Exposé V - Points et compatibilités aux limites du site réel-étale

Riccardo Pengo

4 février 2022

Résumé

Cet exposé a pour but de décrire les compatibilités aux limites (de faisceaux et des schémas) et aussi les points des sites réel-étale et conjoint, et énoncer les propriétés d'exactitude de certains foncteurs dérivés associés aux morphismes de recollement entre les sites étale, réel-étale et conjoint. La référence principale est [11, Part One, § 3].

V.1 Rappels autour des topos

Le but de cette section est de rappeler certaines terminologies et résultats généraux autour des topos, utilisées dans la suite.

V.1.1 Généralités

Cette sous-section est utilisée pour collecter certaines définitions générales autour des topos, pour lesquelles nous renvoyons le personnes intéressés à [8].

Définition V.1.1.1. Soit $\varphi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un morphisme de sites. Le foncteur *image directe* $\varphi_\bullet\colon \hat{\mathcal{C}} \to \hat{\mathcal{D}}$ est donné par $\varphi(F) := F \circ \varphi^{-1}$. En outre, le foncteur *image inverse* $\varphi^\bullet\colon \hat{\mathcal{D}} \to \hat{\mathcal{C}}$ est l'adjoint à gauche de $\varphi_\bullet$.

Remarque V.1.1.2. Rappelons que les adjoints à gauche peuvent être calculés comme extensions de Kan. En particulier, pour chaque pre-faisceau $F \in \hat{\mathcal{D}}$, le pre-faisceau $\varphi^\bullet(F) \in \hat{\mathcal{C}}$ est l'extension de Kan à gauche du foncteur $F\colon \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$ le long de $\varphi^{-1}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Explicitement, nous avons l'égalité suivante :

$$(\varphi^\bullet F)(C) := \varinjlim_{\varphi^{-1}(D) \to C} F(D) \tag{V.1.1.3}$$

pour chaque $F \in \hat{\mathcal{D}}$ et $C \in \mathcal{C}$.

Définition V.1.1.4. Soit $\mathcal{T}$ un topos. Un *point* de $\mathcal{T}$ est un morphisme de topos $p = (p^*, p_*)\colon \mathsf{Set} \to \mathcal{T}$. La catégorie des points de $\mathcal{T}$ est notée par $\mathsf{pt}(\mathcal{T})$. En outre, nous définissons la *fibre* d'un objet $F \in \mathcal{T}$ en un point $p \in \mathsf{pt}(\mathcal{T})$ comme $F_p := p^*(F)$. En conclusion, si $\mathcal{S}$ est un site, un *point* de $\mathcal{S}$ est un point du topos $\tilde{\mathcal{S}}$ associé.

Définition V.1.1.5. Soit $\mathcal{T}$ un topos. Alors, le *foncteur fibre* de $\mathcal{T}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \mathsf{pt}(\mathcal{T})^{\mathrm{op}} &\to \mathrm{Hom}(\mathcal{T}, \mathsf{Set}) \\ p &\mapsto p^* \end{aligned}$$

où $\mathsf{pt}(\mathcal{T})$ est la catégorie des points de $\mathcal{T}$ (voir la Définition V.1.1.4).

Définition V.1.1.6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Alors, la topologie canonique sur $\mathcal{C}$ est la topologie la plus fine telle que les foncteurs représentables soient des faisceaux.

Remarque V.1.1.7. Chaque topos $\mathcal{T}$ est considéré comme un site, en mettant sur $\mathcal{T}$ la topologie canonique.

V.1.2 Propriétés de finitude dans les topos

Cette sous-section contient les définitions des propriétés de finitude des objets d'un topos, comme données dans [9].

Définition V.1.2.1. Soit $\mathcal{S}$ un site. Alors :

(a) un objet $X \in \mathcal{S}$ est quasi-compact si pour chaque famille couvrante $\{X_i \to X\}_{i \in I}$, il existe un sous-ensemble $J \subseteq I$ fini tel que $\{X_j \to X\}_{j \in J}$ est une famille couvrante ;

(b) un morphisme $(X \to Y) \in \mathrm{Ar}(\mathcal{S})$ est quasi-compact si pour chaque morphisme $Z \to X$ où Z est quasi-compact, le produit fibré $Z \times_X Y$ est quasi-compact ;

(c) un morphisme $(X \to Y) \in \mathrm{Ar}(\mathcal{S})$ est quasi-séparé si le morphisme diagonal $X \to X \times_Y X$ est quasi-compact ;

(d) un objet $X \in \mathcal{S}$ est quasi-séparé si pour chaque diagramme $Y \to X \leftarrow Z$ où Y et Z sont quasi-compacts, le produit fibré $Y \times_X Z$ est quasi-compact ;

(e) un objet ou un morphisme de $\mathcal{S}$ sont dits cohérents s'ils sont à la fois quasi-compacts et quasi-séparés.

Définition V.1.2.2. Soit $\mathcal{D}$ une catégorie. Une sous-catégorie $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ est dite *génératrice* si la famille de foncteurs :

$$\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C, -) \colon \mathcal{D} \to \mathsf{Set}\}_{C \in \mathcal{C}}$$

est conservative.

Définition V.1.2.3. Soit $\mathcal{T}$ un topos. Alors $\mathcal{T}$ est dit :

(a) *localement cohérent* s'il existe une sous-catégorie pleine génératrice $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$, dont les objets sont quasi-compacts, qui est stable par produits fibrés ;

(b) *algébrique* s'il existe une sous-catégorie pleine génératrice $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$, dont les objets sont cohérents, et le produit de deux objets quasi-séparés de $\mathcal{T}$ est quasi-séparé ;

(c) *cohérent* si $\mathcal{T}$ est algébrique, et l'objet final de $\mathcal{T}$ est cohérent.

V.1.3 Cohomologie et limites de faisceaux dans un topos

Dans cette sous-section, nous rappelons deux résultats cruciaux à propos de la commutativité entre limites et cohomologie pour les objets d'un topos qui satisfont certaines propriétés de finitude, comme lesquelles rappelées dans la Section V.1.2.

Lemme V.1.3.1. *Soit $\mathcal{T}$ un topos, et $X \in \mathcal{T}$. Alors :*

(a) X est quasi-compact si et seulement si pour chaque catégorie filtrante I et chaque diagramme $Y \colon I \to \mathcal{T}$, l'application canonique :

$$\varinjlim_{i \in I} \mathrm{Hom}(X, Y_i) \to \mathrm{Hom}(X, \varinjlim_{i \in I} Y_i) \tag{V.1.3.2}$$

est injective ;

(b) si $\mathcal{T}$ admet une sous-catégorie génératrice dont les objets sont quasi-compacts, et $X \in \mathcal{T}$ est quasi-compact, alors pour chaque catégorie filtrante I et chaque diagramme $Y \colon I \to \mathcal{T}$, l'application (V.1.3.2) est bijective.

Démonstration. Voir [9, Théorème 1.23]. □

Lemme V.1.3.3. *Soit $f \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ un morphisme de topos, $X \in \mathcal{T}$ un objet et $n \in \mathbb{N}$ un entier. Alors :*

(a) le foncteur $H^n(\mathcal{T}, -)$ commute aux limites inductives filtrantes des faisceaux abéliens si $\mathcal{T}$ est cohérent ;

(b) le foncteur $H^n(X, -)$ commute aux limites inductives filtrantes des faisceaux abéliens soit si X est un objet algébrique et cohérent ou bien si $\mathcal{T}$ est algébrique et X est cohérent ;

(c) le foncteur $R^n f_*$ commute aux limites inductives filtrantes des faisceaux abéliens si $\mathcal{T}$ est algébrique, $\mathcal{T}'$ est localement cohérent et f est cohérent.

Démonstration. Voir [9, § 5]. □

V.1.4 Limites de topos fibrés

Cette section contient l'énoncé d'un résultat général concernant les limites de topos fibrés, dont la définition, rappelé dans la suite, est donnée dans [9, § 7].

Définition V.1.4.1. Soit $\pi \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Alors :

(a) un morphisme $f \colon C \to C'$ de $\mathcal{C}$ est dite π-cartésien si pour chaque morphisme $g \colon C'' \to C'$ tel que $\pi(g) = \pi(f)$, il existe un unique morphisme $h \colon C'' \to C$ tel que $g = fh$ et $\pi(h) = \mathrm{Id}_{\pi(C)}$;

(b) le foncteur π est une *pré-fibration* si pour chaque morphisme $f \colon D \to D'$ de $\mathcal{D}$ et tout objets $C' \in \mathcal{C}$ tels que $\pi(C') = D'$, il existe un morphisme π-cartésien $g \colon C \to C'$ de $\mathcal{C}$ tel que $\pi(g) = f$;

(c) le foncteur π est une *fibration* s'il est une pré-fibration et si la composition de deux morphismes π-cartésiens de $\mathcal{C}$ (composables) est toujours π-cartésien.

Pour chaque $D \in \mathcal{D}$, nous notons par $\mathcal{C}_D$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ dont les objets sont les $C \in \mathcal{C}$ tels que $\pi(C) = D$, et les morphismes sont les $f\colon C \to C'$ tels que $\pi(f) = \mathrm{Id}_D$.

Remarque V.1.4.2. Si $\pi\colon \mathcal{C} \to I$ est une fibration, pour chaque morphisme $f\colon i \to j$ dans I et chaque $Y \in \mathcal{C}_j$, le foncteur :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_i &\to \mathsf{Set} \\ X &\mapsto \{g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)\colon \pi(g) = f\} \end{aligned}$$

est représentable. En choisissant un objet représentant ce foncteur, nous obtenons un foncteur $f^*\colon \mathcal{C}_j \to \mathcal{C}_i$, qu'est unique à isomorphisme prés.

Définition V.1.4.3. Un *site fibré* est une fibration $\pi\colon \mathcal{S} \to I$ telle que pour chaque $i \in I$ la fibre $\mathcal{S}_i$ soit un site, et pour chaque morphisme $f\colon i \to j$ dans I, le morphisme $f^*\colon S_j \to S_i$ soit un morphisme de sites.

Définition V.1.4.4. Soit $\mathcal{S} \to I$ un site fibré. Alors, la *topologie totale* sur $\mathcal{S}$ est la topologie la plus grossière qui rende continues les inclusions des fibres $\mathcal{S}_i \to \mathcal{S}$, pour chaque $i \in I$.

Définition V.1.4.5. Soit $\mathcal{S} \to \mathcal{C}$ un site fibré. Alors, la limite de $\mathcal{S}$ est le site $\underrightarrow{\mathcal{S}}$ obtenu en inversant tous les morphismes cartésiens dans $\mathcal{S}$ (comme expliqué dans [9, § 6]).

Définition V.1.4.6. Un *topos fibré* est une fibration $\pi\colon \mathcal{T} \to I$ telle que pour chaque $i \in I$ la fibre $\mathcal{T}_i$ est un topos, et pour chaque morphisme $f\colon i \to j$ dans I, le foncteur $f^*\colon \mathcal{T}_j \to \mathcal{T}_i$ décrit dans Remarque V.1.4.2 est une partie d'un morphisme de topos $\tilde{f} = (f^*, f_*)\colon \mathcal{T}_i \to \mathcal{T}_j$.

Proposition V.1.4.7. *Soit* I *une catégorie filtrante, et* $\mathcal{T} \to I^{op}$ *un topos fibré. Notons par* $\underleftarrow{\mathcal{T}}$ *la limite projective de* $\mathcal{T}$ *au dessus de* I^{op}*, et pour chaque* $i \in I$ *notons par* $\mu_i\colon \underleftarrow{\mathcal{T}} \to \mathcal{T}_i$ *la projection canonique. En outre, notons par* $\widetilde{\mathcal{T}}$ *le topos total associé, et par* $Q\colon \underleftarrow{\mathcal{T}} \to \widetilde{\mathcal{T}}$ *le morphisme canonique. Alors :*

(a) pour chaque objet $M = (M_i)_{i\in I} \in \widetilde{\mathcal{T}}$*, on a l'identité* $Q^*(M) = \varinjlim_{i\in I} \mu_i^* M_i$ *;*

(b) si pour chaque morphisme $f\colon i \to j$ *dans* I*, le morphisme* $f_*\colon \mathcal{T}_i \to \mathcal{T}_j$ *commute aux limites inductives filtrantes, alors pour chaque* $i \in I$ *et pour chaque objet* $X \in \mathcal{T}_i$ *tel que le foncteur* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_i}(X, -)$ *commute aux limites inductives filtrantes, le foncteur* $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(\mu_i^* X, -)$ *commute aussi aux limites inductives filtrantes, et* $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(\mu_i^* X, \mu_i^* Y) = \varinjlim_{f \in I_{/i}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_{s(f)}}(f^* X, f^* Y)$ *pour chaque objet* $Y \in \mathcal{T}_i$*, où* $s(f) \in I$ *est la source du morphisme* $f\colon s(f) \to i$.

En outre, pour chaque morphisme de topos fibrés $m\colon (\mathcal{T} \to I^{op}) \to (\mathcal{S} \to I^{op})$*, pour chaque entier* $n \in \mathbb{N}$*, et pour chaque objet* $j \in I$ *les transformations naturelles :*

$$R^n \underleftarrow{m}_* \to \varinjlim_{i\in I} \mu_i^* R^n (m_i)_* (\mu_i)_* \quad \textit{et} \quad R^n \underleftarrow{m}_* \mu_j^* \to \varinjlim_{f \in I_{/j}} \mu_{s(f)}^* R^n (m_{s(f)})_* f^* \tag{V.1.4.8}$$

sont des isomorphismes entre foncteurs $\mathsf{Ab}(\widetilde{\mathcal{T}}) \to \mathsf{Ab}(\widetilde{\mathcal{S}})$ *et* $\mathsf{Ab}(\widetilde{\mathcal{T}}_j) \to \mathsf{Ab}(\widetilde{\mathcal{S}}_j)$.

Démonstration. Voir [9, Proposition 8.5.2] et [9, Corollaire 8.5.7] pour les premières assertions, et [9, Corollaire 8.7.4] et [9, Corollaire 8.7.5] pour les isomorphismes (V.1.4.8). □

V.2 Compatibilités aux limites des topos étale, réel-étale et conjoint, et applications

L'objectif de cette section est d'appliquer les résultats généraux de la Section V.1 pour montrer des compatibilités entre les limites de faisceaux et des schémas, et la cohomologie dans les sites associés aux topologies étale, réelle-étale et conjointe.

V.2.1 Limites dans topos étale, réel-étale et conjoint

Définition V.2.1.1. Soit X un schéma. Alors :

(a) notons par $\mathrm{Ét}'_{/X}$ la catégorie des morphismes de schémas $Y \to X$ qui sont quasi-compacts et quasi-séparés ;

(b) notons par $(\mathrm{Ét}'_{\mathrm{qc}})_{/X}$ la sous-catégorie des $(Y \to X) \in \mathrm{Ét}'_{/X}$ tels que Y est un schéma quasi-séparé ;

(c) enfin, notons par $(\mathrm{Ét}'_{\mathrm{aff}})_{/X}$ la sous-catégorie des $(Y \to X) \in \mathrm{Ét}'_{/X}$ tels que Y est un schéma affine.

Proposition V.2.1.2. *Soit* X *un schéma, et* $\tau \in \{ét, rét, b\}$*. Alors :*

(a) les catégories $\text{Ét}'_{/X}$, $(\text{Ét}'_{qc})_{/X}$ *et* $(\text{Ét}_{aff})_{/X}$ *sont stables par produits fibrés ;*

(b) le morphisme de sites $X_\tau \to ((\text{Ét}_{aff})_{/X}, \tau)$ *induite une équivalence entre les topos correspondants. En outre, le topos* $\tilde{X}_\tau$ *est algébrique, et pour chaque* $U \in (\text{Ét}_{aff})_{/X}$*, l'objet* $\epsilon_\tau(U) \in \tilde{X}_\tau$ *est cohérent ;*

(c) si X *est quasi-séparé, les morphismes de sites* $X_\tau \to (\text{Ét}'_{/X}, \tau) \to ((\text{Ét}'_\tau)_{/X}, \tau)$ *sont des équivalences. En outre, le topos* $\tilde{X}_\tau$ *est quasi-séparé, et pour chaque* $U \in (\text{Ét}'_{qc})_{/X}$*, l'objet* $\epsilon_\tau(U) \in \tilde{X}_\tau$ *est cohérent ;*

(d) si X *est quasi-compact et quasi-séparé, le topos* $\tilde{X}_\tau$ *est cohérent.*

Démonstration. La première assertion est classique (voir [1, Proposition 6.6.4] pour la première catégorie, [3, Proposition 1.2.2] pour la deuxième et [2, Proposition 1.6.2]) pour la troisième. Pour prouver la deuxième assertion, notons que chaque objet de X_τ peut être couvert par des objets du site $((\text{Ét}_{\text{aff}})_{/X}, \tau)$, et appliquons [12, Théorème 4.1]. Notons aussi que le spectre réel associé à un schéma quasi-compact est aussi quasi-compact, et que un recouvrement étale d'un schéma X induit un recouvrement ouvert du spectre réel X_r. Donc, pour chaque topologie $\tau \in \{\text{ét}, \text{rét}, \text{b}\}$, chaque τ-recouvrement d'un schéma quasi-compact X peut être raffiné à un sous-recouvrement fini, ce qui implique que $\tilde{X}_\tau$ est localement cohérent. En outre, si $U, V \in (\text{Ét}_{\text{aff}})_{/X}$ sont deux X-schémas étales et affines, le produit fibré $U \times_X V$ est quasi-séparé, ce qui implique que les topos $\tilde{X}_\tau$ sont algébriques. La démonstration du troisième point est identique, et la quatrième suit des points précédents, à l'aide de la Définition V.1.2.3. □

Proposition V.2.1.3. *Fixons une topologie* $\tau \in \{ét, rét, b\}$*. Soit* $f\colon X \to Y$ *un morphisme quasi-compact entre schémas quasi-séparés, et* $n \in \mathbb{N}$ *un entier. Alors :*

(a) pour chaque $(U \to X) \in (\text{Ét}'_{qc})_{/X}$*, les foncteurs* $\Gamma(U, -)\colon \tilde{X}_\tau \to \mathsf{Set}$ *et* $H^n_\tau(U, -)\colon \mathsf{Ab}(X_\tau) \to \mathsf{Ab}$ *commutent aux limites inductives filtrantes ;*

(b) les foncteurs $(f_\tau)_*\colon \tilde{X}_\tau \to \tilde{Y}_\tau$ *et* $R^n(f_\tau)_*\colon \mathsf{Ab}(X_\tau) \to \mathsf{Ab}(Y_\tau)$ *commutent aux limites inverses filtrantes.*

Démonstration. D'après Proposiiton V.2.1.2 nous savons que $\tilde{X}_\tau$ est algébrique, et l'objet $\epsilon_\tau(U) \in \tilde{X}_\tau$ est cohérent. Alors, nous pouvons conclure en appliquant Lemme V.1.3.1 et Lemme V.1.3.3. □

Lemme V.2.1.4. *Soit* S *un schéma,* I *une catégorie filtrante et* $X\colon I^{op} \to \mathsf{Sch}_{/S}$ *un diagramme tel que pour chaque morphisme* $i \to j \in \mathsf{Ar}(I)$*, le morphisme induit* $X_j \to X_i$ *est affine. Alors, la limite inverse* $X_\infty := \varprojlim_{i \in I^{op}} X_i$ *existe dans* $\mathsf{Sch}_{/S}$*, et les projections* $p_i\colon X_\infty \to X_i$ *sont affines.*

Démonstration. Voir [4, Proposition 8.2.3]. □

Théorème V.2.1.5. *Fixons une topologie* $\tau \in \{ét, rét, b\}$*. Soient* S *un schéma,* I *une catégorie filtrante et* $X\colon I^{op} \to \mathsf{Sch}_{/S}$ *un diagramme tel que pour chaque* $i \in I$*, le schéma* X_i *soit quasi-compact et quasi-séparé, et pour chaque* $\alpha\colon i \to j \in \mathsf{Ar}(I)$*, le morphisme induit* $p_\alpha\colon X_j \to X_i$ *soit affine. Posons* $f_i\colon X_i \to S$ *pour les morphismes structuraux,* $X_\infty := \varprojlim_{i \in I^{op}} X_i$ *pour la limite inverse du diagramme* X *(qui existe grâce au Lemme V.2.1.4), et* $f_\infty\colon X_\infty \to S$ *pour son morphisme structural. Alors :*

(a) pour chaque faisceau $F \in (\tilde{X}_\infty)_\tau$*, le morphisme canonique :*

$$\varinjlim_{i \in I} p^*_{i,\tau}(p_{i,\tau})_* F \to F$$

est un isomorphisme, et pour chaque faisceau $A \in \mathsf{Ab}(X_\tau)$ *et chaque entier* $n \in \mathbb{N}$*, l'homomorphisme canonique :*

$$\varinjlim_{i \in I} H^n((X_i)_\tau, (p_{i,\tau})_* A) \to H^n((X_\infty)_\tau, A)$$

est un isomorphisme.

(b) pour chaque faisceau $F \in \tilde{S}_\tau$*, l'application canonique :*

$$\varinjlim_{i \in I} f^*_{i,\tau}(F)(X_i) \to f^*_{\infty,\tau}(F)(X_\infty)$$

est bijective, et pour chaque faisceau $A \in \mathsf{Ab}(S_\tau)$ *et chaque entier* $n \in \mathbb{N}$*, l'homomorphisme canonique :*

$$\varinjlim_{i \in I} H^n((X_i)_\tau, f^*_{i,\tau}(A)) \to H^n((X_\infty)_\tau, f^*_{\infty,\tau}(A))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $\mathcal{G} := \mathrm{Ar}(\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t})$ la catégorie dont les objets sont les morphismes des schémas étales de présentation finie, et $\pi\colon \mathcal{G} \to \mathsf{Sch}$ le foncteur qui associe à chaque morphisme son but. Alors, π donne à $\mathcal{G}$ la structure de site fibré au dessus de la catégorie des schémas, dont les fibres sont données par $\mathcal{G}_Y := \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}_{/Y}$, pour chaque $Y \in \mathsf{Sch}$. Soit $\pi_X\colon \mathcal{G}_X \to I^{\mathrm{op}}$ la catégorie fibrée obtenue comme image inverse de π via le diagramme X, et soit $\underrightarrow{\mathcal{G}}_X$ la limite de π_X (voir la Définition V.1.4.5). Alors, les résultats de [4, § 8] impliquent que le foncteur canonique :

$$\underrightarrow{\mathcal{G}}_X \to \mathcal{G}_{X_\infty} \tag{V.2.1.6}$$

est une équivalence de catégories. En effet, cela est aussi une équivalence de sites, si nous donnons à $\underrightarrow{\mathcal{G}}_X$ la topologie la plus grossière telle que le foncteur canonique $\mathcal{G}_X \to \underrightarrow{\mathcal{G}}_X$ soit continu, où $\mathcal{G}_X$ a la topologie totale (voir la Définition V.1.4.4).

Pour montrer cette dernière assertion, il suffit de montrer que, pour chaque $i \in I$ et chaque morphisme $(f_i\colon V_i \to U_i) \in \mathcal{G}_{X_i}$ dont le changement de base $V_i \times_{X_i} X_\infty \to U_i \times_{X_i} X_\infty$ est un recouvrement pour τ, il existe un morphisme $j \to i$ dans I^{op} tel que le changement de base $V_i \times_{X_i} X_j \to U_i \times_{X_i} X_j$ est un recouvrement pour τ. Pour montrer cela, notons qu'un morphisme dans $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}'$ est un recouvrement pour ét si et seulement s'il est surjectif, et il est un recouvrement pour rét si et seulement si il est réel surjectif (voir [10, Définition 2.2.1]). En outre, si $u_i\colon U_i \to X_i$, et $p\colon Y \to X_i$ est un X_i-schéma quelconque, le changement de base $V_i \times_{X_i} Y \to U_i \times_{X_i} Y$ de f_i le long de p est surjectif si et seulement si $u_i(U_i \setminus f_i(V_i)) \cap p(Y) = \emptyset$, et il est réel surjectif si et seulement si la même condition est satisfaite pour les morphismes des espaces réels associés. Maintenant, notons que les morphismes u_i et f_i sont de présentation finie, et donc les ensembles $u_i(U_i \setminus f_i(V_i))$ sont constructibles, comme suit du théorème de Chevalley (voir [3, Théorème 1.8.4]). La même assertion est valide si on remplace $u_i(U_i \setminus f_i(V_i))$ par son analogue dans l'espace réel associé à X_i, car ce dernier est spectral. En outre, $\pi_i(X_\infty)$ est la réunion filtrante des $p_\alpha(X_j)$, qui sont pro-constructibles dans X_i. Donc, la condition $u_i(U_i \setminus f_i(V_i)) \cap \pi_i(X_\infty) = \emptyset$ implique qu'il existe un morphisme $\alpha\colon i \to j$ dans I tel que $u_i(U_i \setminus f_i(V_i)) \cap p_\alpha(X_j) = \emptyset$, et la même conclusion est valable pour les morphismes des espaces réels associées. Cela nous montre que le foncteur (V.2.1.6) est une équivalence de sites fibrés pour les topologies $\tau \in \{\acute{e}t, r\acute{e}t\}$, et donc trivialement pour la topologie $\tau = b$.

Finalement, nous pouvons conclure la démonstration du théorème, en appliquant Proposiiton V.1.4.7. □

V.2.2 Voisinages étales

Définition V.2.2.1. Soient X un schéma, K un corps, $z := \mathrm{Spec}(K)$ et $\alpha\colon z \to X$ un point de X. Alors, un *voisinage étale* de α est une factorisation $\alpha\colon z \to U \to X$, où le morphisme $U \to X$ est étale. La catégorie des voisinages étales de α est notée par $\mathsf{Nb}_{\acute{e}t}(\alpha)$.

Remarque V.2.2.2. Soient X un schéma, K un corps et $\alpha\colon \mathrm{Spec}(K) \to X$ un point. Alors, la catégorie $\mathsf{Nb}_{\acute{e}t}(\alpha)^{\mathrm{op}}$ est filtrée, parce que l'image inverse de morphismes étales est étale (voir [5, Proposition 17.3.3]). En outre, les voisinages étales affines de α forment une catégorie finale dans $\mathsf{Nb}_{\acute{e}t}(\alpha)^{\mathrm{op}}$.

Lemme V.2.2.3. *Soient X un schéma, K un corps et $\alpha\colon \mathrm{Spec}(K) \to X$ un point. Alors, la limite inverse $\varprojlim_{U \in \mathsf{Nb}_{\acute{e}t}(\alpha)} U$ existe dans $\mathsf{Sch}_{/X}$, et est un schéma affine, dont l'anneau des fonctions est $\varinjlim_{U \in \mathsf{Nb}_{\acute{e}t}(\alpha)^{op}} \mathcal{O}_U(U)$.*

Définition V.2.2.4. Soient X un schéma, K un corps et $\alpha\colon \mathrm{Spec}(K) \to X$ un point. Alors, la *localisation étale* de X en α est le schéma affine :

$$X^\alpha := \varprojlim_{U \in \mathsf{Nb}_{\acute{e}t}(\alpha)} U \cong \mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{\acute{e}t}_{X,\alpha})$$

où $\mathcal{O}^{\acute{e}t}_{X,\alpha} := \varinjlim_{U \in \mathsf{Nb}_{\acute{e}t}(\alpha)^{op}} \mathcal{O}_U(U)$. Nous noterons avec $\alpha'\colon X^\alpha \to X$ la projection canonique.

Remarque V.2.2.5. Soient X un schéma, K un corps et $\alpha\colon z := \mathrm{Spec}(K) \to X$ un point. Alors, l'anneau $\mathcal{O}^{\acute{e}t}_{X,\alpha}$ est local et hensélien. En outre, si $h\colon \overline{z} \hookrightarrow X^\alpha$ est l'inclusion de l'unique point fermé, nous avons une factorisation canonique :

$$\begin{tikzcd} & \overline{z} \arrow[dd, "\overline{\alpha}"] \arrow[dr, hook, "h"] & \\ z \arrow[ur, dashed] \arrow[dr, "\alpha"'] & & X^\alpha \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{V.2.2.6}$$

du morphisme α a travers le morphisme $\overline{\alpha} := \alpha' \circ h$.

Proposition V.2.2.7. *Soient X un schéma, K un corps et $\alpha\colon z := \mathrm{Spec}(K) \to X$ un point. Alors, pour chaque faisceau $F \in \tilde{X}_{ét}$, les applications naturelles :*

$$(\alpha^{\bullet}F)(z) = \varinjlim_{U \in \mathrm{Nb}_{ét}(\alpha)^{op}} F(U) \to (\alpha'^{*}F)(X^{\alpha}) \to (\overline{\alpha}^{*}F)(\overline{z}) \to (\alpha^{*}F)(z) \tag{V.2.2.8}$$

sont des bijections. En autre, pour chaque faisceau $A \in \mathrm{Ab}(X_{ét})$ et chaque entier $n \in \mathbb{N}$, les homomorphismes naturelles :

$$\varinjlim_{U \in \mathrm{Nb}_{ét}(\alpha)^{op}} H^{n}(U_{ét}, A|_{U}) \to H^{n}(X^{\alpha}_{ét}, \alpha'^{*}A) \to H^{n}(\overline{z}_{ét}, \overline{\alpha}^{*}A) \tag{V.2.2.9}$$

sont des isomorphismes, et si K est réel ou séparablement clos, alors l'homomorphisme naturel $H^{n}(\overline{z}_{ét}, \overline{\alpha}^{*}A) \to H^{n}(z_{ét}, \alpha^{*}A)$ est un isomorphisme.

Démonstration. La première égalité dans (V.2.2.8) suit immédiatement de (V.1.1.3). En outre, Théorème V.2.1.5 implique que les premières applications dans (V.2.2.8) et (V.2.2.9) sont bijectives. Pour les secondes égalités dans (V.2.2.8) et (V.2.2.9), il suffit de remarquer que chaque inclusion d'un point fermé dans un schéma local hensélien, comme par exemple $h\colon \overline{z} \hookrightarrow X^{\alpha}$, induit des isomorphismes entre les sections globales d'un faisceaux sur X^{α} et de sa image inverse sur $\overline{z}$, comme montré dans [6, Corollaire 8.6]. Enfin, notons que $z \to \overline{z}$ corresponde à une extension de corps $L \subsetneq K$ telle que L est séparablement clos dans K. En particulier, l'application de restriction entre les groupes de Galois absolus :

$$\mathrm{Gal}(K_s/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(L_s \cdot K/K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L_s/K \cap L_s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L_s/L)$$

est surjective, parce que $K \cap L_s = K$. Par conséquent, le dernier morphisme dans (V.2.2.8) est un isomorphisme. En outre, si K est réel ou séparablement clos, alors l'application $\mathrm{Gal}(K_s/K) \to \mathrm{Gal}(L_s/L)$ est un isomorphisme, et l'homomorphisme naturel $H^{n}(\overline{z}_{ét}, \overline{\alpha}^{*}A) \to H^{n}(z_{ét}, \alpha^{*}A)$ est aussi un isomorphisme. □

V.2.3 Foncteurs pro-représentables

Lemme V.2.3.1. *Soit X un schéma. Pour chaque $(Y \xrightarrow{f} X) \in \mathrm{Sch}_{/X}$, le foncteur :*

$$\begin{aligned} \gamma_Y\colon \tilde{X}_{ét} &\to \mathrm{Set} \\ F &\mapsto \Gamma(Y, f^{*}(F)) \end{aligned}$$

préserve les limites inverses finies, et donc pro-représentable.

Démonstration. La première assertion est une conséquence du fait que les foncteurs $f^{*}\colon \tilde{X}_{ét}$ et $\Gamma(Y, -)$ préservent les limites inverse finies, parce que dans la catégorie des ensembles les limites inverses finies commutent aux limites inductives filtrantes. La deuxième est une conséquence d'un théorème de représentabilité général (voir [7, Théorème 8.3.3]). □

Lemme V.2.3.2. *Soit X un schéma, et $Y, Z \in \mathrm{Sch}_{/X}$ deux X-schémas qui peuvent être obtenus comme limites de systèmes inverses filtrées des X-schémas étales quasi-compacts et quasi-séparés, dont les morphismes de transition sont affines. Alors, l'application $\mathrm{Hom}_X(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}(\tilde{X}_{ét})}(\gamma_Y, \gamma_Z)$, induite par le foncteur :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Sch}_{/X} &\to \mathrm{pro}(\tilde{X}_{ét}) \\ Y &\mapsto \gamma_Y \end{aligned}$$

est une bijection.

Démonstration. Soit I et J deux catégories filtrantes, et $Y'\colon I^{op} \to \mathrm{Ét}_{/X}$ et $Z'\colon J^{op} \to \mathrm{Ét}_{/X}$ deux diagrammes de X-schémas étales, quasi-compacts et quasi-séparés, dont les morphismes de transition sont affines, tels que $Y \cong \varprojlim_{i \in I^{op}} Y'_i$ et $Z \cong \varprojlim_{j \in J^{op}} Z'_j$. Alors, pour chaque $j \in J$, l'application canonique :

$$\varinjlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_X(Y'_i, Z'_j) \to \mathrm{Hom}_X(Y, Z'_j)$$

est un isomorphisme, grâce à [4, Théorème 8.8.2]. En outre, le Théorème V.2.1.5 implique que les applications canoniques $\gamma_Y \to \{h_{Y'_i}\}_{i \in I^{op}}$ et $\gamma_Y \to \{h_{Z'_j}\}_{j \in J^{op}}$ sont des isomorphismes dans $\mathrm{pro}(\tilde{X}_{ét})$. En conclusion, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_X(Y, Z) \arrow[rr] \arrow[d, "\wr"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}(\tilde{X}_{ét})}(\gamma_Y, \gamma_Z) \\ \varprojlim_{j \in J^{op}} \mathrm{Hom}_X(Y, Z_j) & \varprojlim_{j \in J^{op}} \varinjlim_{i \in I^{op}} \mathrm{Hom}_X(Y_i, Z_j) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}(\tilde{X}_{ét})}(\{h_{Y'_i}\}_{i \in I^{op}}, \{h_{Z'_j}\}_{j \in J^{op}}) \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

nous montre que l'application $\mathrm{Hom}_X(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}(\tilde{X}_{ét})}(\gamma_Y, \gamma_Z)$ est une bijection. □

Corollaire V.2.3.3. *Soient* X *un schéma,* K *et* L *deux corps, et* $\alpha\colon \mathrm{Spec}(K) \to X$ *et* $\beta\colon \mathrm{Spec}(L) \to X$ *deux points. Alors, les morphismes canoniques de* X*-schémas* $\alpha \to X^\alpha$ *et* $\beta \to X^\beta$ *induisent une bijection* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}(\tilde{X}_{ét})}(\gamma_\alpha, \gamma_\beta) \simeq \mathrm{Hom}_X(\alpha, X^\beta)$.

Démonstration. Les applications $\gamma_\alpha \to \gamma_{X^\alpha}$ et $\gamma_\beta \to \gamma_{X^\beta}$ induites par $\alpha \to X^\alpha$ et $\beta \to X^\beta$ sont des isomorphismes grâce au Théorème V.2.1.5. Par conséquent, nous avons une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}(\tilde{X}_{ét})}(\gamma_\alpha, \gamma_\beta) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}(\tilde{X}_{ét})}(\gamma_{X^\alpha}, \gamma_{X^\beta}) \simeq \mathrm{Hom}_X(X^\alpha, X^\beta)$$

où la dernière bijection est une conséquence du Lemme V.2.3.2, en remarquant que les schémas X^α et X^β sont des limites inverses filtrés des X-schémas étales affines. En conclusion, l'hensélianité du schéma X^α nous donne une bijection $\mathrm{Hom}_X(X^\alpha, X^\beta) \simeq \mathrm{Hom}_X(\alpha, X^\beta)$. □

V.3 Points des sites étale, réel-étale et conjoint

L'objectif de cette section est de donner une description des points des trois sites liés aux topologies étale, réelle-étale et conjointe. Rappelons que nous avons un diagramme de recollement :

$$\tilde{X}_{ét} \xhookrightarrow{j} \tilde{X}_b \xhookleftarrow{\iota} \tilde{X}_{rét} \tag{V.3.0.1}$$

qui nous sera très utile dans la suite.

V.3.1 Points du site étale

Pour commencer, regardons les points du site étale.

Définition V.3.1.1. Soit X un schéma. Un *point géométrique* de X est un morphisme de schémas $\alpha\colon z := \mathrm{Spec}(K) \to X$, où K est un corps séparablement clos. L'ensemble des points géométriques de X est noté par $\mathrm{pt}_{\text{géom}}(X)$, et est ordonné par la relation de spécialisation.

Théorème V.3.1.2. *Pour chaque schéma* X*, nous avons une équivalence de catégories :*

$$\begin{aligned} \mathrm{pt}_{géom}(X) &\to \mathrm{pt}(X_{ét}) \\ (\alpha\colon z \to X) &\mapsto p_\alpha = (p_\alpha^*, p_{\alpha,*}) \end{aligned}$$

où le foncteur $p_\alpha^*\colon \tilde{X}_{ét} \to \mathsf{Set}$ *est donné par* $p_\alpha^*(F) := (\alpha_{ét}^*(F))(z)$*, pour chaque* $F \in \tilde{X}_{ét}$*.*

Démonstration. Voir [6, Théorème 7.9]. □

Remarque V.3.1.3. Soit X un schéma. Il suit immédiatement du Théorème V.3.1.2 que les points du site étale d'un schéma ont des automorphismes non triviaux. Plus précisément, les automorphismes d'un point $p_\alpha \in \mathrm{pt}(X_{ét})$ correspondant à un point géométrique $\alpha\colon z \to X$ sont données par le groupe de Galois absolu du corps résiduel $\kappa(x)$ du point $x := \alpha(z)$.

V.3.2 Points du site réel-étale

Étudions maintenant les points du site réel-étale, en utilisant le résultat général suivant.

Lemme V.3.2.1. *Soit* T *un espace topologique sobre,* i.e. *tel que chaque sous-ensemble fermé, irréductible et non-vide de* T *contient un unique point générique. Alors, la catégorie des points* $\mathrm{pt}(\tilde{T})$ *est équivalente à la catégorie associée à l'ensemble partiellement ordonné* $(T, \prec)$*, où* $\prec$ *est induit par la spécialisation des points,* i.e. $x \prec y$ *si et seulement si* $x \in \overline{\{y\}}$*.*

Démonstration. Voir [8, § 7.1.6]. □

Théorème V.3.2.2. *Soit* X *un schéma. Alors, la catégorie des points* $\mathrm{pt}(\tilde{X}_{rét})$ *est équivalente à la catégorie induite par l'ensemble ordonné* $(X_r, \prec)$*. En outre, pour chaque point* $p \in \mathrm{pt}(\tilde{X}_{rét})$ *et chaque faisceau* $F \in \tilde{X}_{ét}$*, nous avons l'égalité suivante :*

$$(\rho F)_p = (\alpha^* F)(x_{ét})$$

où $x := \mathrm{Spec}(K)$ *est le spectre d'un corps réel clos* K*, et* $\alpha\colon x \to X$ *est le point correspondant à* p*.*

Démonstration. Pour la première partie de l'énoncé, il suffit de rappeler que nous avons une équivalence de topos $\tilde{X}_{\text{rét}} \simeq \tilde{X}_r$, où X_r est l'espace réel associé à X (voir [10, Théorème 2.3.11]). Cette équivalence est aussi compatible au fibres, *i.e.* pour chaque faisceau $F' \in \tilde{X}_{\text{rét}}$ nous avons l'égalité de fibres $F'_p = \alpha^*_{\text{rét}}(F')$. En outre, pour chaque pre-faisceau $P \in \hat{X}_{\text{ét}}$ nous avons les égalités suivantes :

$$(a_{\text{rét}}P)_p = (\alpha^*_{\text{rét}} \circ a_{\text{rét}})(P) = (\alpha^\bullet P)(x)$$

parce que dans le site $x_{\text{rét}}$ il y a seulement le crible trivial, ce qui implique que pour chaque pre-faisceau $Q \in \hat{x}_{\text{ét}}$ nous avons que l'application naturelle $Q(x) \to (a_{\text{rét}}Q)(x)$ est bijective. Ces égalités, appliqués à $P = F$, nous permettent de conclure, en utilisant la Proposiiton V.2.2.7 et le fait que $\rho F = a_{\text{rét}}F$. □

Corollaire V.3.2.3. *Soit X un schéma. Le foncteurs $\rho\colon \tilde{X}_{\acute{e}t} \to \tilde{X}_{r\acute{e}t}$ et $j_*\colon \tilde{X}_{\acute{e}t} \to \tilde{X}_b$ préservent les coproduits arbitraires, et les foncteurs analogue $\rho\colon \mathsf{Ab}(\tilde{X}_{\acute{e}t}) \to \mathsf{Ab}(\tilde{X}_{r\acute{e}t})$ et $j_*\colon \mathsf{Ab}(\tilde{X}_{\acute{e}t}) \to \mathsf{Ab}(\tilde{X}_b)$ préservent les somme directes arbitraires.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que pour chaque point $p \in \mathrm{pt}(\tilde{X}_{\text{rét}})$ et coproduit de faisceaux $\bigsqcup_{i\in I} F_i \in \tilde{X}_{\text{ét}}$, nous avons l'égalité $(\rho\,(\bigsqcup_{i\in I} F_i))_p = \bigsqcup_{i\in I}(\rho F_i)_p$. Ceci suit du Théorème V.3.2.2 et du fait que le foncteur :

$$(\alpha^*(-))(x_{\text{ét}})\colon \tilde{X}_{\text{ét}} \to \mathsf{Set}$$

préserve trivialement les coproduites, où $\alpha\colon x \to X$ est le point correspondant à p. □

Maintenant, nous pouvons utiliser la description des points du site réel-étale pour en déduire une propriété de rigidité des *hensélianisations réelles strictes* d'un anneau, qui sont définies dans la suite.

Définition V.3.2.4. Soit X un schéma. Alors :

(a) un *point réel géométrique* est un morphisme de schémas $\alpha\colon x := \mathrm{Spec}(K) \to X$, où K est un corps réel clos ;

(b) pour chaque point réel géométrique $\alpha\colon x \to X$, la *localisation réelle stricte* de X en α est le schéma X^α défini dans la Définition V.2.2.4, et l'*anneau réel local* de X en α est l'anneau $\mathcal{O}^{\text{ét}}_{X,\alpha}$ défini dans la Définition V.2.2.4 ;

(c) si A est un anneau, $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $\xi \in \mathrm{Sper}(A)$ est le point associé à α, l'*hensélianisation réelle stricte* de A en ξ est définie comme l'anneau $A_\xi := \mathcal{O}^{\text{ét}}_{X,\alpha}$.

Corollaire V.3.2.5. *Soit A un anneau. Fixons $\eta, \xi \in \mathrm{Sper}(A)$, et soient A_η, A_ξ les hensélianisations réelles strictes de A correspondantes. Alors, il existe au plus un morphisme d'anneau $A_\eta \to A_\xi$, et il y en a un si et seulement si $\eta \prec \xi$.*

Démonstration. Soit $X := \mathrm{Spec}(A)$, et considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pt}(\tilde{X}_{\text{rét}}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathrm{pro}(\text{Ét}_{/X}) \\
\mathrm{pro}(\tilde{X}_{\text{rét}}) \arrow[r, "\rho^*"'] & \mathrm{pro}(\tilde{X}_{\text{ét}}) \arrow[u, "h^*"']
\end{tikzcd}$$

où ρ^* est le pro-adjoint de ρ, $\psi(p) := p^*$ et h^* est le pro-adjoint de $h := \epsilon_{\text{ét}}\colon \text{Ét}_{/X} \to \tilde{X}_{\text{ét}}$. Car h est pleinement fidèle, le foncteur $h_* := \mathrm{pro}(h)$ est aussi pleinement fidèle, et adjoint à droite de h^*, ce qui implique que $h^* \circ h_* \simeq \mathrm{Id}$. En outre, le foncteur $\varphi := h^* \circ \rho^* \circ \psi$ est aussi pleinement fidèle (voir [8, Proposition 4.9.4]), et $\rho^* \circ \psi \simeq h_* \circ \varphi$, parce que l'image essentielle de $\rho^* \circ \psi$ est incluse dans l'image essentielle de h_*. Pour montrer cette dernière assertion, fixons un point $p \in \mathrm{pt}(\tilde{X}_{\text{rét}})$, représenté par un point réel géométrique $\alpha\colon \mathrm{Spec}(K) \to X$. Alors :

$$\rho^*(\psi(p)) = p^* \circ \rho \simeq \gamma_\alpha \simeq \gamma_{X^\alpha} \simeq h_*(\{U\colon U \in \mathrm{Nb}_\alpha(X)^{\mathrm{op}}\})$$

où la deuxième égalité suit du Théorème V.3.2.2, la troisième suit du Théorème V.2.1.5, et la quatrième de la Définition V.2.2.4.

Maintenant, soient $p_\eta, p_\xi \in \mathrm{pt}(\tilde{X}_{\text{rét}})$ les points correspondants à η et ξ, $x \to X$ et $y \to Y$ les points réels géométriques qui représentent η et ξ. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_A(A_\eta, A_\xi) &= \mathrm{Hom}_X(X^x, X^y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}(\tilde{X}_{\text{ét}})}(\gamma_{X^x}, \gamma_{X^y}) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}(\tilde{X}_{\text{ét}})}(\gamma_x, \gamma_y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{pt}(\tilde{X}_{\text{rét}})}(p_\eta, p_\xi) = \mathrm{Hom}_{(X_r,\prec)}(\eta, \xi)
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité suit du Lemme V.2.3.2, la troisième du Théorème V.2.1.5, la quatrième suit de l'identification $\rho^* \circ \psi \simeq h_* \circ \varphi$, et la cinquième suit du Théorème V.3.2.2. □

V.3.3 Points du site conjoint

Soit X un schéma. Le diagramme de recollement (V.3.0.1) nous donne deux foncteurs :

$$\mathrm{pt}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{pt}(X_b) \leftarrow \mathrm{pt}(X_{\text{rét}})$$

pleinement fidèles. En outre, les classes d'isomorphisme des points de X_b sont en bijection avec la réunion disjointe des classes d'isomorphisme des points de $X_{\text{ét}}$ et $X_{\text{rét}}$. En particulier, un point $\alpha \in \mathrm{pt}(X_b)$ est dit *étale* s'il est dans l'image essentielle de $\mathrm{pt}(X_{\text{ét}})$, et *réel* sinon.

Pour avoir une compréhension complète de la catégorie $\mathrm{pt}(X_b)$, nous analyserons les morphismes entre points réels et points étales dans le théorème suivant.

Théorème V.3.3.1. *Soit* X *un schéma. Fixons un point réel* $p_\xi \in \mathrm{pt}(\tilde{X}_b)$ *et un point étale* $p_\eta \in \tilde{X}_b$*, représentes par deux morphismes* $\xi\colon x \to X$ *et* $\eta\colon y \to X$*. Alors nous avons des bijections naturelles :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pt}(X_b)}(p_\eta, p_\xi) \simeq \mathrm{Hom}_X(X^\eta, X^\xi) \simeq \mathrm{Hom}_X(y, X^\xi) \tag{V.3.3.2}$$

et, d'autre part, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pt}(X_b)}(p_\xi, p_\eta) = \emptyset$*.*

Démonstration. Pour montrer la deuxième assertion, notons que si $F \in \tilde{X}_{\text{ét}}$ est un faisceau tel que $F_\eta \neq \emptyset$, alors nous n'avons aucun morphisme entre $(j_!F)_\eta = F_\eta$ et $(j_!F)_\xi = \emptyset$, parce que $j_!F \in \tilde{X}_b$ est l'extension par zéro de F le long de l'immersion ouverte $j\colon X_{\text{ét}} \hookrightarrow X_b$. Pour montrer (V.3.3.2), notons d'abord que les foncteurs :

$$\mathrm{pt}(\tilde{X}_b)^{\mathrm{op}} \hookrightarrow (\tilde{X}_b)^{\smile} \xrightarrow{\varphi := (-)\circ j_*} (\tilde{X}_{\text{ét}})^{\smile}$$

induisent une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pt}(X_b)}(p_\eta, p_\xi) \simeq \mathrm{Hom}_{(\tilde{X}_b)^{\smile}}(p_\xi^*, p_\eta^*) \simeq \mathrm{Hom}_{(\tilde{X}_{\text{ét}})^{\smile}}(p_\xi^* \circ \rho, p_\eta^*)$. Pour montrer cette assertion, soit $f\colon p_\xi^* \to p_\eta^*$ un morphisme dans $(\tilde{X}_b)^{\smile}$. Alors, f peut être reconstruit à partir de $\varphi(f)$ en utilisant le diagramme suivant (dans $(\tilde{X}_b)^{\smile}$) :

$$\begin{tikzcd}
p_\xi^* \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{adj}"'] & p_\eta^* \arrow[d, equal, "\mathrm{adj}"] \\
p_\xi^* \circ j_* \circ j^* \arrow[r, "\psi(\varphi(f))"] & p_\eta^* \circ j_* \circ j^*
\end{tikzcd}$$

où les morphismes verticales sont induites par l'unité de l'adjonction $j^* \dashv j_*$, et $\psi := (-)\circ j^*\colon (\tilde{X}_{\text{ét}})^{\smile} \to (\tilde{X}_b)^{\smile}$. En particulier, le fait que le morphisme d'adjonction entre p_η^* et $p_\eta^* \circ j_* \circ j^*$ soit l'identité suit simplement du fait que η est un point étale. Pour conclure, nous avons les bijections suivantes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pt}(X_b)}(p_\eta, p_\xi) \simeq \mathrm{Hom}_{(\tilde{X}_{\text{ét}})^{\smile}}(p_\xi^* \circ \rho, p_\eta^*) \simeq \mathrm{Hom}_{(\tilde{X}_{\text{ét}})^{\smile}}(\gamma_\eta, \gamma_\xi) \simeq \mathrm{Hom}_X(X^\eta, X^\xi) \simeq \mathrm{Hom}_X(y, X^\xi)$$

où la deuxième égalité suit du Théorème V.3.2.2, la troisième du Corollaire V.2.3.3, et la quatrième du fait que X^η soit hensélien. □

V.4 Propriétés des foncteurs de recollement

L'objectif de cette section est de décrire certaines propriétés des foncteurs d'image inverse et directe associés au diagramme de recollement (V.3.0.1).

V.4.1 Compatibilités au changement de schéma

Comme application des résultats précédents, nous pouvons démontrer des propriétés des foncteurs de recollement, qu'est partie d'un formalisme des six foncteurs.

Proposition V.4.1.1. *Soit* $f\colon X \to Y$ *un morphisme des schémas. Alors, le diagramme de sites :*

$$\begin{tikzcd}
X_{\acute{e}t} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f_{\acute{e}t}"] & X_b \arrow[d, "f_b"] & X_{r\acute{e}t} \arrow[l, hook', "\iota"'] \arrow[d, "f_{r\acute{e}t}"] \\
Y_{\acute{e}t} \arrow[r, hook, "j"'] & Y_b & Y_{r\acute{e}t} \arrow[l, hook', "\iota"]
\end{tikzcd} \tag{V.4.1.2}$$

est commutatif, et les diagrammes de topos :

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{Y}_{ét} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "f^*_{ét}"'] & \tilde{Y}_{rét} \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[d, "f^*_{rét}"'] & \tilde{Y}_b \arrow[d, "f^*_b"'] & \tilde{Y}_{ét} \arrow[l, "j_*"'] \arrow[r, "j_!"] \arrow[d, "f^*_{ét}"'] & \tilde{Y}_b \arrow[d, "f^*_b"'] \\
\tilde{X}_{ét} \arrow[r, "\rho"'] & \tilde{X}_{rét} \arrow[r, "\iota_*"'] & \tilde{X}_b & \tilde{X}_{ét} \arrow[l, "j_*"] \arrow[r, "j_!"'] & \tilde{X}_b
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
\tilde{X}_b \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "f_{b,*}"'] & \tilde{Y}_{ét} \arrow[d, "f_{ét,*}"] \\
\tilde{Y}_b \arrow[r, "j^*"'] & \tilde{X}_{ét}
\end{tikzcd}
\tag{V.4.1.3}
$$

sont commutatifs, où $\rho = \iota^* j_*$*. En outre, si* f *est étale, le diagramme de topos :*

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{X}_b \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "f_{b,!}"'] & \tilde{Y}_{ét} \arrow[d, "f_{ét,!}"] \\
\tilde{Y}_b \arrow[r, "j^*"'] & \tilde{X}_{ét}
\end{tikzcd}
\tag{V.4.1.4}
$$

est commutatif.

Démonstration. La commutativité du diagramme (V.4.1.2) est triviale, parce que les sites $X_b, X_{ét}, X_{rét}$ ont les mêmes catégories sous-jacentes, et les foncteurs $j^{-1} : X_b \to X_{ét}$ et $\iota^{-1} : X_b \to X_{rét}$ sont les identités sur les objets et morphismes.

Montrons maintenant la commutativité des diagrammes dans (V.4.1.3). D'abord, observons que :

$$(f^*_{rét}\rho F)_\eta = (\rho F)_{f\circ\eta} \simeq ((f\circ\eta)^*_{ét}F)(x) = (\eta^*_{ét}f^*_{ét}F)(x) = (\rho f^*_{ét}F)_\eta$$

pour chaque point réel $\eta : x \to X$, et chaque faisceau $F \in \tilde{X}_{ét}$, comme suit du Théorème V.3.2.2. Donc, $f^*_{rét}\rho = \rho f^*_{ét}$, et cela implique aussi facilement que $f^*_b j_* = j_* f^*_{ét}$, et par adjonction cette dernière égalité implique aussi, si f est étale, la commutativité du carré (V.4.1.4). En outre, nous avons les égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
\iota^*(f^*_b\iota_*) &= (f_b\circ\iota)^*\iota_* = (\iota\circ f_{rét})^*\iota_* = f^*_{rét}\iota^*\iota_* = f^*_{rét} = \iota^*\iota_* f^*_{rét} = \iota^*(\iota_* f^*_{rét})\\
j^*(f^*_b\iota_*) &= (f_b\circ j)^*\iota_* = (j\circ f_{ét})^*\iota_* = f^*_{ét}(j^*\iota_*) = f^*_{ét}\emptyset = \emptyset = (j^*\iota_*)f^*_{rét} = j^*(\iota_* f^*_{rét})\\
\iota^*(f^*_b j_!) &= (f_b\circ\iota)^* j_! = (\iota\circ f_{rét})^* j_! = f^*_{rét}(\iota^* j_!) = f^*_{rét}\emptyset = \emptyset = (\iota^* j_!)f^*_{ét} = \iota^*(j_! f^*_{ét})\\
j^*(f^*_b j_!) &= (f_b\circ j)^* j_! = (j\circ f_{ét})^* j_! = f^*_{ét} j^* j_! = j^* j_! f^*_{ét} = j^*(j_! f^*_{ét})
\end{aligned}
$$

qui impliquent les égalités $f^*_b\iota_* = \iota_* f^*_{rét}$ et $f^*_b j_! = j_! f^*_{ét}$, compte tenu du diagramme de recollement (V.3.0.1). Cette dernière égalité implique par adjonction la commutativité du deuxième diagramme dans (V.4.1.3). ☐

Remarque V.4.1.5. Si on replace toutes les topos ensemblistes dans Proposiiton V.4.1.1 avec leurs versions à valeurs dans les groupes abéliens, les mêmes règles de commutativité restent valides.

Remarque V.4.1.6. Nous avons des transformations naturelles canoniques :

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{X}_b \arrow[r, "\iota^*"] \arrow[d, "f_{b,*}"'] & \tilde{X}_{rét} \arrow[d, "f_{rét,*}"] & \tilde{X}_{ét} \arrow[l, "\rho"'] \arrow[r, "j_!"] \arrow[d, "f_{ét,*}"'] & \tilde{X}_b \arrow[d, "f_{b,*}"] \\
\tilde{Y}_b \arrow[r, "\iota^*"'] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow"] & \tilde{Y}_{rét} & \tilde{Y}_{ét} \arrow[l, "\rho"] \arrow[r, "j_!"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow"] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow"] & \tilde{Y}_b
\end{tikzcd}
$$

qui ne sont pas des isomorphismes en général.

Proposition V.4.1.7. *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme de schémas quasi-compact et quasi-séparé. Fixons une topologie* $\tau \in \{ét, rét, b\}$*, et un* τ*-point* $\alpha : z \to Y$*. Alors, pour chaque faisceau* $F \in \tilde{X}_\tau$*, nous avons une identification canonique :*

$$(f_{\tau,*}F)_\alpha \xrightarrow{\sim} \Gamma(Y^\alpha \times_Y X, pr_2^* F) \tag{V.4.1.8}$$

où X^α *est le voisinage étale de* α *dans* X *(voir Définition V.2.2.4), et* $pr_2 : Y^\alpha \times_Y X \to X$ *est la projection canonique. En outre, pour chaque faisceau abélien* $A \in \mathsf{Ab}(\tilde{X}_\tau)$ *et chaque entier* $n \in \mathbb{N}$*, nous avons une identification canonique :*

$$(R^n f_{\tau,*}A)_\alpha \xrightarrow{\sim} H^n_\tau(Y^\alpha \times_Y X, pr_2^* A) \tag{V.4.1.9}$$

où $R^n f_{\tau,*} : \mathsf{Ab}(\tilde{X}_\tau) \to \mathsf{Ab}(\tilde{Y}_\tau)$ *est le* n*-ième foncteur dérivé de* $f_{\tau,*} : \mathsf{Ab}(\tilde{X}_\tau) \to \mathsf{Ab}(\tilde{Y}_\tau)$*.*

Démonstration. Par définition, $f_{\tau,*}F \in \tilde{Y}_\tau$ est le faisceautisé, par rapport à la topologie τ, du pré-faisceau :

$$Y' \mapsto \Gamma(Y' \times_Y X, pr_2^*(F))$$

où $(Y' \to Y) \in \text{Ét}_{/Y}$. Ainsi, [6, Proposition 3.9] implique que $(f_{\tau,*}F)_\alpha = \varinjlim_{Y'} \Gamma(Y' \times_Y X, pr_2^*(F))$, où Y' varie parmi les schémas $(Y' \to Y) \in \text{Ét}_{/Y}$ ponctués par α. Ces identifications nous donnent (V.4.1.8), en utilisant le fait que les voisinages étales $U \in \mathsf{Nb}_{ét}(\alpha)$ forment une sous-catégorie cofinale de la catégorie des Y-schémas étales ponctués par α. L'isomorphisme (V.4.1.9) est montré de façon similaire, en utilisant le fait que $R^n f_{\tau,*} \in \mathsf{Ab}(Y_\tau)$ est le faisceautisé, par rapport à τ, du pré-faisceau $Y' \mapsto H^n(Y' \times_Y X, pr_2^* A)$. ☐

V.4.2 Propriétés d'exactitude

Pour démontrer les propriétés d'exactitude des foncteurs d'image directe, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme V.4.2.1. *Soit X un schéma strictement local ou strictement réel local, dont $h\colon \overline{x} \hookrightarrow X$ est l'inclusion du point fermé. Alors, pour chaque topologie $\tau \in \{ét, rét, b\}$ et chaque faisceau $F \in \tilde{X}_\tau$, l'application canonique :*

$$F(X) \to (h_\tau^* F)(\overline{x})$$

est une bijection. En outre, pour chaque faisceau abélien $A \in \mathrm{Ab}(X_\tau)$, nous avons l'annulation $H_\tau^n(X, A) = 0$ et tout degré $n > 0$, sauf si X est strictement réel local et $\tau = èt$.

Démonstration. La première assertion est une conséquence de la description des fibres au dessus des points dans toutes les topologies, donnée dans la Section V.3, sauf si $\kappa(\overline{x})$ est réel clos et $\tau =$ ét, ou bien $\kappa(\overline{x})$ est séparablement clos et $\tau =$ rét. Le premier cas est classique (voir [6, Corollaire 8.6]), et le deuxième suit du fait qu'un anneau strictement hensélien a spectre réel vide. En outre, l'annulation des cohomologies $H_\tau^n(X, A)$ suit du fait que le foncteur des sections globales $\mathrm{Ab}(\overline{x}_\tau) \to \mathrm{Ab}$ est exact, sauf si $\tau =$ ét et $\overline{x}$ est strictement réel local. □

Proposition V.4.2.2. *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme fini des schémas, et $\tau \in \{ét, rét, b\}$. Alors, le foncteur additif :*

$$f_{\tau,*}\colon \mathrm{Ab}(X_\tau) \to \mathrm{Ab}(Y_\tau)$$

est exact. En outre, pour chaque faisceau $F \in \tilde{X}_\tau$ et chaque τ-point $\alpha\colon z \to Y$, l'application canonique :

$$(f_{\tau,*}F)_\alpha \to \prod_{y \in (z \times_Y X)} F_y$$

est une bijection.

Démonstration. Observons d'abord que $Y^\alpha \times_Y X$ est fini au dessus de X^α, donc il est une réunion disjointe finie des schémas strictement locaux où strictement réel locaux, dont les points génériques sont donnés par $z \times_Y X$. Donc, l'isomorphisme (V.4.1.8) et le Lemme V.4.2.1 nous permettent de conclure. □

Pour conclure, nous parlerons des propriétés d'exactitude des foncteurs associés au changement de topologie.

Proposition V.4.2.3. *Soit X un schéma. Notons par $j\colon \mathrm{Ab}(X_{ét}) \hookrightarrow \mathrm{Ab}(X_b)$ et $\iota\colon \mathrm{Ab}(X_{rét}) \hookrightarrow \mathrm{Ab}(X_b)$ les morphismes de topos canoniques. Alors :*

(a) les foncteurs $j_!, j^*, \iota^*, \iota_*$ sont exacts, et les foncteurs $j_*, \rho := \iota^* j_*, \iota^!$ sont exacts à gauche ;

(b) pour chaque faisceau abélien $A \in \mathrm{Ab}(X_{ét})$ et chaque entier $n \geq 1$, nous avons l'identité $R^n j_* A = \iota_* R^n \rho A$;

(c) pour chaque faisceau abélien $A \in \mathrm{Ab}(X_{ét})$, chaque point réel géométrique $\xi\colon x \to X$ et chaque entier $n \geq 0$, nous avons les identités $(R^n j_* A)_\xi = (R^n \rho A)_\xi = H_{ét}^n(x, \xi_{ét}^* A)$, qui impliquent que les faisceaux $R^n j_* A$ et $R^n \rho A$ sont des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-modules ;

(d) si $\pi : X' := X[\sqrt{-1}] \to X$ est la projection canonique, les foncteurs :

$$j_* \pi_*\colon \mathrm{Ab}(X'_{ét}) \to \mathrm{Ab}(X_b) \quad et \quad \rho \pi_*\colon \mathrm{Ab}(X'_{ét}) \to \mathrm{Ab}(X_{rét})$$

sont exacts.

Démonstration. La première assertion est claire, parce que l'exactitude peut être vérifiée en regardant les fibres. Pour la deuxième, notons que $j^* R^n j_* A = 0$, parce que $j^* R j_* = R(j^* j_*) = \mathrm{Id}$. Donc $R^n j_* A = \iota_* \iota^* R^n j_* A = \iota_* R^n \rho A$. Pour la troisième assertion, notons que $R^n j_* A$ est le faisceautisé, pour la topologie conjointe, du pre-faisceau $U \mapsto H_{ét}^n(U; A)$ sur $\mathrm{Ét}_{/X}$. Donc, nous avons :

$$(R^n \rho A)_\xi = (\iota_* R^n \rho A)_\xi \cong (R^n j_* A)_\xi \cong \varinjlim_{U \in \mathrm{Nb}_{ét}(\alpha)^{op}} H_{ét}^n(U; A) \cong H_{ét}^n(x, \xi_{ét}^* A)$$

où la dernière égalité suit de la Proposiiton V.2.2.7. En particulier, toutes les fibres des faisceaux $R^n j_* A$ et $R^n \rho A$, et donc ces faisceaux eux mêmes, sont des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-modules, parce que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ est d'ordre deux. Pour la dernière assertion, soit $A \in \mathrm{Ab}(X'_{ét})$, et notons par $\xi'\colon x' \to X'$ le changement de base de ξ le long de π. Alors :

$$(R^n j_* \pi_* A)_\xi \cong H_{ét}^n(x, \xi_{ét}^* \pi_* A) = H_{ét}^n(x', (\xi'_{ét})^* A) = 0$$

pour chaque entier $n \geq 1$, parce que $x' = \mathrm{Spec}(K)$ avec K séparablement clos. □

Corollaire V.4.2.4. *Soit* X *un schéma, et* $\rho := \iota^* j_* \colon \tilde{X}_{ét} \to \tilde{X}_{rét}$ *le morphisme canonique. Alors, pour chaque* $A \in \mathsf{Ab}(X_{ét})$ *et chaque* $n \geq 1$*, le cup-produit :*

$$R^n\rho A \cong R^n\rho A \otimes R^2\rho\mathbb{Z} \to R^{n+2}\rho(A \otimes \mathbb{Z}) \cong R^{n+2}\rho A \tag{V.4.2.5}$$

est un isomorphisme. En outre, si $2A = 0$*, le cup-produit :*

$$R^n\rho A \cong R^n\rho A \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong R^n\rho A \otimes R^1\rho(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to R^{n+1}\rho(A \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong R^{n+1}\rho A \tag{V.4.2.6}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. D'après l'assertion (c) de la Proposiiton V.4.2.3, nous avons que $R^2\rho\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui implique que (V.4.2.5) est un isomorphisme, parce que $R^n\rho A$ et $R^{n+2}\rho A$ sont des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ modules. Notons aussi que $R^1\rho(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc (V.4.2.6) est aussi un isomorphisme si $2A = 0$ (le seul fait non trivial étant le dernier isomorphisme). □

Corollaire V.4.2.7. *Soit* $f \colon X \to Y$ *un morphisme de schémas. Alors, les diagrammes de foncteurs dérivés :*

$$\begin{tikzcd} D(\mathsf{Ab}(X_b)) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "Rf_{b,*}"] & D(\mathsf{Ab}(X_{ét})) \arrow[d, "Rf_{ét,*}"] \\ D(\mathsf{Ab}(Y_b)) \arrow[r, "j^*"'] & D(\mathsf{Ab}(Y_{ét})) \end{tikzcd} \quad \textit{et} \quad \begin{tikzcd} D(\mathsf{Ab}(Y_{rét})) \arrow[d, "f^*_{rét}"] & D(\mathsf{Ab}(Y_{ét})) \arrow[l, "R\rho"'] \arrow[r, "Rj_*"] \arrow[d, "f^*_{ét}"] & D(\mathsf{Ab}(Y_b)) \arrow[d, "f^*_b"] \\ D(\mathsf{Ab}(X_{rét})) & D(\mathsf{Ab}(X_{ét})) \arrow[l, "R\rho"] \arrow[r, "Rj_*"'] & D(\mathsf{Ab}(X_b)) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

Remerciements

Je remercie l'organisateur du groupe de travail, Frédéric Déglise, pour m'avoir donné l'opportunité de donner cet exposé, et pour son aide dans la préparation. Je remercie aussi Raphaël Ruimy pour beaucoup des discussions utiles et intéressantes.

Financement

Ces notes sont basés sur un exposé donné pour un groupe de travail au sein du projet "Motivic homotopy, quadratic invariants and diagonal classes" (ANR-21-CE40-0015) géré par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR). Ce travail a aussi été réalisé au sein du Labex MILYON (ANR-10-LABX-0070) de l'Université de Lyon, dans le cadre du programme "Investissements d'Avenir" (ANR-11-IDEX-0007) géré par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR).

Références

[1] A. Grothendieck. "EGA I - Le langage des schémas". In : *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* 4 (1960), p. 228 (cf. p. 4).

[2] A. Grothendieck. "EGA II - Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes". In : *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* 8 (1961), p. 222 (cf. p. 4).

[3] A. Grothendieck. "EGA IV - Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. (Première partie)". In : *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* 20 (1964), p. 259 (cf. p. 4, 5).

[4] A. Grothendieck. "EGA IV - Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Troisième partie)". In : *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* 28 (1966), p. 255 (cf. p. 4-6).

[5] A. Grothendieck. "EGA IV - Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Quatrième partie)". In : *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* 32 (1967), p. 361 (cf. p. 5).

[6] A. Grothendieck. "Exposé VIII - Foncteurs fibres, supports, etude cohomologique des morphismes finis". In : *SGA 4 - Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas*. Sous la dir. de J. L. Verdier, B. Saint-Donat, A. Grothendieck et J.-L. Verdier. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1972, p. 366-412 (cf. p. 6, 7, 10, 11).

[7] A. Grothendieck et J. L. Verdier. "Exposé I - Prefaisceaux". In : *SGA 4 - Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas*. Sous la dir. d'A. Grothendieck et J. L. Verdier. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1972, p. 1-217 (cf. p. 6).

[8] A. GROTHENDIECK et J. L. VERDIER. "Exposé IV - Topos". In : *SGA 4 - Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas*. Sous la dir. d'A. GROTHENDIECK et J. L. VERDIER. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1972, p. 299-518 (cf. p. 1, 7, 8).

[9] A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER. "Exposé VI - Conditions de finitude. Topos et sites fibres. Applications aux questions de passage a la limite". In : *SGA 4 - Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas*. Sous la dir. de J. L. VERDIER, B. SAINT-DONAT, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1972, p. 163-340 (cf. p. 1-3).

[10] S. LERBET. "Exposé III: Spectre réel et site réel étale; théorème de comparaison de Coste-Roy". Premier GdT HQ-DIAG. (2022) (cf. p. 5, 8).

[11] C. SCHEIDERER. *Real and Etale Cohomology*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1994 (cf. p. 1).

[12] J. L. VERDIER. "Exposé III - Fonctorialite des categories de faisceaux". In : *SGA 4 - Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas*. Sous la dir. d'A. GROTHENDIECK et J. L. VERDIER. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1972, p. 265-297 (cf. p. 4).