Spectre réel de X et site étale de X'

$$X' = X[\sqrt{-1}] = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]. \qquad G = \{1, \sigma\} = \mathbb{Z}/2$$

$$\pi : X' \longrightarrow X$$

<u>Prop</u>: $\boxed{\text{Le foncteur}}$ $\tilde{X}'_{ét} \xrightarrow{\pi_*} \tilde{X}_{ét} \xrightarrow{\rho} \tilde{X}_{rét}$

préserve
- toutes les colimites
- les limites finies.

<u>Lem</u>: $\xi : x \longrightarrow X$ pt géom réel de X.

F faisceau étale sur X'

$$(\rho \pi_* F)_\xi = F_{\xi'}$$

$$\begin{tikzcd} x' = x[\sqrt{-1}] \arrow[r] \arrow[d, "\xi'"'] & x \arrow[d, "\xi"] \\ X' \arrow[r, "\pi"] & X \end{tikzcd}$$

□

Ainsi $\rho\pi_*$ a un adjoint à droite et c'est le foncteur « image inverse » d'un morphisme de topos

$$\nu^* := \rho\pi_* : \tilde{X}'_{ét} \rightleftarrows \tilde{X}_{rét} : \nu_*$$

<u>Restriction de Weil</u>

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d] & \bullet \arrow[d, dashed] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

si
$$Sch/X \longrightarrow Set$$
$$U \longmapsto Hom_Y(U \times_X Y, V)$$
est représentable, par un X-schéma R

On appelle R restriction de Weil de V par rapport à f
$\mathrm{Res}_{Y/X}(V) := R$.

Prop : $f : Y \to X$ fini & loc^t libre
Alors $\forall V \to Y$ affine, $\mathrm{Res}_{Y/X}(V)$ existe et est affine.
De plus, si V est | de prés^o finie / étale / n.r. / lisse | alors $\mathrm{Res}_{Y/X}(V)$ aussi.

Si $\exists \mathrm{Res}_{Y/X}$, alors c'est un adjoint à droite de

$$\begin{aligned} Sch/X &\longrightarrow Sch/Y \\ U &\longmapsto U\times_X Y =: U_Y \end{aligned}$$

On a $f_* : \widehat{Sch/X} \to \widehat{Sch/Y}$
$(f_*P)(U) = P(U_Y)$

Si...., $f_* h_V = h_{\mathrm{Res}(V)}$

ν : On aimerait décrire ν c̄ morph. de sites
$X_{rét} \longrightarrow X'_{ét}$

$\underbrace{\text{Ét}_{aff/X'}}_{\substack{\text{"}\\ C'}} \subseteq \text{Ét}_{/X'}$ induit un iso de topos :
$\tilde{X}'_{et} \longrightarrow \tilde{C}'$.

. $\exists \mathrm{Res}_{X'/X} : \underset{ét}{\underbrace{\text{Ét}_{aff/X'}}} \xrightarrow{\phi} \text{Ét}_{/X,\, rét}$

Claim : $X_{rét} \longrightarrow C'$ donné par ϕ est un morph.
de sites, i.e. $*$ a) $\mathrm{Res}_{X'/X}$ préserve les limites finies
$*$ b) ―――――――― familles couvrantes

dém : a) On admet (pas dur)
b) V un X' schéma tel que $\exists \mathrm{Res}_{X'/X}(V)$
$x \to X$ pt géom réel.

. $\mathrm{Hom}_X(x, \mathrm{Res}_{X'/X}(V)) \cong \mathrm{Hom}_{X'}(x', V)$ $\quad \underbrace{x' = x\times_X X'}_{\text{alg clos}}$.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Res}_{X'/X}$ envoie les familles surjectives de flèches étales vers des familles surjectives de flèches rét.

Lemme : V étale$/X'$ tq $\exists \mathrm{Res}_{X'/X}(V)$ étale $/X$
(eg. $V \in \text{Ét}_{aff/X'}$). Alors
$\forall B \in \tilde{X}_{rét}$, $(\nu_* B)(V) = B(\mathrm{Rés}_{X'/X}(V))$.

dém : $R := \mathrm{Rés}_{X'/X}(V)$

$$\begin{aligned} (\nu_* B)(V) &= \mathrm{Hom}_{\tilde{X}'_{ét}}(h_V, \nu_* B) \\ &= \mathrm{Hom}_{\tilde{X}_{rét}}(\overset{\rho\pi_*}{\widehat{\nu^* h_V}}, B) \\ &\underset{\uparrow}{=} \mathrm{Hom}_{\widehat{\text{Ét}/X}}(\underbrace{\pi_* h_V}_{h_R}, B) = B(R) \qquad \square \end{aligned}$$

ρ est le foncteur « faisceau rét associé »

$*$ $V \to X'$ étale. On suppose qu'$\exists \overset{\overset{U}{\text{"}}}{\mathrm{Res}}(V)$ étale $/X$.
$\mathrm{Res} = \mathrm{Res}_{X'/X}$
Alors
$U_r \to X_r$ espace étalé $\Leftrightarrow$ correspond à un faisceau sur X_r
$\Leftrightarrow$ ―――――――――― $X_{rét}$

Ce faisceau n'est rien d'autre que $\nu^* h_V$.

$*$ $V \to X'$ étale arbitraire
$\rightsquigarrow$ $\nu^* h_V$ faisceau sur $X_{rét}$
$\rightsquigarrow$ espace étalé sur X_r
On verra dans la suite V_{cx} = « spectre complexe » de V
$V_{cx} \longrightarrow X_r$ espace étalé qui correspond à $\nu^* h_V$.

Morale : Il n'est pas essentiel que $\exists \mathrm{Res}(V)$,
$\nu^* h_V$ est le « spectre réel étale de $\mathrm{Res}(V)$ ».

$*$
$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_{rét} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "i"'] & \tilde{X}'_{ét} \arrow[d, "\pi"] \\ \tilde{X}_b & \tilde{X}_{ét} \arrow[l, "j"'] \end{tikzcd}$$

⚠ Ce diagramme ne commute pas dès que $X_r \neq \emptyset$.
$[\, i^*(j_! A) = \emptyset$
$\nu^*\pi^* j^*(j_! A) = \nu^*\pi^* A \,]$

MAIS : on a une transf^o naturelle.
$j\pi\nu \longrightarrow i$ de morph. de topos $\tilde{X}_{rét} \to \tilde{X}_b$.

$*$ Sur les pullbacks :
$i^* \xrightarrow{adj} i^*(j\pi)_*(j\pi)^* = \overbrace{\rho\pi_*\pi^*}^{\nu^*} j^* = (j\pi\nu)^*$ (1)

$*$ ―――― images directes :
$j_*\pi_*\nu_* \xrightarrow{ad} i_* \underbrace{i^* j_* \pi_*}_{\nu^*} \nu_* = i_*\nu^*\nu_* \xrightarrow{ad} i_*$ (2)

Claim : $\forall B \in \tilde{X}_{rét}$, $\nu^*\nu_* B \to B$ est surjectif.
$\Rightarrow$ (2) est surjective sur les faisceaux abéliens $\left[\begin{array}{l} F \to i_* i^* F \to 0 \\ \text{exacte} \\ i_* \text{ plt. fidèle} \end{array}\right]$

Ex : $\mathcal{N} = \rho\, \mathbb{G}_{a,X}$
$\mathcal{N}_c := \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \xrightarrow{\sim} \nu^* \mathbb{G}_{a,X'}$
En effet : (1) : $(i^* \to \nu^*\pi^* j^*) \circ j_*$
$\rightsquigarrow$ $\rho \longrightarrow \nu^*\pi^*$
$\rightsquigarrow$ $\mathcal{N} \longrightarrow \nu^* \mathbb{G}_{a,X'}$
$\sqrt{-1}$ section globale de $\nu^*\mathbb{G}_{a,X'}$ $\rightsquigarrow$ $\mathcal{N}_c \to \nu^*\mathbb{G}_{a,X'}$.
Sur les fibres : $(\mathcal{N}_c)_\xi = (\mathbb{G}_{a,X})_\xi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.
$(\nu^*\mathbb{G}_{a,X'})_\xi = (\mathbb{G}_{a,X'})_{\xi'}$ (vu).

De même : $\nu^* \mathbb{G}_{m,X'} = \mathcal{N}_c^*$.

$*$ $X = \mathrm{Spec}(k)$ k corps réel.
$\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ $\quad \Gamma' = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\}$.
$\cup\!|$
$T = \{\text{invol}^{os}$ non triviales$\}$

$\tilde{X}'_{ét} \cong \Gamma'$-ensembles (discrets).
$\tilde{X}_{rét} \cong \Gamma'$-faisceaux « continus » sur le Γ'-espace T.
sections
Γ profini

ν^* : Γ'-ens ――→ ‐ ‐ ‐ ‐ : ν_*
$N \longmapsto (T\times N \xrightarrow{pr_1} T)$ étalé
act^o diagonale
$H^0(T, B) \longleftarrow B$

On suppose $2 \in \mathbb{G}_X^*$. Alors ν_* « descend » sur $\tilde{X}_{ét}$ i.e.
$\exists \mu : \tilde{X}_{rét} \to \tilde{X}_{ét}$
TQ
$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_{rét} \arrow[r, "\nu_*"] \arrow[dr, "\mu"'] & \tilde{X}'_{ét} \\ & \tilde{X}_{ét} \arrow[u, "\pi^*"'] \end{tikzcd}$$

$C = \text{Ét}_{aff/X}$ + topologie étale $\quad \tilde{X}_{ét} \xrightarrow{\sim} \tilde{C}$

TQV : $\tilde{X}_{rét} \longrightarrow \tilde{X}_{ét}$ est induit par
$C \longrightarrow \text{Ét}/X$
$U \longrightarrow \mathrm{Res}(U_{X'})$
$\rightsquigarrow$ morphisme de sites $X_{rét} \to C$.

G agit sur $\pi_*\pi^* : \tilde{X}_{ét} \to \tilde{X}_{ét}$
En effet $A \in \tilde{X}_{ét}$, $U \in \text{Ét}/X$, $\quad \pi_*\pi^* A(U) = A(U_{X'}|_X)$ vu comme X-sch.
$U_{X'} = U\times_X X'$
$\circlearrowleft$
$1\times\sigma$

$\Rightarrow$ G agit sur $\nu^*\pi^* = \rho\pi_*\pi^*$
Par adj^o, G agit sur $\pi_*\nu_*$.
On définit $(\mu B)(U) := ((\pi_*\nu_* B)(U))^G = B(\mathrm{Res}\, U_{X'})^G$
$(B \in \tilde{X}_{rét})$
$U \in \text{Ét}_{aff/X}$

$\rightsquigarrow$ $\mu : \tilde{X}_{rét} \longrightarrow \tilde{X}_{ét}$

Claim : $\nu_* B \underset{\uparrow_{nat.}}{\simeq} \pi^*\mu B$.

Description explicite : D une $A[i]$-algèbre
[A anneau $A[i] = A\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.]

$\mathrm{res}_{A[i]/A} =: \mathrm{res}$
$\mathrm{res}(D)$ est engendrée par des générateurs u_d, v_d, $d \in D$ & rel^{os}

(1) $u_a = a$, $v_a = 0$ $\quad u_i = 0$, $v_i = 1$ $\quad \left\}\begin{array}{l}\forall a \in A\ \& \\ \forall d, d' \in D\end{array}\right.$
(2) $u_{d+d'} = u_d + u_{d'}$ $\quad v_{d+d'} = v_d + v_{d'}$
(3) $u_{dd'} = u_d u_{d'} - v_d v_{d'}$
$v_{dd'} = u_d v_{d'} + u_{d'} v_d$

$D \xrightarrow{\varepsilon} (\mathrm{res}\, D)\otimes_A A[i]$
$d \longmapsto u_d \otimes 1 + v_d \otimes i$
$\mathrm{res}(B\otimes_A A[i]) \longrightarrow B$ $\quad b, c \in B$ $\quad B$ une A-alg.
$u_{b+ci} \longmapsto b$
$v_{b+ci} \longmapsto c$

$\tilde{D} = D \otimes_{A[i],\, i\mapsto -i} A[i]$
$D\otimes_{A[i]} \tilde{D} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{res}\, D)\otimes_A A[i]$
$d\otimes 1 \longmapsto u_d\otimes 1 + v_d\otimes i$.
$1\otimes d \longmapsto u_d\otimes 1 - v_d\otimes i$.
$\frac{1}{2}(d\otimes 1 + 1\otimes d) \longleftarrow u_d\otimes 1$
$\frac{1}{2i}(d\otimes 1 - 1\otimes d) \longleftarrow v_d\otimes 1$

Déf : A anneau $A[i]$....
$D/A[i]$
$\mathrm{Spex}_A D = \mathrm{Sper}(\mathrm{res}_{A[i]/A} D)$

Lemme : X schéma
$V \to X'$ arbitraire (étale)
$\mathcal{V} = (V_\lambda)$ recouvr^t ouvert TQ $\exists \mathrm{Res}_{X'/X}(V_\lambda) =: U_\lambda$
(e.g. V_λ affine)
Alors les U_λ se recollent en un X-schéma U &
l'espace Top. $U_r \to X_r$ ne dépend pas de $\mathcal{V}$.

Déf : V un X'-sch. étale
U_r donné par le lemme s'appelle spectre complexe de V
sur X noté $V_{cx/X}$ ou V_{cx}.

$\rightsquigarrow$ $Sch/X' \longrightarrow Top/X_r$ $\quad$ envoie les familles ét-surj. vers des familles surj. d'espaces étalés.
$V \longmapsto V_{cx}$

Rappels : X schéma
$X' = X[\sqrt{-1}]$. $\quad \pi : X' \to X$
Alors, $\nu^* = \rho\pi_* : \tilde{X}'_{ét} \longrightarrow \tilde{X}_{rét}$ admet un adjoint à droite ν_*.

Restriction de Weil :

$*$ $\begin{array}{c} V \\ \downarrow \\ Y \xrightarrow{f} X \end{array}$ $\quad \exists ?\ \begin{array}{c} R \\ \downarrow \\ X \end{array}$ t.q. $\mathrm{Hom}_Y(U\times_X Y, V) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nat. en } U}}{\cong} \mathrm{Hom}_X(U, R)$

[si $\exists R$, c'est $\mathrm{Res}_{Y/X}(V)$].

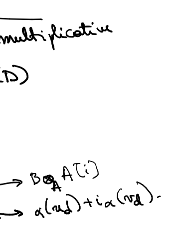
Réponse : oui si $(f \overset{e.g.}{=} \pi) : X' \to X$ et V affine.

ex : $D = A[i][\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\underline{x}}] / (\underset{\substack{\cap \\ A[i][\underline{x}]}}{f_1, \ldots, f_n})$.

$\mathrm{res}(D) = A[U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n] \Big/ \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(f_k(\underline{U} + i\underline{V})), \\ \mathrm{Im}(f_k(\underline{U} + i\underline{V})) \end{pmatrix}_{k=1\ldots n}$

ex : $A = \mathbb{R}$
$D = \mathbb{C}[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$

$\mathrm{res}(D) = \mathbb{R}[U,V,W,T] \big/ (U^2 - V^2 + W^2 - T^2 - 1,\ 2(UV + WT))$

ex : $E/\mathbb{R}$ courbe (e.g.) $\rightsquigarrow$ $E_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}$ 
$E' \longrightarrow E_{\mathbb{C}}$ un revêtement à n feuillets (étale)
$\mathrm{Res}_{E_{\mathbb{C}}/E}(E')$ ⇜ espace étalé sur E_r à n feuillets.

Lemme : (rappel) $V \in \text{Ét}_{aff/X'}$.
Alors $\forall B \in \tilde{X}_{rét}$, $(\nu_* B)(V) = B(\mathrm{Res}_{X'/X}(V))$.

$V/_{X'}$ étale $\quad \nu^* h_V$ faisceau sur $X_{rét}$
X_r $\rightsquigarrow$ espace étalé $V_{cx} \to X_r$

loc^t : $V_{cx} = (\mathrm{Res}(V))_r$.

Déf : A anneau
D une $A[i]$-alg. $\quad \mathrm{spex}_A(D) = \mathrm{sper}(\mathrm{res}_{A[i]/A}(D))$

Lemme : « ça se recolle » en $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendant des recouvr}^t \text{ de } V \text{ choisi.}}}{U_r} \to X_r$

Localisation : D une $A[i]$-alg. $\Sigma \subseteq D$ multiplicative
$S = \{u_d^2 + v_d^2 \mid d \in \Sigma\} \subseteq \mathrm{res}(D)$
Alors $\mathrm{res}(\Sigma^{-1} D) = S^{-1}\mathrm{res}(D)$.
preuve : B une A-algèbre
$\alpha : \mathrm{res}(D) \to B \leftrightsquigarrow \beta : D \to B\otimes_A A[i]$
$d \mapsto \alpha(u_d) + i\alpha(v_d)$.

$N : D \longrightarrow \mathrm{res}(D)$ $\quad$ multiplicative
$d \longmapsto u_d^2 + v_d^2$
$\beta(d) \in (B\otimes_A A[i])^\times \Leftrightarrow \alpha(N(d)) \in B^\times$ $\qquad \square$

Description de spex

$*$ D une $A[i]$-alg.
$\Sigma = \{(\mathfrak{q}, t) \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(D),\ t$ invol^o non-triviale $k(\mathfrak{q})/A\}/\sim$

$(\mathfrak{q}, t) \sim (\mathfrak{q}', t')$
$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \\ \exists \varphi \in \mathrm{Aut}_D(\overline{k(\mathfrak{q})}) \text{ t.q. } t\varphi = \varphi t'. \end{array}\right.$

Notation : $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(D)$ $\quad D \longrightarrow k(\mathfrak{q})$
$d \longmapsto d_{\mathfrak{q}}$.

$\Sigma \cong \mathrm{Spex}_A(D)$ $\qquad \overline{k(\mathfrak{q})}^{\,t}$ réel clos $\swarrow$ 2 inversible dans $\overline{k(\mathfrak{q})}^{\,t}$.
$(\mathfrak{q}, t) \overset{\sim}{\longmapsto} \left[\begin{array}{l} \mathrm{res}(D) \longrightarrow \overline{k(\mathfrak{q})}^{\,t} \\ u_d \longmapsto \frac{1}{2}(d_{\mathfrak{q}} + t(d_{\mathfrak{q}})) \\ v_d \longmapsto \frac{1}{2i}(d_{\mathfrak{q}} - t(d_{\mathfrak{q}})). \end{array}\right.$

$*$ support complexe :
$\mathrm{Spex}_A(D) \longrightarrow \mathrm{spec}(D)$
$[\mathfrak{q}, t] \longrightarrow \mathfrak{q}$

Fibres de $\nu_* B$:

$*$ X schéma
$B/X_{rét}$
$\eta : y \to X'$ pt. géométrique
$\mathcal{V}(\eta)$ = cat. des voisinages étales affines de η.

$$\begin{aligned} (\nu_* B)_\eta &= \operatorname*{colim}_{W\in\mathcal{V}(\eta)} (\nu_* B)(W) \\ &= \operatorname*{colim}_{W\in\mathcal{V}(\eta)} B(\mathrm{Res}\, W) \\ &= \text{"}B\text{"}(\lim_{W\in\mathcal{V}(\eta)} \mathrm{Res}\, W) \\ &\underset{\uparrow}{=} B(\mathrm{Res}((X')^\eta)). \end{aligned} \qquad (X')^\eta = \lim_{W\in\mathcal{V}(\eta)} W.$$

« les restrictions de Weil commutent aux limites de ce genre »

. $x' = \eta(y) \in X'$ $\qquad x = \pi(x')$.
. $X_{(x)} = \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{X,x})$
$X'_{(x)} = X_{(x)}\times_X X' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}[\sqrt{-1}])$.

Alors $\mathrm{Res}_{X'/X}((X')^\eta) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(Scheiderer 4.6.1)}}}{=} \mathrm{Res}_{X'_{(x)}/X_{(x)}}((X')^\eta)$ $\Big|_X$ $\left[\begin{array}{l}\text{vu comme } X\text{-schéma} \\ \text{au moyen de } X_{(x)} \to X\end{array}\right]$

En d'autres termes
$(\nu_* B)_{\overline{x'}}$ = sections du pull-back de B à $\mathrm{spex}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}^{sh}_{X',\overline{x'}})$.

Théorème : $2 \in \mathcal{O}_X^*$.
Alors, $\nu_* : Ab(X_{rét}) \longrightarrow Ab(X'_{ét})$ est exact.
dém : A local $\quad A' = A[i]$
$\mathfrak{m}$ idéal max. de A' (il y en au + deux).
$\tilde{A} = (A'_{\mathfrak{m}})^{s.h.}$
Il suffit de voir que $\quad H^i(\mathrm{spex}_A(\tilde{A}), B) = 0 \quad \forall i > 0$.
$\forall B \in (\mathrm{spex}\tilde{A})_{rét}$.
$\tilde{A} = \mathrm{colim}\, A_j$
algèbre essentiell^t étale sur $A[i]_{\mathfrak{m}}$.
$\rightsquigarrow$ on peut remplacer $\tilde{A}$ par une $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{loc}^o \text{ d'une } A'\text{-algèbre finie / un idéal maximal.}}}{\text{alg. ess}^t\text{ ét.}}/A'_{\mathfrak{m}}$.

Il suffit de montrer le lemme :
Lemme : A anneau tq $2 \in A^\times$
D une $A[i]$-alg. finie
E une semi-local^o de D.
Alors $\quad H^m(\mathrm{spex}_A(E), B) = 0 \quad \forall B, \forall m > 0$.

Prop : A ――――――
D ――――――
E ――――――
Alors, $\quad \exists \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\} \subseteq \mathrm{Spec}(\mathrm{res}\, D)$
t.q. $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{res}\, D)$ t.q. $\sqrt{-1} \notin k(\mathfrak{p})$,
$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{res}(E)) \Leftrightarrow \exists i, \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_i$.

Prop $\Rightarrow$ lemme : On se donne $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ ....
Alors $\mathrm{sper}(\mathrm{res}\, E) = \mathrm{sper}(\mathrm{res}(D))_{\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}}$

« Il est bien connu que » si C semi-local
$H^m(\mathrm{sper}(C), B) = 0 \quad \forall B, \forall m > 0$.
[Scheiderer 19.2.1] + On peut rétracter $\mathrm{sper}(C)$ sur son ensemble de pts fermés.

dém : (Prop) $\quad X = \mathrm{Spec}(A) \quad X'$...
$V = \mathrm{Spec}(D)$
[Alors $\mathrm{Res}(V) \to X$ est fini] $\Leftarrow$ est vrai, mais on a besoin seulement de
$(\mathrm{Res}(V))_{X'} \longrightarrow X'$ est fini [car $2 \in \mathcal{O}^*_{X'}$ donc $X' \to X$ est fini étale]
$\|$
$\mathrm{Spec}(\mathrm{res}(D)\otimes_A A[i])$ $\qquad \tilde{D} = D\otimes_{A[i],\, i\mapsto -i} A[i]$
$\overset{\|\!\wr}{\text{si } 2 \in A^\times}$ $D\otimes_{A[i]}\tilde{D}$

$D\otimes_{A[i]}\tilde{D} \longrightarrow \mathrm{res}(D)\otimes_A A[i]$
$d\otimes 1 \longmapsto u_d\otimes 1 + v_d\otimes i$
$1\otimes d \longmapsto u_d\otimes 1 - v_d\otimes i$
$\frac{1}{2}(d\otimes 1 + 1\otimes d) \longleftarrow u_d\otimes 1$
$\frac{1}{2i}(d\otimes 1 - 1\otimes d) \longleftarrow v_d\otimes 1$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Res}(V)_{X'} \arrow[r, "fini"] \arrow[dr, "\lambda"'] & X' \\ & V \arrow[u, "fini"'] \end{tikzcd}$$
$\Rightarrow$ λ est fini.

Soit $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s \in V$ tels que $E = D_{\{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s\}}$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Res}(V)_{X'} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "p"] & V \arrow[r] & X' \arrow[d] \\ \mathrm{Res}(V) \arrow[rr] & & X \end{tikzcd}$$
$U = \mathrm{Spec}(E) \subseteq V$
$\{\tilde{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{p}}_r\} := \lambda^{-1}(\{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s\}) \subseteq \mathrm{Res}(V)_{X'}$.
$\mathfrak{p}_i := p(\tilde{\mathfrak{p}}_i)$

Claim : $\mathrm{Res}(U) = \mathrm{Spec}(\mathrm{res}\, E)$
$= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Res}(V) \mid \lambda(p^{-1}(\mathfrak{p})) \subseteq U\} =: R(U)$ (1)
dém : $T = \lambda^{-1}(V\setminus U) = \lambda^{-1}(V\setminus(\underbrace{\cap U_i}_{\text{ouvert}})) = \cup \underbrace{\lambda^{-1}(V\setminus U_i)}_{\text{fermé } = T_i}$
p fermé $\Rightarrow$ $p(T_i)$ est fermé.
$R(U) = \mathrm{Res}(V)\setminus p(T) = \cap \underbrace{\mathrm{Res}(V)\setminus p(T_i)}_{\mathrm{Res}(U_i)^{(*)}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prés des res.}}}{=} \mathrm{Res}(U)$.

La preuve de $(*)$ se trouve ci-dessous.
Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Res}(V)$ t.q. $\sqrt{-1} \notin k(\mathfrak{p})$
$\tilde{\mathfrak{p}} \in (\mathrm{Res}(V))_{X'}$ l'unique pt au-dessus de $\mathfrak{p}$.
Il suffit de montrer que
$\exists i, \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_i \Leftrightarrow \exists j, \lambda(\tilde{\mathfrak{p}}) \subseteq \mathfrak{q}_j$. (2)
$\boxed{\Leftarrow}$ λ fini $\rightsquigarrow$ going-up $\rightsquigarrow$ $\exists i, \tilde{\mathfrak{p}} \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}_i$
$\Rightarrow \mathfrak{p} = p(\tilde{\mathfrak{p}}) \subseteq p(\tilde{\mathfrak{p}}_i) = \mathfrak{p}_i$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_i = p(\tilde{\mathfrak{p}}_i)$ $\quad p$ flat $\rightsquigarrow$ going down
$\exists \tilde{\mathfrak{q}} \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}_i$ tel que $p(\tilde{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{p}$
$p^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\tilde{\mathfrak{p}}\}$ $\Rightarrow \tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{q}}$
$\Rightarrow \lambda(\tilde{\mathfrak{p}}) \subseteq \lambda(\tilde{\mathfrak{p}}_i) = \mathfrak{q}_j$.

D'où le résultat grâce à (1) + (2).

Preuve de $(*)$: Il s'agit en fait de montrer :
Lemme : Soit $V/_{X'}$ tel qu'$\exists \mathrm{Res}(V)$.
Soit $U \hookrightarrow V$. $\quad$ Soit $T = \lambda^{-1}(V\setminus U)$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Res}(V)_{X'} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "p"] & V \arrow[r] & X' \arrow[d] \\ \mathrm{Res}(V) \arrow[rr] & & X \end{tikzcd}$$
($\mathfrak{p} \in V$)

Alors, $\mathrm{Res}(U) = \mathrm{Res}(V)\setminus p(T)$.
dém : Soit W/X.
Alors $\mathrm{Hom}_X(W, \mathrm{Res}(V)\setminus p(T)) = \{f \in \mathrm{Hom}(W, \mathrm{Res}(V)) \mid f(W)\cap p(T) = \emptyset\}$

Par déf. de la restriction de Weil :
$\mathrm{Hom}(W, \mathrm{Res}(V)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W\times_X X', V)$
$f \longmapsto \lambda\circ f_{X'}$
est bijective. Mais $f(W)\cap p(T) = \emptyset \Leftrightarrow \lambda\circ f_{X'}(W_{X'}) \subseteq U$.
Donc $\mathrm{Hom}_X(W, \mathrm{Res}(V)\setminus p(T)) \cong \{g \in \mathrm{Hom}(W\times_X X', V) \mid g(W\times_X X') \subseteq U\}$
$= \mathrm{Hom}(W\times_X X', U)$
$= \mathrm{Hom}(W, \mathrm{Res}(U))$.