Théorèmes de changement de base

Situation : On considère un carré cartésien de schémas :

$$(c) \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "f"] & F \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

Si $t \in \{et, ret, h\}$ et F est un faisceau sur Y_t, le morphisme de changement de base est :

$\beta_{t,(c)}(F) : g^* f_* F \longrightarrow p_* q^* F$ (j'écris f_* pour f_{t*} etc)

correspondant par l'adjonction (g^*, g_*) par

$f_* F \longrightarrow g_* p_* q^* F = f_* q_* q^* F$ égal $f_*(\text{unité de } (q^*, q_*))$.

rmq : (1) Il y a une autre définition de $\beta_{t,(c)}(F)$:

$$\beta_{t,(c)}(F) \underset{(p^*, p_*)}{\longleftrightarrow} \underset{\underset{q^* f^* f_* F}{\parallel}}{p^* g^* f_* F} \longrightarrow q^* F = q^*(\text{counité de } (f^*, f_*)).$$

(2) $\beta_{t,(c)}(F)$ est défini pour tout carré commutatif (c).

On peut dériver $\beta_{t,(c)}$ pour obtenir, pour $F \in Ab(Y_t)$:

$\beta^*_{t,(c)}(F) : g^* R f_* F \longrightarrow R p_* q^* F$ ou $\beta^n_{t,(c)}(F) : g^* R^n f_* F \longrightarrow R^n p_* q^* F$.

Question : Quand le morphisme de changement de base est-il un isomorphisme ?

thm (changement de base propre) : On suppose que f est propre.

(i) $\forall t \in \{et, ret, h\}$, $\forall F \in \tilde{Y}_t$, $\beta_{t,(c)}(F)$ est un isomorphisme.

(ii) Si $t = ret$, $\beta^*_{t,(c)}(F)$ est un isomorphisme pour tout $F \in Ab(Y_t)$.

Si $t \in \{et, h\}$, $\beta^*_{t,(c)}(F)$ est un isomorphisme pour tout $F \in Ab(Y_t)$ de torsion.

On se concentre sur la preuve de (ii). (Celle de (i) est similaire mais plus facile.)

Premières réductions :

lemme : On suppose que : * Le théorème est vrai pour (c) et $t = ret$;

* Le théorème est vrai pour (c') et $t = ct$,

où, pour tout schéma S, $S' = S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \xrightarrow[(\text{Fini})]{\pi} S$ et (c') est le carré :

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "p'"'] & Y' \arrow[d, "f'"] \\ Z' \arrow[r, "g'"'] & X' \end{tikzcd}$$

* Le théorème est vrai pour $t = ct$ et les carrés

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & Y' \arrow[d, "\pi"] \\ T \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & X' \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

Alors le théorème est vrai pour (c) et pour $t = b$.

Preuve du lemme : Pour tout schéma S on note $S_{ret} \xrightarrow{i} S_b \xleftarrow{j} S_{ct}$. Soit $A \in Ab(Y_{ret})$, alors :

$$\begin{tikzcd} g_b^* Rf_{b*} i_* A \arrow[r, "\beta_{b,(c)}(i_* A)"] \arrow[d, phantom, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Rp_{b*} g_b^* i_* A \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ i_* g_{ret}^* Rf_{ret*} A \arrow[r, "\sim", "i_* \beta_{ret,(c)}(A)"'] & i_* Rp_{ret*} g_{ret}^* A \end{tikzcd}$$

Donc $\beta_{b,(c)}(i_* A)$ est un iso.

De même, si $\beta \in Ab(Y'_{et})$, alors :

$$\begin{tikzcd}
g_b^* Rf_{b*}\pi_{b*}j_*\beta \arrow[r, "\beta_{b,(c)}"] \arrow[d, phantom, "\wr\ (\pi_{b*}j_* \text{ exact})"] & Rp_{b*}g_b^*\pi_{b*}j_*\beta = Rp_{b*}j_*g_{et}^*\pi_{et*}\beta \arrow[d, "\wr\ \beta \text{ pour } \pi_{et}"] \\
g_b^*\pi_{b*}j_*Rf'_{et*}\beta \arrow[d, phantom, "\wr"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & Rp_{b*}\overset{\text{exact}}{(j_*\pi_{et*})}g'^*_{et}\beta \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
j_*g_{et}^*\pi_{et*}Rf'_{et*}\beta \arrow[r, "\sim", "\beta \text{ pour } \pi_{et*}"'] & j_*\pi_{et*}g'^*_{et}Rf'_{et*}\beta \arrow[r, "\sim", "\beta_{et,(c')}"'] & j_*\pi_{et*}Rp'_{et*}g'^*_{et}\beta
\end{tikzcd}$$

Donc $\underline{\beta_{b,(c)}(\pi_{b*}j_*\beta)}$ est un isomorphisme si β est de torsion.

De plus, si $\underbrace{F \in Ab(Y_b)}_{\text{de torsion}}$, alors $F \to \underbrace{i_*i^*F \oplus \pi_*j_*j^*\pi^*F}_{\text{de torsion}}$ est injectif.

Donc $\forall F \in Ab(Y_b)$ de torsion, $\exists\, F \hookrightarrow G$ avec G de torsion tq $\beta^*_{b,(c)}(G)$ est un iso. En particulier :

$$\begin{tikzcd}
g^*f_*F \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & g^*f_*G \arrow[d, "\wr"] \\
p_*g^*F \arrow[r, hook] & p_*g^*G
\end{tikzcd}$$

$\beta^0_{b,(c)}(F)$ est injectif.

Prouvons par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$ que : $\forall F \in Ab(Y_b)$ de torsion, $\beta^n_{b,(c)}(F)$ est un isomorphisme si $n < N$ et injectif si $n = N$.

* $\underline{N=0}$: ok
* $\underline{N \to N+1}$: On choisit $0 \to F \to G \to H \to 0$, avec G, H de torsion et $\beta^*_{b,(c)}(G)$ un iso. On a :

$$\begin{tikzcd}
g^*R^{N-1}f_*G \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & g^*R^{N-1}f_*H \arrow[r] \arrow[d, "\wr\ HR"] & g^*R^Nf_*F \arrow[r] \arrow[d, "(1)"] & g^*R^Nf_*G \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & g^*R^Nf_*H \arrow[r] \arrow[d, hook, "HR"] & g^*R^{N+1}f_*F \arrow[r] \arrow[d, "(2)"] & g^*R^{N+1}f_*G \arrow[d, "\wr"] \\
R^{N-1}p_*g^*G \arrow[r] & R^{N-1}p_*g^*H \arrow[r] & R^Np_*g^*F \arrow[r] & R^Np_*g^*G \arrow[r] & R^Np_*g^*H \arrow[r] & R^{N+1}p_*g^*F \arrow[r] & R^{N+1}p_*g^*G
\end{tikzcd}$$

La flèche (1) est un iso. par le lemme des 5.

La flèche (2) est injective par le lemme des 4.

Il suffit donc de prouver les deux théorèmes suivants : (F propre)

thm A : (CB réel étale)

(i) $\forall F \in \widetilde{Y}_{(ét)}$, $\beta_{(ét),(c)}(F)$ est un isomorphisme.

(ii) $\forall F \in AL(Y_{(ét)})$, $\beta^{*}_{(ét),(c)}(F)$ est un isomorphisme.

thm B : (CB étale)

(i) $\forall F \in \widetilde{Y}_{ét}$, $\beta_{ét,(c)}(F)$ est un isomorphisme.

(ii) $\forall F \in AL(Y_{ét})$ de torsion, $\beta^{*}_{ét,(c)}(F)$ est un isomorphisme.

Préparatif : Si on empile des carrés cartésiens horizontalement ou verticalement :

$$(3)\left\{\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}\right.
\qquad
\overbrace{\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}}^{(3)}$$

Alors " $\beta_{*,(3)} = \beta_{*,(1)} \circ \beta_{*,(2)}$ ".

Preuve du théorème A (ii) :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

(1) On peut supposer que $Z = \operatorname{Spec} s$, s corps réel clos :

Dém : Il suffit de prouver $\xi^* g^* Rf_* F \xrightarrow[\beta(3)]{\sim} \xi^* Rf'_* g'^* F$ pour tout $\xi \in \mathrm{Pt}(Z_{ret})$.

Or ξ^* est de la forme z^*, pour $z : \operatorname{Spec} s \to Z$, s corps réel clos.

$$\begin{tikzcd} T \times_Z \operatorname{Spec} s \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} s \arrow[r, "z"] \arrow[rr, bend right, "(3)"'] & Z \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

□

(2) On suppose que $Z = \operatorname{Spec} s$, s corps réel clos. Soit $x \in X_r$ l'image de l'unique point de Z_r, soit $R = k(x)$. On a :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & Y \times_X \operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z = \operatorname{Spec} s \arrow[r] & \operatorname{Spec} R \arrow[r, "x"] & X \end{tikzcd}$$

Il suffit de prouver le résultat pour (1) et (2).

(3) Cas où $Z_r \to X_r$ est l'inclusion d'un $x \in X_r$:

On veut prouver que $(Rf_* F)_x \xrightarrow[\beta(3)]{\sim} H^*(f_r^{-1}(x), F)$.

en fait $R\Gamma$.

Digression : Le cas des espaces topologiques.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"] \\ x \in X \end{tikzcd}$$

* X, Y espaces topologiques localement compacts séparés
* f propre
* $F \in Ab(Y)$.

Alors $(Rf_* F)_x \simeq \underset{R\Gamma}{H^*}(f^{-1}(x), F)$.

Idée de la preuve : (i) $f^{-1}(x)$ compact $\Rightarrow$ toute section de F sur $f^{-1}(x)$ s'étend à un voisinage ouvert

(ii) On déduit formellement de (i) que $H^*(f^{-1}(x), F) \simeq \varinjlim_{U \supset f^{-1}(x) \text{ ouvert}} H^*(U, F)$.

(iii) $(Rf_* F)_x = \varinjlim_{\Omega \ni x \text{ ouvert}} (Rf_*)\Gamma(\Omega) = \varinjlim_{\Omega \ni x} H^*(f^{-1}(\Omega), F)$.

Donc il suffit de prouver:

<u>Lemme</u>: Soit $V \supset f^{-1}(x)$ ouvert. Il existe $U \ni x$ ouvert tel que $f^{-1}(U) \subset V$.

<u>Dém.</u>: Soit $V \supset f^{-1}(x)$ ouvert. Alors $f(Y-V)$ est fermé (f fermée), donc $U = X - f(Y-V)$ est ouvert, et convient.

□

Fin de la digression, retour à: $f : Y \to X$ morphisme propre entre schémas, $x \in X_r$. On veut $(Rf_* F)_x \xrightarrow{\sim} H^*(f_r^{-1}(x), F)$.

OPS X affine. Alors X_r est spectral, et Y_r aussi (Y est séparé qc).

<u>Prop</u>: S espace spectral, $K \subset S$ quasi-compact stable par générisations, F faisceau sur S. Alors toute section de F sur K se prolonge à un voisinage ouvert de K.

<u>Lemme</u>: S spectral, $K \subset S$ quasi-compact. Alors $\boxed{Gen(K)} := \{$générisations de points de $K\} = \bigcap_{\substack{\Omega \supset K \\ \text{ouvert qc}}} \Omega$.

<u>Dém. de la prop</u>: Soit $s \in \Gamma(K, F_{|K})$. Il existe $U_1, \dots, U_n \subset S$ ouverts qc et $s_i \in F(U_i)$ tq: (i) $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_n =: U$

(ii) $\forall i$, $s_{|K \cap U_i} = s_{i\,|K \cap U_i}$.

Soit $U_{ij} = \{x \in U_i \cap U_j \mid s_{i,x} = s_{j,x}\}$ (ouvert de S).

Soit $W = \{x \in U \mid \forall i, j$ tq $x \in U_i \cap U_j$, alors $s_{i,x} = s_{j,x}\}$.

Alors $K \subset W = \bigcap_{i,j} \left((U - U_i \cap U_j) \cup U_{ij} \right)$ est ouvert dans S_{cons},

donc $\underbrace{U}_{\text{ouvert qc}} - W$ est compact pour S_{cons}. De plus $K = Gen(K) = \bigcap_{\Omega \text{ ouvert}} K$,

donc $(U - W) \cap \bigcap_{\substack{\Omega \supset K \\ \text{ouvert qc}}} \Omega = \emptyset$, donc $\exists\, \Omega$ tq $(U-W)^{qc} \cap \Omega = \emptyset$

($\Omega \supset K$ ouvert qc). Donc $\Omega \subset W$, donc les $s_i|_{U_i \cap \Omega}$ se recollent en $s' \in F(\Omega)$ tq $s'|_K = s$.

□

cor : Sous les hypothèses de la prop., pour tout $F \in Ab(S)$, on a

$$H^*(K, F|_K) \simeq \varinjlim_{U \supset K \text{ ouvert}} H^*(U, F).$$

dém : Pour H^0, c'est la prop. Pour passer à H^*, il suffit de prouver que, si $I \in Ab(S)$ injectif, alors $H^n(K, I|_K) = 0$ pour $n \geq 1$.

Si $V \subset K$ est un ouvert qc de K, toute section de $I|_K$ sur V se prolonge à un voisinage ouvert de V dans S (par la prop), donc à S car I est flasque, donc à K. Donc $H^n(K, I|_K) = 0$ pour $n \geq 1$.

□

($Y \xrightarrow{f} X$ affine propre, $f_r : Y_r \to X_r \ni x$).

Pb : $f_r^{-1}(x)$ est qc, mais pas stable par générisations.

def : Soit S un espace spectral. On dit que S est **normal** s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes (où $M(S) = \{$points fermés de $S\}$) :

(i) $\forall x \in S$, $\exists! \pi(x) \in M(S)$ tq $x \rightsquigarrow \pi(x)$ (i.e. $\pi(x) \in \overline{\{x\}}$) ;

(ii) $\forall x, y \in M(S)$, $\exists U, V \subset S$ ouverts tq $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$;

(iii) $\forall x \in M(S)$, x a une base de voisinages fermés dans S ;

[(iv) $\forall F, G \subset S$ fermés, $\exists U, V \subset S$ ouverts tq $F \subset U$, $G \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

(Équivalence : exo, cf [CoC] Prop. 2.) rq : S normal $\Rightarrow M(S)$ compact.

ex : (1) Si $S = \mathrm{Sper}(A)$, alors $\forall x \in S$, $\overline{\{x\}}$ est totalement ordonné par spécialisation. Donc S est normal.

(2) Si $S = V_r$, V schéma séparé qc, alors $\forall x \in S$, $\overline{\{x\}}$ est totalement ordonné par spécialisation (résulte facilement de (1).)

(3) Si S est comme dans (2) et $S' \subset S$ est fermé pour S_{cons} ($\Leftrightarrow S'$ est pro-constructible), alors S' est spectral et normal.

(eg $S = Y_r$, $S' = \mathrm{Gen}(f_r^{-1}(x)) = \bigcap_{\Omega \supset f_r^{-1}(x) \text{ ouvert qc}} \Omega$ ou $S' = f_r^{-1}(x)$.)

Prop : Soit S un espace spectral normal, soit $\pi : S \to M(S)$ qui envoie x sur l'unique spécialisation fermée de x. Alors π est continue fermée, et $i^* : \underbrace{SL(S)}_{\text{faisceaux}} \to \underbrace{SL(M(S))}_{\text{faisceaux}}$ est égal à π_*, où $i : M(S) \to S$ est l'inclusion.

Dém : * π continue : Soit $U \subset S$ ouvert, $x \in \pi^{-1}(\pi(U \cap M(S)))$. Il existe $F \supset \Omega \ni \pi(x)$ avec F fermé, Ω ouvert (dans S) t.q. $F \subset U$. Alors $\pi(F) \subset F \subset U$, donc $F \subset \pi^{-1}(U \cap M(S))$. donc $\Omega \subset \pi^{-1}(U \cap M(S))$. Or $\pi(x) \in \Omega$, donc $x \in \Omega$. Donc $\pi^{-1}(\pi(U \cap M(S)))$ est ouvert.

* π fermée : $S \xrightarrow{\pi} M(S)$ continue, S est qc, $M(S)$ est compact.

* $\pi^* = i_*$: F faisceau sur S. Alors $i^* F$ est le faisceautisé du préfaisceau (sur $M(S)$) $W \longmapsto \varinjlim_{\substack{U \supset W \\ \text{ouvert de } S}} F(U)$.

Soit $W \subset M(S)$ ouvert, alors $\pi^{-1}(W) = \mathrm{Gen}_S(W)$ est ouvert dans S. Si $U \subset S$ est ouvert, $U \supset W$ ssi $U \supset \pi^{-1}(W)$. Donc

$$\varinjlim_{\substack{U \supset W \\ \text{ouvert}}} F(U) = F(\pi^{-1}(W)) = (\pi_* F)(W).$$ □

$$H^*(M(S), \pi_* F) = H^*(M(S), i^* F)$$

$i^* = \pi_*$ exact $\longrightarrow$ $\|$; $//$

Cor : Pour tout $F \in Ab(S)$ on a $H^*(S, F) \simeq H^*(M(S), F)$.

Retour au changement de base : $Y \xrightarrow{f} X$ propre, $x \in X_{r}$, X affine.

$f_r^{-1}(x)$ est qc, donc $\mathrm{Gen}\, f_r^{-1}(x) = \bigcap_{\substack{\Omega \supset f_r^{-1}(x) \\ \text{ouvert qc}}} \Omega$ est qc stable par généralisation, spectral et normal.

(car Y est un schéma qc séparé).

Donc, pour $F \in AL(Y_r)$, $H^*(\mathrm{Gen}\, f_r^{-1}(x), F) \simeq \varinjlim_{\substack{U \supset f_r^{-1}(x) \\ \text{ouvert}}} H^*(U, F)$.

Mais $M(\mathrm{Gen}\, f_r^{-1}(x)) = M(f_r^{-1}(x))$, donc

$$H^*(\mathrm{Gen}\, f_r^{-1}(x), F) \simeq H^*(f_r^{-1}(x), F).$$

Finalement, $\underbrace{H^*(f_r^{-1}(x), F)}_{\varinjlim_{\Omega \ni x} H^*(f_r^{-1}(\Omega), F)} = \varinjlim_{U \supset f_r^{-1}(x)} H^*(U, F)$. Tout $U \supset f_r^{-1}(x)$ ouvert contient $f_r^{-1}(\Omega)$ avec $\Omega \ni x$ ouvert. (car f_r est fermée)

Comme f_r est fermée, on conclut comme dans le cas topologique. □

(4) Changement de base pour

$$\begin{tikzcd} Y_s \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}\, S \arrow[r, "g"'] & \mathrm{Spec}\, R \end{tikzcd}$$

$R \subset S$ corps réels clos.

* On peut supposer F constructible :

* On peut supposer $F = k_* M$, $k : K \hookrightarrow Y_r$ avec K constructible fermé, M constant sur K :

* $V := K \cap Y(R)$ est semi-algébrique fermé dans $Y(R)$ et $H^*(K, M) \simeq H^*_{sa}(V, M)$; $H^*(g^{-1}(K), M) \simeq H^*_{sa}(V(S), M)$.

dém :

* Soit $V = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma$ une triangulation semi-algébrique de V. On a

Preuve du thm B(ii) (Changement de base propre pour la topologie étale.)

$$(C)\quad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "f\ \text{propre}"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

thm B : (i) $\forall F \in \widetilde{Y}_{et}$, $\beta_{et,(C)}(F)$ est un isomorphisme.

(ii) $\forall F \in Ab(Y_{et})$ de torsion, $\beta_{et,(C)}(F)$ est un isomorphisme.

Cor : A anneau strictement hensélien, $k = A/m_A$, $Y \to \operatorname{Spec} A$ propre, $Y_0 = Y \otimes_A k$. Alors pour tout $F \in Ab(Y_{et})$ de torsion $H^*(Y, F) \xrightarrow{\sim} H^*(Y_0, F_{|Y_0})$.

Pourquoi est-ce un corollaire ? :

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r, "g"'] & \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}$$

prop : Si le corollaire est vrai pour tout A strictement hensélien tel qu'il existe $\operatorname{Spec} A \to X$ et pour $Y \times_X \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A$, alors le théorème B est vrai pour (C).

Dém : (1)

(2)

Soit $F \in AL(Y_{\acute{e}t})$ de torsion.

(3) Fait : Si $z \in Z$ est fermé dans $g^{-1}(g(z))$, alors

$$\mathrm{Bc}^*_{(\mathrm{C})}(F)_{\bar z} : (g^* Rf_* F)_{\bar z} \longrightarrow (Rp_* g'^* F)_{\bar z} \text{ est un iso.}$$

Preuve du fait :

(4) Fin de la preuve de la prop : Par (3),

$$(g^* Rf_* F)_{\bar z} \xrightarrow{\sim} (Rp_* g'^* F)_{\bar z} \text{ si } \underset{\in Z}{z} \text{ est fermé dans } g^{-1}(g(z)).$$

Preuve du corollaire :

(1) Lemme : Si on a :

$$\begin{tikzcd}
Y'_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(C')"] & Y' \arrow[d, "h"] \\
Y_0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Spec}\, k \arrow[r, "g"'] & \mathrm{Spec}\, A
\end{tikzcd}$$

avec : (i) h surjectif ;

(ii) le thm B vrai pour (C') ;

(iii) le corollaire vrai pour $f \circ h$;

alors le corollaire est vrai pour f.

dém : Soit $F \in AL(Y_{\acute{e}t})$ de torsion. Alors :

(2) Le corollaire pour f projectif implique le corollaire pour f propre.

dém :

(3) Le corollaire pour $f : (\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A)$ implique le corollaire pour f projectif.

dém :

(4) Le corollaire pour $\dim Y_0 \leq 1$ implique le corollaire pour $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$.

dém : Par récurrence sur n.

rmq : L'hypothèse implique que le thm B est vrai pour $f : Y \to X$ à fibres de dimension ≤ 1.

* $n \leq 1$:

* $n-1 \to n$ $(n \geq 2)$:

(5) A strictement hensélien, $k = A/m_A$. Si pour tout $Y' \to \operatorname{Spec} A$ propre tel que $\dim(Y'_0) \leq 1$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$H^q(Y', \mathbb{Z}/N) \to H^q(Y'_0, \mathbb{Z}/N) \begin{cases} \text{iso. pour } q = 0 \\ \text{surjectif pour } q \geq 1 \end{cases}$$

alors le corollaire est vrai.

<u>dém</u> :

(6) A strictement henselien, $k = A/m_A$, Y propre sur A tel que $\dim(Y_0) \leq 1$, $N \in \mathbb{N}^*$. Alors $H^q(Y, \mathbb{Z}/N) \longrightarrow H^q(Y_0, \mathbb{Z}/N)$ est bijectif pour $q = 0$, surjectif pour $q \geq 1$.

<u>dém</u> : *

* <u>$q=0$</u> :

Donc la conclusion résulte du fait que

* <u>$q=1$</u> : On peut supposer Y connexe et alors Y_0 est connexe par le cas $q=0$. Alors

Donc la conclusion résulte du fait que

* <u>$q=2$</u> : Si $N = p = car(k)$, alors

Donc si $N = p^r$ avec $p = car(k)$, alors
On suppose N premier à $car(k)$. On a

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[d, "(a)"'] & H^2(X, \mu_N) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(X, \mathcal{O}_X^*) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}^*) = \mathrm{Pic}(X_0) \arrow[r, "(b)"'] & H^2(X_0, \mu_N) \arrow[r] & H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}^*) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Il suffit de prouver que

Pour (b), on a :

donc il suffit de montrer que (b') est surjectif.

□