[POINTS ET COMPATIBILITÉS AUX LIMITES DU SITE RÉEL-ÉTALE]

<u>Prop.</u> $\tau \in \{\text{ét}, \text{rét}, b\}$, $f : X \to Y$ quasi-compact entre schémas quasi-séparés. Alors :

- pour chaque $(U \to X) \in \text{Ét}'_{qc/X}$, les foncteurs $\Gamma(U, -) : \tilde{X}_\tau \to \text{Set}$ et $H^n_\tau(U, -) : Ab(X_\tau) \to Ab$ commutent aux limites inductives filtrantes ;
- les foncteurs $(f_\tau)_* : \tilde{X}_\tau \to \tilde{Y}_\tau$ et $R^n(f_\tau)_* : Ab(X_\tau) \to Ab(Y_\tau)$ commutent aux limites filtrantes.

$$
\left[
\begin{aligned}
\text{Et}_{/X} &:= \{Y \to X \text{ étale}\} \\
&\ \cup \\
\text{Ét}'_{/X} &:= \{Y \to X \text{ étale}, \text{qcqs}\} = \{Y \to X \text{ étale, prés finie}\} \\
&\ \cup \\
\text{Et}'_{qc/X} &:= \{Y \to X \text{ étale}, \text{qcqs}, Y \text{ qc}\} \\
&\ \cup \\
\text{Et}'_{aff/X} &:= \{Y \to X \text{ étale}, Y \text{ affine}\}
\end{aligned}
\right]
$$

Idée : se ramener à la cohomologie de Čech.

<u>Preuve</u> L'objet $\overline{\varepsilon_\tau(U) \in \tilde{X}_\tau}$ est cohérent, et

$$\varepsilon_\tau(U) = a_\tau(h_U)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{X}_\tau \text{ algébrique} \\ \tilde{Y}_\tau \text{ algébriques}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{la prop. est vraie, par des résultats généraux de finitude dans les topos.}$$

Déf Soit S un site. Alors :

(a) $X \in S$ est qc si $\forall (X_i \to X)_{i \in I}$ famille couvrante, $\exists J \subseteq I$ fini t.q. $(X_j \to X)_{j \in J}$ est couvrante ;

(b) $(X \to Y) \in S$ est qc si $\forall Z \to Y$, où Z est qc $\Rightarrow X \times_Y Z$ est qc

(c) $(X \to Y) \in S$ est qs si $X \to X \times_Y X$ est qc

(d) $X \in S$ est qs si $\forall Y \to X \leftarrow Z$, où Y, Z sont qc, alors $Y \times_X Z$ est qc

(e) un morphisme ou un objet de S sont cohérent s'ils sont à la fois qc et qs.

Rmq. Si T est un topos $\Rightarrow T$ est un site avec la topologie canonique.

Déf Si T est un topos. Alors :

(a) T est <u>localement cohérent</u> s'il existe une sous-cat. pleine, génératrice $C \subseteq T$, dont les objets sont quasi-compactes, t.q. C est stable par produits fibrés.

(b) <u>algébrique</u> s'il existe $C \subseteq T$ pleine, gén., t.q. $\forall C \in C$, C cohérent, et le produit de deux objets qs de T est qs.

(c) <u>cohérent</u> si T est alg., et l'objet final de T est coh.

Lemme X schéma, $\tau \in \{ét, rét, bl\}$. Alors :

(a) les cat. $Ét_{/X}$, $Ét'_{/X}$, $Ét'_{qc/X}$, $Étaff_{/X}$ sont stables par produits fibrés ;

(b) le morphisme de sites $X_\tau \to (Étaff_{/X}, \tau)$ induite une équivalence entre les topos correspondants. En outre, le topos $\tilde{X}_\tau$ est algébrique, et $\forall U \in Étaff_{/X}$, l'objet $\varepsilon_\tau(U) \in \tilde{X}_\tau$ est cohérent.

(c) si X est qs, alors $X_\tau \to (Ét'_{/X}, \tau) \to (Ét'_{qc/X}, \tau)$ sont des équivalences. Et, le topos $\tilde{X}_\tau$ est qs, et $\forall U \in (Ét'_{qc})_{/X}$, l'objet $\varepsilon_\tau(U) \in \tilde{X}_\tau$ est cohérent.

(d) si X est qc qs, alors $\tilde{X}_\tau$ est cohérent.

Lemme S schéma, I cat. filtrante, $X : I^{op} \to Sch_{/S}$ t.q. $\forall i \to j \in Ar(I)$, le morphisme $X_j \to X_i$ soit affine. Alors, $X_\infty := \varprojlim_{i \in I^{op}} X_i$ existe dans $Sch_{/S}$, et les proj. $p_i : X_\infty \to X_i$ sont affine.

Preuve [EGA IV, VIII].

Thm $\tau \in \{ét, rét, bl\}$, S, I, $X : I^{op} \to Sch_{/S}$, $X_j \to X_i$ affines, $\forall i \in I$, X_i qcqs. Posons $f_i : X_i \to S$, $X_\infty := \varprojlim_{i \in I^{op}} X_i$, $f_\infty : X_\infty \to S$.

(a) $\forall F \in (\widetilde{X_\infty})_\tau$, le morphisme canonique :

$$\varinjlim_{i \in I} (p_{i,\tau}^*)(p_{i,\tau})_* F \to F$$

est un iso, et $\forall A \in Ab((X_\infty)_\tau)$, $\forall n \geq 1$,

$$\varinjlim_{i \in I} H^n_\tau(X_i, (p_{i,\tau})_* A) \to H^n_\tau(X_\infty, A)$$

(b) $\forall F \in \widetilde{S}_\tau$, l'application canonique :

$$\varinjlim_{i \in I} f_{i,\tau}^*(F)(X_i) \to f_{\infty,\tau}^*(F)(X_\infty)$$

est un iso, et $\forall A \in Ab(S_\tau)$, $\forall n \geq 1$, les applic. canoniques :

$$\varinjlim_{i \in I} H^n_\tau(X_i, f_{i,\tau}^* A) \to H^n_\tau(X_\infty, f_{\infty,\tau}^* A)$$

est un iso.

<u>Preuve</u> $\mathcal{G} := Ar(\acute{E}t')$ $\pi : \mathcal{G} \to Sch$ $(X \to Y) \mapsto Y$ est une fibration, et $\mathcal{G} \xrightarrow{\pi} Sch$ est un site fibré, i.e. $\forall X \in Sch$, $\mathcal{G}_X \simeq (\acute{E}t/X, \tau)$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{G} \arrow[d, "\pi"] \\ I^{op} \arrow[r, "X"'] & Sch_{/S} \arrow[r] & Sch \end{tikzcd}$$

, $\underleftarrow{\mathcal{G}_X} := \lim(\mathcal{G}_X \xrightarrow{\pi_X} I^{op})$ (inverser les morphismes cartésiens)

$\Rightarrow \underleftarrow{\mathcal{G}_X} \longrightarrow \mathcal{G}_{X_\infty}$ est une équiv. de cats. (cons. de [EGA 4, $\overline{\text{VIII}}$])

En fait, c'est une équivalence de sites, si on met sur $\underleftarrow{\mathcal{G}_X}$ la top. la plus gross. telle que le foncteur $\mathcal{G}_X \to \underleftarrow{\mathcal{G}_X}$ soit continu, où $\mathcal{G}_X$ a la topologie totale (i.e. la topologie la plus fine telle que $\forall i \in I$, $\mathcal{G}_{X_i} \hookrightarrow \mathcal{G}_X$ sont continues).

Pour montrer que $\underleftarrow{\mathcal{G}_X} \to \mathcal{G}_{X_\infty}$ est une éq. de sites pour $\tau \in \{$ét, fl$\}$, il faut montrer que: $\forall i \in I$, $f_i : V_i \to U_i \in \mathcal{G}_{X_i}$ t.q. $V_i \times_{X_i} X_\infty \to U_i \times_{X_i} X_\infty$ est τ-surj., alors $\exists (j \to i) \in I^{op}$ t.q. $V_i \times_{X_i} X_j \to U_i \times_{X_i} X_j$ est τ-surj.

Pour montrer cela, Scheiderer utilise le th. de const. de Chevalley. En particulier,

$V_i \times_{X_i} X_\infty \to U_i \times_{X_i} X_\infty$ est (rét) surj.

$\Rightarrow \big(u_i(U_i \setminus f_i(V_i)) \cap p_i(X_\infty)\big)_r = \emptyset$

Par Chevalley, $u_i(U_i \setminus f_i(V_i))$ est constructible

$\Rightarrow \exists\, \alpha : i \to j \in I$ t.q. $\big(u_i(U_i \setminus f_i(V_i)) \cap p_\alpha(X_j)\big)_r = \emptyset$.

$\Rightarrow$ l'assertion pour $\tau \in \{\text{rét}, \text{ét}\}$

$\Rightarrow \tau = b$ par recollement. $\square$

<u>Voisinage étales</u>

Déf X schéma, k corps $\alpha : \mathrm{Spec}(k) \to X$ point de X. Un <u>voisinage étale</u> de α est une factorisation

$$\begin{tikzcd} \alpha : \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] \arrow[dr] & X \\ & U \arrow[u, "\text{ét}"'] \end{tikzcd}$$

$Nb_{ét}(\alpha)$: cat. des voisinages étales de α

$\Rightarrow Nb_{ét}(\alpha)^{op}$ est filtrée, et les voisinages étales $U \to X$ t.q. U affine forment une cat. finale dans $Nb_{ét}(\alpha)^{op}$.

<u>Lemme</u> X, $\alpha : \mathrm{Spec}(k) \to X$, $\mathcal{O}^{ét}_{X,\alpha} := \varinjlim_{U \in Nb_{ét}(\alpha)^{op}} \mathcal{O}_U(U)$

$\Rightarrow \varprojlim_{U \in Nb_{ét}(\alpha)} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{ét}_{X,\alpha}) =: X^\alpha$

Rmq. k corps, $z := \mathrm{Spec}(k)$, $x := \alpha(z)$,

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{z} \arrow[d, "\bar\alpha"] \arrow[r, bend left, "h"] & X^\alpha \arrow[dl, "\alpha'"] \\
z \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\alpha"'] & X &
\end{tikzcd}$$

$$k(x) \subseteq k(\bar z) \subseteq \bar{k}(z)$$

Ex. $X = \mathrm{Spec}(L)$, $x : \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Spec}(L)$,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(k) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Spec}(L) \\
 & \mathrm{Spec}(M) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$L \underset{\bar z}{\subseteq} M \subseteq k$$

Prop. X schéma, k corps, $\alpha : \overbrace{\mathrm{Spec}(k)}^{z} \to X$, $F \in \tilde{X}_{\acute{e}t}$.

$$(\alpha^* F)(z) := \varinjlim_{U \in \mathrm{Nb}_{\acute{e}t}(\alpha)^{op}} F(U) \underset{\text{cons. de théorie}}{\xrightarrow{\sim}} ((\alpha')^* F)(X^\alpha) \overset{\sim}{\to} (\bar\alpha^* F)(\bar z) \overset{\sim}{\to} (\alpha^* F)(z)$$

SGA 4, VIII, 8.6

(+)

Si $A \in \mathrm{Ab}(X_{\acute{e}t})$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\varinjlim_{U \in \mathrm{Nb}_{\acute{e}t}(\alpha)^{op}} H^n_{\acute{e}t}(U, A|_U) \xrightarrow{\sim} H^n_{\acute{e}t}(X^\alpha, (\alpha')^* A) \xrightarrow{\sim} H^n_{\acute{e}t}(\bar z, \bar\alpha^* A) \to H^n_{\acute{e}t}(z, \alpha^* A)$$

iso si k est réel ou sep. clos.

$$(\bar{\alpha}^* F)(\bar{z}) \xrightarrow{\sim} (\alpha^* F)(z)$$

$$z \longrightarrow \bar{z} \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{\underset{\substack{\| \\ L}}{k(\bar{z})} \subseteq \underset{\substack{\| \\ M}}{k(z)}}_{\text{sép. clos.}}$$

Ex. $\mathbb{C} \subseteq \overline{\mathbb{C}(t)}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M^{sep} \arrow[d, dash] & \\ & L^{sep}M \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ L^{sep} \arrow[d, dash] & & M \arrow[dl, dash] \\ L & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gal}(M^{sep}/M) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(L^{sep}/L) \\ \mathrm{Gal}(L^{sep}M/M) \arrow[r, "\sim"'] & \mathrm{Gal}(L^{sep}/L^{sep}\cap M) \arrow[u, "\wr\, S"'] \end{tikzcd}$$

$$L^{sep} \cap M \supseteq L$$

Points des sites étale, réel-étale et conjoint

Déf $\mathcal{T}$ topos $\Rightarrow$ $pt(\mathcal{T}) = \{p = (p^*, p_*) : Set \to \mathcal{T}\}$.

Si $F \in \mathcal{T}$, la fibre de F au-dessus d'un point $p \in pt(\mathcal{T})$, est $F_p := p^*(F) \in Set$.

Déf X schéma. Un <u>point géométrique</u> de X est un morphisme de schémas $\alpha : \mathrm{Spec}(k) \to X$, où k est sép. clos. On note $pt_{géom}(X)$ l'ens. des points géom, ordonné par spécialisation.

<u>Thm</u> (Grothendieck, SGA4. $\underline{\text{VIII}}$, 7.9) $\forall$ schéma X,

$$\begin{aligned} pt_{géom}(X) &\longrightarrow pt(X_{ét}) \\ \alpha : z \to X &\longmapsto p_\alpha = (p_\alpha^*, (p_\alpha)_*) \end{aligned}$$

où $(p_\alpha^*)(F) := \alpha_{ét}^*(F)(z)$, $\forall F \in \tilde{X}_{ét}$.

Thm $\forall$ schéma X, on a une équivalence de cat.

$$(\underbrace{X_r}_{\text{espace réel associé à } X}, \underbrace{\mathcal{L}}_{\text{spec.}}) \longrightarrow pt(\tilde{X}_{ré t}), \text{ et :}$$

$\forall F \in \tilde{X}_{ét}$, $\forall \alpha : \overset{\text{réel clos}}{\mathrm{Spec}(k)} \to X$, on a

$$(pF)_{P_\alpha} = (\alpha^* F)(x_{ét}) \qquad p := i^* j_*.$$

$$X_{ét} \xhookrightarrow[j]{\circ} X_b \xhookleftarrow[i]{} X_{rét}$$

Prve $\tilde{X}_{rét} \simeq \tilde{X}_r$

Cor. $p : \tilde{X}_{ét} \to \tilde{X}_{rét}$ et $\hat{j}_* : \tilde{X}_{ét} \to \tilde{X}_b$ preservent les coproduites arbitraires, et leurs analogues $p : Ab(X_{ét}) \to Ab(X_{rét})$, $j_* : Ab(X_{ét}) \to Ab(X_b)$ preservent les $\bigoplus$ arbitraires.

Déf (a) $\alpha : \mathrm{Spec}(k) \to X$ est un point réel géom. si k est réel clos.

(b) $\alpha : \mathrm{Spec}(k) \to X$ réel géométrique, la <u>loc. réelle stricte</u> de X en α est le schéma $X^\alpha = \varprojlim_{U \in Nb_{ét}(\alpha)} U = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{ét}_{X,\alpha})$ où $\mathcal{O}^{ét}_{X,\alpha}$ est l'anneau réel local de X en α.

(c) $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\underbrace{\xi \in \mathrm{Sper}(A)}_{\text{cas } \alpha : \mathrm{Spec}(k) \to X} \Rightarrow A_\xi := \mathcal{O}^{ét}_{X,\alpha}$ henselisation réelle stricte de A en ξ.

Cor. A anneau, $\eta, \xi \in \operatorname{Sper}(A)$. Alors :

$$\operatorname{Hom}(A_\eta, A_\xi) = \begin{cases} *, & \eta \prec \xi \\ \emptyset, & \text{sinon} \end{cases}$$

Site conjoint

$$pt(\tilde{X}_{ét}) \to pt(\hat{\tilde{X}}_b) \leftarrow pt(\tilde{X}_{rét})$$

Thm X schéma, $P_\xi \in pt(\tilde{X}_b)$ réel, $P_\eta \in pt(\hat{X}_b)$ étale, représentés par deux points $\xi : x \to X$, $\eta : y \to X$, alors : $\operatorname{Hom}_{pt(\tilde{X}_b)}(P_\xi, P_\eta) = \emptyset$, et $\operatorname{Hom}_{pt(\tilde{X}_b)}(P_\eta, P_\xi) = \operatorname{Hom}_X(X^\eta, X^\xi) =$
$= \operatorname{Hom}_X(y, X^\xi)$.

[Propriétés des foncteurs de recollement]

Prop. $f : X \to Y$ morphisme de schémas, alors :

(1)
$$\begin{tikzcd} X_{ét} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_{ét}"'] & X_b \arrow[d, "f_b"] & X_{rét} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "f_{rét}"] \\ Y_{ét} \arrow[r, hook] & Y_b & Y_{rét} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

(3)
$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_b \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "f_*"'] & \tilde{X}_{ét} \arrow[d, "f_*"] \\ \tilde{Y}_b \arrow[r, "j^*"'] & \tilde{Y}_{ét} \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd} \tilde{Y}_{ét} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "f^*_{ét}"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & \tilde{Y}_{rét} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f^*"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & \tilde{Y}_b \arrow[d, "f^*"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & \tilde{Y}_{ét} \arrow[l, "j_*"'] \arrow[r, "j_!"] \arrow[d, "f^*"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & \tilde{Y}_b \arrow[d, "f^*"] \\ \tilde{X}_{ét} \arrow[r, "\rho"'] & \tilde{Y}_{rét} \arrow[r, "i_*"'] & \hat{X}_b & \tilde{X}_{ét} \arrow[l, "j_*"] \arrow[r, "j_!"] & \tilde{X}_b \end{tikzcd}$$

④ Si f est étale, alors
$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_b \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "f_{b,!}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \tilde{X}_{\acute{e}t} \arrow[d] \\ \tilde{Y}_b \arrow[r, "j^*"'] & \tilde{Y}_{\acute{e}t} \end{tikzcd}$$

Prop. $f : X \to Y$ fini, $f_{\tau,*} : Ab(X_\tau) \to Ab(Y_\tau)$ est exact.
$\tau \in \{\acute{e}t, r\acute{e}t, b\}$