

Rappel: On considère un carré cartésien de schémas:

$$(c) \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{I} & Y \\ p \downarrow & \square & \downarrow F \\ Z & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \downarrow J & \end{array} \quad \begin{array}{l} t \in \{t, \text{ret}, \text{lt}\} \\ F \text{ faisceau sur } Y_t \end{array}$$

On a un morphisme de changement de base:

$$R_{t,(c)}(F): g^* f_* F \rightarrow p_* g^* F. \quad (\text{Foncteur en } F)$$

Si F est un faisceau abélien, on a une version dérivée:

$$R_{t,(c)}^h(F): g^* R^h f_* F \rightarrow R^h p_* g^* F.$$

thm: Si F est propre;

(i) $R_{t,(c)}(F)$ est un isomorphisme pour $t \in \{t, \text{ret}, \text{lt}\}$ et tout $F \in \tilde{Y}_t$.

(ii) Si $t = \text{ret}$, $R_{t,(c)}^h(F)$ est un isomorphisme pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $F \in \text{Ab}(Y_t)$.

Si $t = \text{lt}$ ou lt , $R_{t,(c)}^h(F)$ est un isomorphisme pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $F \in \text{Ab}(Y_t)$ de torsion.

La dernière fois:

* Le théorème pour $t = \text{ret}$ ou ret implique le théorème pour $t = \text{lt}$.

* Pour $t = \text{ret}$, il reste à prouver:

(4) prop: Le théorème est vrai pour le cas:

$$\begin{array}{ccc} Y_s & \xrightarrow{f} & Y \\ P \downarrow & \square & \downarrow F \text{ propre} \\ \text{Spec } S & \rightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

et $F \in \text{Ab}(Y_{\text{ét}})$, où Res sont des corps réels clos.

preuve: * On peut supposer F constructible;

En effet, F est limite inductive filtrante de constructibles (Scheiderer A.4).

* On peut supposer $F = h_* M$ avec $h: K \rightarrow Y$, K constructible fermé, M constant.

Ces faisceaux $h_* M$ engendrent la catégorie des faisceaux constructibles par extension. (A.6)

* $V \in \text{KOY}(K)$ est semi-algébrique fermé dans $\mathbb{A}^n(K)$, et $H^*(K, M) \simeq H_{\text{sa}}^*(V, M)$, $H^*(g^{-1}(K), M) \simeq H_{\text{sa}}^*(V(g), M)$.

Tank. - Seidenberg + Scheiderer 25, 1.

* $H_{\text{sa}}^*(V(g), M) \simeq H_{\text{sa}}^*(V(S), M)$.

Soit $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} V_i$ une triangulation semi-algébrique (V_i singuliers standards),
 $\underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{complexe simplicial}}$

donc $H_{\text{sa}}^*(V(K), M) \simeq H^*(\mathbb{Z}, \tilde{H})$, où $\tilde{H}: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Ab}$
 $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & \text{Ab} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & M \end{array}$

$V(K) = \bigcup_i V_i(K)$ $V(S) = \bigcup_i V_i(S)$ $\simeq H_{\text{sa}}^*(V(S), M)$ \square

thm B (changement de base propre pour la topologie étale)

$$(c) \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{q} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow F \\ Z & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

On suppose F propre.

(i) $\forall F \in \check{Y}_{\text{ét}}, R_{\text{ét},(c)}(F)$ est un isomorphisme.

→ (ii) $\forall F \in \text{Ab}(\check{Y}_{\text{ét}}), \forall n \in \mathbb{N}, R_{\text{ét},(c)}^n(F)$ est un isomorphisme de torsion.

(On se concentre sur la preuve de (ii).)

cas: A anneau local strict avec la nilpotence, $k = A/\mathfrak{m}_A$, $Y \rightarrow \text{Spec} A$ propre, $Y_0 = Y \otimes_A k$. Alors, pour tout $F \in \text{Ab}(\check{Y}_{\text{ét}})$ de torsion, on a:

$$H^*(Y, F) \xrightarrow{\sim} H^*(Y_0, F|_{Y_0}).$$

Pourquoi est-ce un cocartésien?

$$\begin{array}{ccc} Y_0 = T & \xrightarrow{q} & Y \\ \downarrow p & \square & \downarrow F \\ Z = \text{Spec} k & \xrightarrow{j} & \text{Spec} A = X \end{array}$$

$$j^* R_{\text{ét},(c)}^* F = H^*(\text{Spec} A, F) = H^*(Y, F)$$

$$R_{\text{ét},(c)}^* q^* F = H^*(Y_0, F|_{Y_0}) \leftarrow$$

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{q} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow F \text{ propre} \\ Z & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Prop: Si le corollaire est vrai pour tout A local strictement local tel qu'il existe $\text{Spec } A \rightarrow X$ et pour $\forall X \in \text{Spec } A$, alors le théorème B est vrai pour (C).

Don: (1) On peut supposer X et Z affines.

(2) On peut supposer Z de type fini sur k .

($k = \text{Spec } k, Z = \text{Spec } C$, donc $C = \varinjlim C_i$, avec C_i de type fini sur B_i)

(3) Fait: $F \in \text{Ab}(Y_{\text{ét}})$ de torsion. Si $z \in Z$ est fermé dans $g^{-1}(g(z))$ - alors $R_{\text{ét},(z)}^*(F)|_{\bar{z}} = (z^* R_{\text{ét}} F)|_{\bar{z}} \rightarrow (R_{p^*} g^* F)|_{\bar{z}}$ est un isomorphisme.

Preuve du fait: $A = \mathcal{O}_{Y, g(z)}$, $A' = \mathcal{O}_{Z, z}$

$$\begin{aligned} \text{Alors: } (g^* R_{\text{ét}} F)|_{\bar{z}} &= (R_{\text{ét}} F)|_{g(z)} = H^*(Y \times_k A, F) \\ &\xrightarrow{\text{hyp.}} H^*(Y \times_k k(g(z)), F) \\ (R_{p^*} g^* F)|_{\bar{z}} &= H^*(T_{X,Z} A', F) \xrightarrow{\text{hyp.}} H^*(T_{X,Z} k(\bar{z}), F) \\ &\xrightarrow{\text{hyp.}} H^*(Y \times_k k(\bar{z}), F) \end{aligned}$$

Or z est fermé dans $g^{-1}(g(z))$, donc $k(\bar{z})$ est une extension finie de $k(g(z))$, donc $k(\bar{z}) = k(g(z))$.

(4) Fin de la preuve de la proposition:

$K = \text{coker de } g^* R_{\text{ét}} F \rightarrow R_{p^*} g^* F.$

Soit $u \in \mathcal{D}$, soit $U \xrightarrow{\pi} Z$ étale, soit $s \in H^0(U, K)$. Si

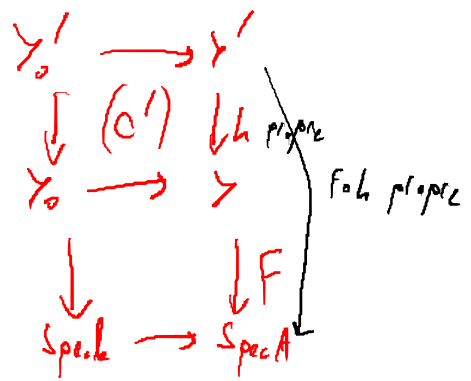
$u \in U$ est fermé dans $(g\pi)^{-1}(g\pi(u))$, alors $s|_u = 0$ par (2), donc

$s = 0$ dans un voisinage étale de \bar{u} . Or ces u sont denses dans U , donc leur voisinage étale recouvre U , donc $s = 0$.

Preuve de corollaire :

(2) Lemme : Si $\alpha = \alpha'$:

- avec : (i) h surjectif ;
 (ii) le thm. B connu pour (C') ;
 (iii) le corollaire connu pour $f \circ h$;



alors le corollaire est vrai pour F .

Dém : Soit $F \in \text{AL}(Y \text{ et } X)$ de Tor. Alors :

$$\begin{aligned}
 H^*(Y, R h_* h^* F) &\simeq H^*(Y', L^* F) \stackrel{(\text{iii})}{\simeq} H^*(Y'_0, L^* F|_{Y'_0}) \\
 &\stackrel{(\text{ii})}{\simeq} H^*(Y_0, R L_* h^* F|_{Y_0}) .
 \end{aligned}$$

Donc le cor. est vrai pour $R h_* h^* F$.

De $Y_0 \rightarrow F \xrightarrow{R L_* h^* F}$ est injectif en degré 0 par (i),

On finit par une classe de Lié et la suite.

□

(5) Le corollaire pour F projectif \Rightarrow implique le corollaire pour F propre.

Dém : Lemme de Chow :

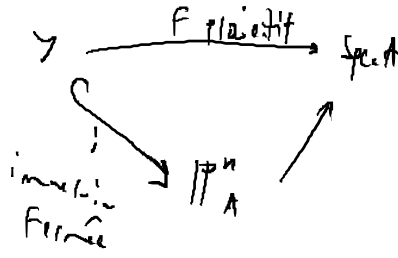
Si A est local k-rien, on a $Y' \xrightarrow[h \text{ surjectif}]{L} Y \xrightarrow{F} \text{Spec } A$ avec

$F \circ h$ projectif, on applique le lemme.

□

(3) Le corollaire pour F égal à $\mathbb{P}_A^n \rightarrow \text{Spec } A$ implique le corollaire pour F projectif.

Dém:



Or, le CB pour une immersion fermée est facile.

$$\begin{pmatrix} Y_0 \rightarrow Y \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A \end{pmatrix}$$

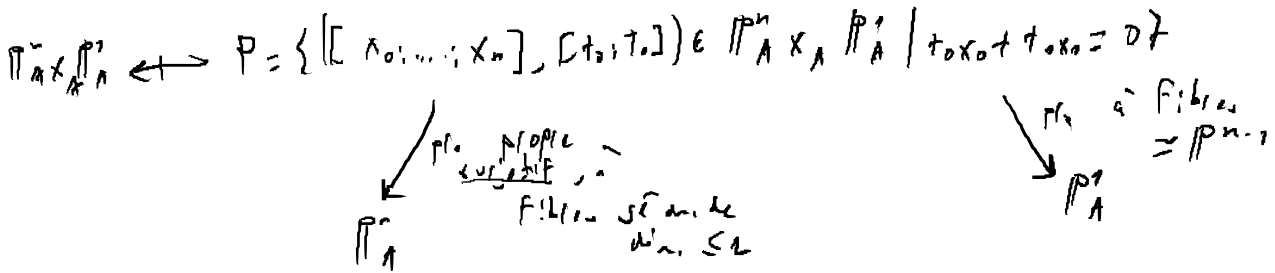
□

(4) Le corollaire pour $\dim Y_0 \leq 2$ implique le corollaire pour $\mathbb{P}_A^n \rightarrow \text{Spec } A$.

[rem: L'hypothèse implique le thm. 8 pour $Y \xrightarrow{F} X$
à fibres géométriques de dimension ≤ 2 .

Dém: Récurrence sur n ; + $n \leq 2$: c'est l'hypothèse.

* $n-1 \rightarrow n$ ($n \geq 2$):



Par le lemme, le cor. pour \mathbb{P}_A^n résulte du cor. pour P .
Le cor. pour P résulte de l'hy. de récurrence.

□

(5) Soient A local strictement hensélien, $k = A/\mathfrak{m}_A$. Si pour tout $Y' \rightarrow \text{Spec } A$ propre tel que $\dim Y'_0 \leq 2$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$H^q(Y', \pi/N\pi) \longrightarrow H^q(Y'_0, \pi/N\pi) \quad \begin{cases} \text{bijectif pour } q=0 \\ \text{surjectif pour } q \geq 1 \end{cases}$$

alors le corollaire est vrai.

Dém: Soit $Y \rightarrow \text{Spec } A$ propre, on peut supposer $\dim(Y_0) \leq 2$,

FEAT(Y_0) de torsion.

On F contractible. Alors il existe $Y' \xrightarrow{h} Y$ fini et

$N \in \mathbb{N}^*$ tel $F \hookrightarrow h^*(\pi/N\pi)$. On conclut par une classe au

diagramme un peu plus compliquée.

□

(6) Soient A local strictement hensélien, $k = A/\mathfrak{m}_A$,
 $Y \rightarrow \text{Spec } A$ propre tel que $\dim(Y_0) \leq 2$, $N \in \mathbb{N}^*$. Alors
 $H^q(Y, \pi/N\pi) \longrightarrow H^q(Y_0, \pi/N\pi)$ est $\begin{cases} \text{bijectif si } q=0 \\ \text{surjectif si } q \geq 1. \end{cases}$

Dém: * Si $q \geq 2$ $H^q(Y_0, \pi/N\pi) = 0$,
 * $q=0$: $H^0(Y, \pi/N\pi) = (\pi/N\pi)^{\pi_0(Y)}$

$$\downarrow \\ H^0(Y_0, \pi/N\pi) = (\pi/N\pi)^{\pi_0(Y_0)}$$

Il suffit de prouver que $\pi_0(Y_0) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y)$.

(relèvement des idempotents)

□

* $g=1$: On peut supposer γ connexe. Par (1) γ_0 est connexe.

Alors: $H^2(\gamma, \pi/N\pi) \simeq H_{\text{an, cont}}(\pi_0(\gamma), \pi/N\pi)$

$H^1(\gamma_0, \pi/N\pi) \simeq H_{\text{an, cont}}(\pi_0(\gamma_0), \pi/N\pi)$

Et substit de premier genre $\pi_1(\gamma_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\gamma)$.

(relèvement des courbes, étale le long d'un 'C' de courbe nul + algèbreisation d'Artin)

□

* $g=2, N = p^r$ avec p carbe > 0 :

On peut supposer $r=2$. $(0 \rightarrow \pi/\pi \rightarrow \mathbb{R}/\pi \rightarrow \mathbb{R}/\pi \rightarrow 0)$

Suite exacte d'Artin-Schreier:

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow \mathcal{O}_{\gamma_0} \rightarrow \mathcal{O}_{\gamma_0} \rightarrow 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$s \rightarrow s^{p-1}$$

Comme $H^n(\gamma_0, \mathcal{O}_{\gamma_0}) = 0$ si $n \geq 2$,

$$H^2(\gamma_0, \mathbb{F}_p) = \text{Coker}(H^1(\gamma_0, \mathcal{O}_{\gamma_0}) \rightarrow H^1(\gamma_0, \mathcal{O}_{\gamma_0}))$$

\uparrow
car c'est surjectif

= 0.

* $g=2, N$ premier à carbe: $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}_\gamma \simeq \mu_N, \gamma$

Suite exacte de Kummer: $1 \rightarrow \mu_N \rightarrow \mathcal{O}_X^\times \rightarrow \mathcal{O}_X^\times \rightarrow 1$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$s \rightarrow s^N$$

(pareil sur X_0)

$X = \gamma$

On obtient:

$$\dots \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X^\times) = \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mu_N) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X^\times) \rightarrow \dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \text{surjectif?} \quad \downarrow$$

$$\text{Pic}(X_0) \xrightarrow{(L)} H^2(X_0, \mu_N) \rightarrow H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}^\times) \rightarrow$$

IP: (1) et (2) surjectif.

$$\text{Pic}(X_0) \xrightarrow{(b')} H^2(X_0, \mu_N)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

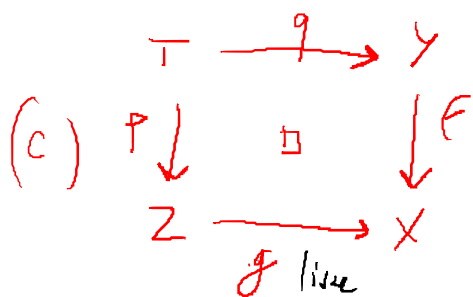
$$\text{Pic}(X_0)_{\text{étal}} \xrightarrow{\text{surjectif}} H^2(X_0)_{\text{étal}}(\mu_N) \xrightarrow{0} H^2(X_0)_{\text{étal}}(\mathcal{O}_{X_0}^\times)$$

Terminé? Oui!

Lei Fu 7.27 (utilise le lem de Tsen)

Changement de base lisse :

thm :



On suppose que:
 * g est lisse
 * F est quasi-compact et quasi-séparé.

(i) Pour $t \in \text{et}$, ret , h et $F \in \tilde{Y}_t$,

$$R_{t,(c)}(F|_t g^* F \rightarrow p_* g^* F,$$

(ii) Soit $F \in Ab(Y_t)$. Si $t = \text{et}$ (resp. $t = b$), on suppose

que F (resp. $g^* F$) est de torsion première ou caractéristique résiduelle de X , Alors :

$$R_{t,(c)}^* : g^* R^* F \rightarrow R^* g^* F \text{ est un isomorphisme.}$$

rem : Il suffit de supposer que $Z = \varprojlim Z_\lambda$ avec chaque Z_λ lisse sur X et les morphismes de Transition $Z_\lambda \rightarrow Z_\mu$ affines.

Idees de la preuve :

(1) On peut supposer X, Y affine, F de type fini,

(2) Par compactification de Nagata on peut supposer que F est de immersion ouverte.

$$(Z \xrightarrow{g} X)$$

(3) Cas topologique : On remplace la condition " g lisse"

par: $\forall z \in Z$, il existe de voisinage ouvert V de z et

$$U \text{ de } x = g(z) \text{ tel que } g(V) \subset U \text{ et } \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & U \\ \cong & & \cong \\ \mathbb{R}^n \times U & \xrightarrow{F} & U \end{array}$$

On prend $F = \underline{A}_y$ (constant sur y), $z \in Z, x = g(z), V \text{ et } U \text{ comme ci-dessus}$

$$(g^* R^n F \otimes \underline{A}_y)_z = (R^n F \otimes \underline{A}_y)_x = \varinjlim_{x \in U' \subset U} H^n(U' \otimes \underline{A})$$

$$(R^n \underline{A}_y)_z = \varinjlim_{z \in V' \subset V} H^n(V' \otimes (R^n \times U \otimes \underline{A})) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times (U \otimes \underline{A}) & \rightarrow & U \otimes \underline{A} \\ \cong & & \cong \\ \mathbb{R}^n \times U & \xrightarrow{F} & U \otimes \underline{A} \end{array}$$

Les V' de la forme $\mathbb{R}(0, R) \times U'$ sont cofibrés, et $(\mathbb{R}(0, R) \times U') \cap (\mathbb{R}^n \times U \otimes \underline{A}) = \mathbb{R}(0, R) \times (U \otimes \underline{A})$, et $H^*(\mathbb{R}(0, R) \times (U \otimes \underline{A})) \simeq H^*(U \otimes \underline{A})$.

□

(4) Morphismes ULA :

(a) $g: Z \rightarrow X$ est localement cyclique (LA) pour la topologie τ : pour tout $z \in \text{pt}(Z_\tau)$, si $x = g(z) \in \text{pt}(X_\tau)$

si $U \rightarrow X^x$ est étale et :

$$\begin{array}{ccc} U_{X^x} \times_{Z^z} & \xrightarrow{\tilde{g}} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z^z & \xrightarrow{g} & X^x \end{array}$$

donc $F \rightarrow R\tilde{g}_* \tilde{g}^* F$ est un isomorphisme pour tout F comme dans le théorème.

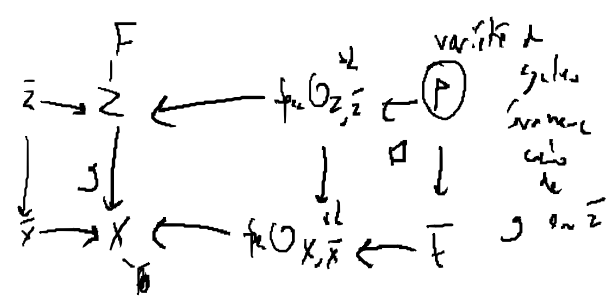
(b) g est universellement localement cyclique (ULA) s'il est LA et le reste après tout changement de base $X' \rightarrow X$.

(5) Le théorème est vrai pour g ULA et F quasi-compact quasi-séparé, ("formel")

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

(6) Un morphisme lisse est LA, donc ULA. (dur)

$\mathbb{A}_x^1 \rightarrow X$ $X = \text{Spec } A$ A étalé localisé.



$H^*(P, F) \simeq F_Z$