__Rappel__: On considère un carré cartésien de schémas:

$$
(c) \qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "g"'] & X
\end{tikzcd}
$$

$t \in \{ét, rét, h\}$

$F$ faisceau sur $Y_t$

On a un morphisme de changement de base:

$B_{t,(c)}(F): g^* f_* F \to p_* g'^* F$. (Fonctoriel en $F$)

Si $F$ est un faisceau abélien on a une version dérivée:

$B^n_{t,(c)}(F): g^* R^n f_* F \to R^n p_* g'^* F$.

__thm__: Si $f$ est propre:

(i) $B_{t,(c)}(F)$ est un isomorphisme pour $t \in \{ét, rét, h\}$ et tout $F \in \tilde{Y}_t$.

(ii) Si $t = rét$, $B^n_{t,(c)}(F)$ est un isomorphisme pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $F \in Ab(Y_t)$.

Si $t = ét$ ou $h$, $B^n_{t,(c)}(F)$ est un isomorphisme pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $F \in Ab(Y_t)$ __de torsion__.

__La dernière fois:__

* Le théorème pour $t = ét$ ou $rét$ implique le théorème pour $t = h$.
* Pour $t = rét$, il reste à prouver:

(4) **Prop** : Le théorème est vrai pour le carré :

$$\begin{tikzcd} Y_s \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "F \text{ propre}"] \\ \operatorname{Spec} S \arrow[r] & \operatorname{Spec} R \end{tikzcd}$$

et $\mathcal{F} \in Ab(Y_{\text{ét}})$, où $R \subset S$ sont des corps réels clos.

**Preuve** : * On peut supposer $\mathcal{F}$ constructible ;

En effet, $\mathcal{F}$ est limite inductive filtrante de constructibles (Scheiderer A.4).

* On peut supposer $\mathcal{F} = k_* M$ avec $k : K \hookrightarrow Y_r$, $K$ constructible fermé, $M$ constant.

Ces faisceaux $k_* M$ engendrent la catégorie de faisceaux constructibles par extension. (A.6)

* $V := K \cap Y(R)$ est semi-algébrique fermé dans $Y(R)$, et

$H^*(K, M) \simeq H^*_{sa}(V, M)$, $H^*(q^{-1}(K), M) \simeq H^*_{sa}(V(S), M)$.

Tarski-Seidenberg + Scheiderer 15.1.

* $H^*_{sa}(V, M) \simeq H^*_{sa}(V(S), M)$.

Soit $V = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma$ une triangulation semi-algébrique ($V_\sigma$ simplexe standard), $\Sigma$ complexe simplicial

alors $H^*_{sa}(V(R), M) \simeq H^*(\Sigma, \tilde{M})$, où $\tilde{M} : \Sigma \to Ab$, $\sigma \mapsto M$.

$V(R) = \bigcup_\sigma V_\sigma(R)$ $\quad V(S) = \bigcup_\sigma V_\sigma(S)$ $\quad \simeq H^*_{sa}(V(S), M)$ □

**thm B** (changement de base propre pour la topologie étale)

$$(c)\qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

On suppose $f$ propre.

(i) $\forall F \in \tilde{Y}_{et}$, $\beta_{et,(c)}(F)$ est un isomorphisme.

$\rightarrow$ (ii) $\forall F \in Ab(Y_{et})$ de torsion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta^n_{et,(c)}(F)$ est un isomorphisme

(On se concentre sur la preuve de (ii).)

cor: $A$ anneau local strictement hensélien, $k = A/m_A$, $Y \to \operatorname{Spec} A$ propre, $Y_0 = Y \otimes_A k$. Alors, pour tout $F \in Ab(Y_{et})$ de torsion, on a :

$$H^*(Y, F) \xrightarrow{\sim} H^*(Y_0, F_{|Y_0}).$$

Pourquoi est-ce un corollaire ?

$$\begin{tikzcd} Y_0 = T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z = \operatorname{Spec} k \arrow[r, "g"'] & \operatorname{Spec} A = X \end{tikzcd}$$

$$g^* Rf_* F = H^*(\operatorname{Spec} A, F) = H^*(Y, F)$$

$$Rp_* g^* F = H^*(Y_0, F_{|Y_0})$$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "f"] & F \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

propre

**Prop :** Si le corollaire est vrai pour tout $A$ local strictement hensélien tel qu'il existe $\operatorname{Spec} A \to X$ et pour $Y \times_X \operatorname{Spec} A$, alors le théorème $B$ est vrai pour (c).

**dém :** (1) On peut supposer $X$ et $Z$ affines.

(2) On peut supposer $Z$ de type fini sur $X$.

(si $X = \operatorname{Spec} B$, $Z = \operatorname{Spec} C$, alors $C = \varinjlim_{\text{filtrante}} C_i$, avec $C_i$ de type fini sur $B$.)

(3) **Fait :** $F \in Ab(Y_{et})$ de torsion. Si $z \in Z$ est fermé dans $g^{-1}(g(z))$, alors $\beta^*_{et,(c)}(F)_{\bar z} : (g^* Rf_* F)_{\bar z} \longrightarrow (Rp_* q^* F)_{\bar z}$ est un isomorphisme.

Preuve du fait : $A = \mathcal{O}^{sh}_{Y, g(\bar z)}$, $A' = \mathcal{O}^{sh}_{Z, \bar z}$

Alors : $(g^* Rf_* F)_{\bar z} = (Rf_* F)_{g(\bar z)} = H^*(Y \times_X A, F)$

$$\xrightarrow[\text{hyp.}]{\sim} H^*(Y \times_X k(g(\bar z)), F)$$

?

$$(Rp_* q^* F)_{\bar z} = H^*(T \times_Z A', F) \xrightarrow[\text{hyp.}]{\sim} H^*(T \times_Z k(\bar z), F)$$

$$\xrightarrow{\sim} H^*(Y \times_X k(\bar z), F)$$

Or $z$ est fermé dans $g^{-1}(g(z))$, donc $k(z)$ est une extension finie de $k(g(z))$, donc $k(\bar z) = k(g(\bar z))$. □

(4) Fin de la preuve de la proposition :

$K =$ cône de $g^* Rf_* F \longrightarrow Rp_* q^* F$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, soit $U \xrightarrow{\pi} Z$ étale, soit $s \in H^n(U, K)$. Si $u \in U$ est fermé dans $(g\pi)^{-1}((g\pi)(u))$, alors $s_{\bar u} = 0$ par (3), donc $s = 0$ dans un voisinage étale de $\bar u$. Or ces $u$ sont denses dans $U$, donc leurs voisinages étales recouvrent $U$, donc $s = 0$. □

## Preuve du corollaire :

(1) Lemme : Si on a :

$$\begin{tikzcd} Y'_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(C')"] & Y' \arrow[d, "h"', "\text{propre}"] \arrow[dd, bend left, "F\circ h \text{ propre}"] \\ Y_0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "F"] \\ \mathrm{Spec}\, k \arrow[r] & \mathrm{Spec}\, A \end{tikzcd}$$

avec : (i) $h$ surjectif ;

(ii) le thm. B connu pour $(C')$ ;

(iii) le corollaire connu pour $F\circ h$ ;

alors le corollaire est vrai pour $F$.

dém : Soit $F \in Ab(Y_{ét})$ de torsion. Alors :

$$H^*(Y, Rh_* h^* F) \simeq H^*(Y', h^*F) \underset{(iii)}{\simeq} H^*(Y'_0, h^*F|_{Y'_0})$$

$$\underset{(ii)}{\simeq} H^*(Y_0, Rh_* h^* F|_{Y_0}).$$

Donc le cor. est vrai pour $Rh_* h^* F$.

De plus $F \xrightarrow[\text{unité}]{} Rh_* h^* F$ est injectif en degré 0 par (i),

On finit par une chasse au diagramme.

∎

(2) Le corollaire pour $F$ projectif implique le corollaire pour $F$ propre.

dém : Lemme de Chow :

Si $A$ est noethérien, on a $Y' \xrightarrow[\substack{\text{projectif}\\ \text{surjectif}}]{h} Y \xrightarrow{F} \mathrm{Spec}\, A$ avec

$F\circ h$ projectif, on applique le lemme.

∎

(3) Le corollaire pour $f$ égal à $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ implique le corollaire pour $f$ projectif.

dém : 

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f \text{ projectif}"] \arrow[dr, hook, "\text{immersion fermée}"'] & & \operatorname{Spec} A \\ & \mathbb{P}^n_A \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Or le CB pour une immersion fermée est facile.

$$\left(\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}\right)$$

□

(4) Le corollaire pour $\dim Y_0 \leq 1$ implique le corollaire pour $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$.

[rmq : L'hypothèse implique le thm. B pour $Y \xrightarrow{f} X$ à fibres géométriques de dimension $\leq 1$.

dém : Récurrence sur $n$ : * $n \leq 1$ : c'est l'hypothèse.

* $n-1 \to n$ $(n \geq 2)$ :

$$\mathbb{P}^n_A \times_A \mathbb{P}^1_A \hookleftarrow P = \{([x_0 : \dots : x_n], [t_0 : t_1]) \in \mathbb{P}^n_A \times_A \mathbb{P}^1_A \mid t_0 x_0 + t_1 x_1 = 0\}$$

$P \to \mathbb{P}^n_A$ : pr. propre surjectif, à fibres géom. de dim. $\leq 1$

$P \to \mathbb{P}^1_A$ : pr. à fibres $\simeq \mathbb{P}^{n-1}$

Par le lemme, le cor. pour $\mathbb{P}^n_A$ résulte du cor. pour $P$.

Le cor. pour $P$ résulte de l'hyp. de récurrence.

□

(5) Soient $A$ local strictement hensélien, $k = A/m_A$. Si pour tout $Y' \to \operatorname{Spec} A$ propre tel que $\dim Y'_0 \leq 1$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$H^q(Y', \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \longrightarrow H^q(Y'_0, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \begin{cases} \text{bijectif pour } q = 0 \\ \text{surjectif pour } q \geq 1 \end{cases}$$

alors le corollaire est vrai.

<u>dém</u> : Soit $Y \to \operatorname{Spec} A$ propre, on peut supposer $\dim(Y_0) \leq 1$. $F \in Ab(Y_{ét})$ de torsion.

OPS $F$ constructible. Alors il existe $Y' \xrightarrow{h} Y$ fini et $N \in \mathbb{N}^*$ tq $F \hookrightarrow h_*(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. On conclut par une chasse au diagramme un peu plus compliquée.

$\square$

(6) Soient $A$ local strictement hensélien, $k = A/m_A$, $Y \to \operatorname{Spec} A$ propre tel que $\dim(Y_0) \leq 1$, $N \in \mathbb{N}^*$. Alors $H^q(Y, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \longrightarrow H^q(Y_0, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est $\begin{cases} \text{bijectif si } q = 0 \\ \text{surjectif si } q \geq 1. \end{cases}$

<u>dém</u> : * Si $q \geq 2$ $H^q(Y_0, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = 0$.

* $q = 0$ : 

$$\begin{array}{c} H^0(Y, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\pi_0(Y)} \\ \downarrow \\ H^0(Y_0, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\pi_0(Y_0)} \end{array}$$

Il suffit de prouver que $\pi_0(Y_0) \xrightarrow{\sim} \pi(Y)$.

(relèvement des idempotents)

$\square$

* $q=1$ : On peut supposer $Y$ connexe. Par (i) $Y_0$ est connexe.

Alors : $H^1(Y, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(Y), \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$

$H^1(Y_0, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(Y_0), \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$

Il suffit de prouver que $\pi_1(Y_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y)$.

(relèvement des revêtements étales le long d'un idéal de carré nul
+ dévissage d'Artin ) □

* $q=2$, $N = p^r$ avec $p = \mathrm{car}\, k > 0$ :

On peut supposer $r=1$. $(0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z} \to 0)$

Suite exacte d'Artin Schreier :

$$\begin{array}{c} 0 \to \mathbb{F}_p \to \mathcal{O}_{Y_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_0} \to 0 \\ s \longmapsto s^p - s \end{array}$$

Comme $H^n(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0}) = 0$ si $n \geq 2$,

$H^2(Y_0, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Coker}\left( H^1(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0}) \longrightarrow H^1(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0}) \right)$.

car : c'est surjectif

$= 0$.

* $q=2$, $N$ premier à car $k$ : $\underline{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}_Y \simeq \mu_{N,Y}$

Suite exacte de Kummer : $1 \to \mu_N \to \mathcal{O}_X^* \to \mathcal{O}_X^* \to 1$, $s \longmapsto s^N$

(pareil sur $X_0$) $X = Y$

On obtient :

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[d, "(a)"'] & H^2(X, \mu_N) \arrow[r] \arrow[d, "\text{surjectif?}"] & H^2(X, \mathcal{O}_X^*) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ & \mathrm{Pic}(X_0) \arrow[r, "(b)"] & H^2(X_0, \mu_N) \arrow[r] & H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}^*) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Il faut : (a) et (b) surjectifs.
(b')

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(X_0) \arrow[r, "(b)"] \arrow[d, "(b')"'] & H^2(X_0, \mu_N) \arrow[d, "\wr"] & \\ \mathrm{Pic}((X_0)_{red}) \arrow[r, "\text{surjectif}"'] & H^2((X_0)_{red}, \mu_N) \arrow[r, "0"] & H^2((X_0)_{red}, \mathcal{O}_X^*) \end{tikzcd}$$

Torsion ?

Oui !

Lei Fu 7.2.7
(utilise le thm de Tsen)

## Changement de base lisse :

**thm** :
$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g \text{ lisse}"'] & X \end{tikzcd} \qquad (C)$$

On suppose que :
* $g$ est lisse ;
* $f$ est quasi-compact et quasi-séparé.

(i) Pour $t \in \{et, ret, b\}$ et $F \in \widetilde{Y_t}$,
$$\beta_{t,(c)}(F) : g^* f_* F \to p_* g^* F.$$

(ii) Soit $F \in Ab(Y_t)$. Si $t = et$ (resp. $t = b$), on suppose que $F$ (resp. $j^* F$) est de torsion première aux caractéristiques résiduelles de $X$. Alors :
$$\beta^*_{t,(c)} : g^* Rf_* F \to Rp_* g^* F$$ est un isomorphisme.

rmq : Il suffit de supposer que $Z = \varprojlim Z_\lambda$ avec chaque $Z_\lambda$ lisse sur $X$ et les morphismes de transition $Z_\lambda \to Z_\mu$ affines.

## Idée de la preuve :

(1) On peut supposer $X, Y$ affines, $F$ de type fini.

(2) Par compactification de Nagata (et CB propre) on peut supposer que $f$ est une immersion ouverte.

(3) Cas topologique : On remplace la condition "$g$ lisse" $(Z \xrightarrow{g} X)$ par : $\forall z \in Z$, il existe des voisinages ouverts $V$ de $z$ et $U$ de $x = g(z)$ tels que $g(V) \subset U$ et
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & U \arrow[d, equal] \\ \mathbb{R}^N \times U \arrow[r, "pr_2"] & U \end{tikzcd}$$

On prend $F = \underline{A}_Y$ (constant sur $Y$). $z \in Z$, $x = g(z)$, $V$ et $U$ comme avant.

$$(g^* R^n f_* \underline{A}_Y)_z = (R^n f_* \underline{A}_Y)_x = \varinjlim_{x \in U' \subset U} H^n(U' \cap Y, A)$$

$$(R^n p_* \underbrace{g^* \underline{A}_Y}_{\underline{A}_T})_z = \varinjlim_{z \in V' \subset V} H^n(V' \cap (\mathbb{R}^N \times U \cap Y), A)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^N \times (U \cap Y) \arrow[r] \arrow[d, hook] & U \cap Y \arrow[d, hook, "F"] \\ (0, x) = z \in \mathbb{R}^N \times U \arrow[r, "pr_2"] & U \ni x \\ \mathbb{R}^N \times U' \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\cup"] & U' \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

Les $V'$ de la forme $B(0, R) \times U'$ sont cofinaux, et $(B(0,R) \times U') \cap (\mathbb{R}^N \times U \cap Y) = B(0,R) \times (U' \cap Y)$, et
$$H^*(B(0,R) \times (U' \cap Y), A) \simeq H^*(U' \cap Y, A).$$

$\square$

## (4) Morphismes ULA :

(a) $g : Z \to X$ est **localement acyclique** (LA) pour la topologie $\tau$ si : pour tout $z \in Pt(Z_\tau)$, si $x = g(z) \in Pt(X_\tau)$, si $U \to X^x$ est étale et :

$$\begin{tikzcd} U \times_{X^x} Z^z \arrow[r, "\tilde g"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ Z^z \arrow[r, "g"] & X^x \end{tikzcd}$$

alors $F \to R\tilde g_* \tilde g^* F$ est un isomorphisme pour tout $F$ comme dans le théorème.

(b) $g$ est **universellement localement acyclique** (ULA) s'il est LA et le reste après tout changement de base $X' \to X$.

(5) Le théorème est vrai pour $g$ ULA et $f$ quasi-compact quasi-séparé. ("formel")

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "k"] \\ Z \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

(6) Un morphisme lisse est LA, donc ULA.
(dur)

$\mathbb{A}^1_X \to X$ $\quad X = \mathrm{Spec}\, A$ $\quad A$ strict. hensélien.

$$\begin{tikzcd} \bar z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "g"] & \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}^{sh}_{Z,\bar z} \arrow[l] \arrow[d] & P \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\square"] \\ \bar x \arrow[r] & X & \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}^{sh}_{X,\bar x} \arrow[l] & \bar t \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$F$ sur $Z$.

variété de cycles évanescents de $g$ en $\bar z$

$H^*(P, F) \simeq F_{\bar z}$