemble des points fixes de* A *sous l'action de* G*, le morphisme* ϕ *étant une application ensembliste quelconque.*

3.4 Quelques propriétés supplémentaires

Préservation des foncteurs constants. Si M est un ensemble, nous notons $\underline{\mathrm{M}}_t$ le faisceau constant attaché à M : c'est le faisceau associé au préfaisceau $(\mathrm{U} \to \mathrm{X}) \mapsto \mathrm{M}$ sur Ét/X pour la topologie t où t est ét, rét ou b.

Lemme 3.4.1 ([Sch94, (2.15.1) Proposition])**.** *Les foncteurs* j_* *et* ρ *préservent les faisceau constants. Plus précisément,* $j_*\underline{\mathrm{M}}_{\text{ét}} = \underline{\mathrm{M}}_b$ *et* $\rho\underline{\mathrm{M}}_{\text{ét}} = \underline{\mathrm{M}}_{\text{rét}}$ *pour tout ensemble* M*.*

La preuve est différée à l'exposé concernant les points des topos en jeu. L'énoncé analogue obtenu en remplaçant « constant » par « localement constant » est inexact.

Fonctorialité ([Sch94, (2.16)]). Soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de schémas. Le morphisme f induit un foncteur f^{-1} de changement de base : ce foncteur est continu donc il induit un morphisme de topos f_t de $\widetilde{\mathrm{Y}_t}$ vers $\widetilde{\mathrm{X}_t}$ pour $t \in \{\text{rét}, \text{ét}, b\}$. Si $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme de schémas, alors $(f \circ g)_t$ et $f_t \circ g_t$ sont isomorphes : par définition, cela signifie en effet que $g_t^* \circ f_t^*$ et $(f \circ g)_t^*$ sont isomorphes, ce qui est exact vu la définition. Notons que si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est étale, alors f induit un foncteur Ét/Y → Ét/X associant à un Y-schéma étale $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ le X-schéma étale $f \circ g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$. Le foncteur Ét/Y → Ét/X ainsi défini est continu et cocontinu donc il induit une suite de foncteurs adjoints $(f_{t!}, f_t^*, f_{t*})$. Le foncteur $f_{t!}$ envoie un faisceau $\mathscr{F}$ sur Ét/Y pour la topologie t sur le faisceau associé au préfaisceau

$$\mathrm{U} \mapsto \coprod_{u \in \operatorname{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}, \mathrm{Y})} \mathscr{F}(u)$$

pour la topologie t comme nous l'avons déjà vu.

Invariance topologique de la b-topologie. Soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de schémas. On suppose f entier (c'est-à-dire affine et universellement fermé), surjectif et radiciel : pour tout $x \in \mathrm{X}$, l'extension $\kappa(x) \to \kappa(f(x))$ est purement inséparable. Il est alors connu ([AGV71, Exposé VIII, Théorème 1.1]) que f induit une équivalence de topos $\widetilde{\mathrm{Y}_{\text{ét}}} \to \widetilde{\mathrm{X}_{\text{ét}}}$. L'analogue pour le site réel étale est aussi exact et plus simple.

En effet, si ξ est un élément de X_r de support $x \in \mathrm{X}$, alors il existe un point y de Y tel que $f(y) = x$: l'extension $\kappa(x) \hookrightarrow \kappa(y)$ induite par f est triviale car f est radiciel et $\kappa(x)$ est réel, d'où un ordre sur $\kappa(y)$ qui induit un point ζ de Y_r d'image ξ par f_r. En outre, si ξ et ζ sont des points de Y_r de supports respectifs y et y' et de même image dans X_r, alors le support x de leur image dans X_r vérifie $f(y) = f(y') = x$: comme f est injective, il en résulte que $y = y'$; on a une extension triviale $\kappa(x) \hookrightarrow \kappa(y)$ et ξ et ζ induisent le même ordre sur $\kappa(x)$ donc $\xi = \zeta$. Ainsi, f_r est une bijection continue. Si U est un ouvert affine de X, le morphisme $f^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ induit par f est entier, radiciel, surjectif car les classes des morphismes possédant ces propriétés sont (indépendamment) stables par changement de base ; en outre, comme f est entier, il est affine donc $f^{-1}(\mathrm{U})$ est affine. On peut donc supposer X et Y affines. Dans ce cas, f_r est spectrale donc pour montrer que f_r est un homéomorphisme, il suffit d'établir que f_r^{-1} préserve les spécialisations. Or, soit $\xi' \succ \xi$ une spécialisation dans X_r ; notons x (respectivement x') le support de ξ (respectivement de ξ') : soit alors $y \in \mathrm{Y}$ et $y' \in \mathrm{Y}$ tel que $f(y) = x$ et $f(y') = x'$; l'extension $\kappa(x) \to \kappa(y)$ (respectivement $\kappa(x') \to \kappa(y')$) est triviale car $\kappa(x)$ (respectivement $\kappa(x')$) est réel donc ξ (respectivement ξ') induit un ordre sur $\kappa(y)$ (respectivement $\kappa(y')$) d'où un ordre sur $\kappa(y)$ (respectivement $\kappa(y')$) puis un point ζ (respectivement ζ') qui est d'image ξ (respectivement ξ') dans X_r et il est alors évident que ζ' est adhérent à ζ dans Y_r. Par conséquent, $f : \mathrm{Y}_r \to \mathrm{X}_r$ est un homéomorphisme donc d'après les résultats de l'exposé précédent, f induit une équivalence de topos de $\widetilde{\mathrm{Y}_{\text{rét}}}$ vers $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$.

Cela implique que le résultat analogue est vrai pour la b-topologie.

Bibliographie

[AGV71] Michael Artin, Alexander Grothendieck et Jean-Louis Verdier. *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas I, II, III*. T. 269, 270, 305. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1971 (cf. p. 5, 9–16, 18, 19, 22, 23, 25).

[Sch94] Claus Scheiderer. *Real and Étale Cohomology*. T. 1588. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1994 (cf. p. 13, 19, 21–25).

[Sta22] The Stacks project authors. *The Stacks project*. `https://stacks.math.columbia.edu`. 2022 (cf. p. 6, 12, 13, 15).