(Stable) Changement de base propre sur site réel etale.

Théorème (Thm 9 - Bachmann) : On se donne un carré cartesian des schemas :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

avec :

f propre

Y = Noeth + dim. fini (?)

Alors, si $E \in SH(X_{rét})$ le morphisme canonique :

$$g^* Rf_* E \longrightarrow Rf'_* g'^* E$$ est une equivalence faible

Terminologie

- $sSet \equiv$ catégorie des ensembles simpliciaux
- $\mathcal{S} \equiv \infty$-catégorie des espaces ($\equiv \infty$-gpds)

  $\equiv N(\mathrm{Kan})$

- $Set \cong \tau_{\leq 0}\, \mathcal{S}$
- $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \equiv \infty$-catégorie des foncteurs (HTT 1.2.7.3)

  ($\mathcal{C} \equiv$ ensemble sim, $\mathcal{D} \equiv \infty$-cat)

- $Sp \equiv \infty$-catégorie de spectre $\equiv Sp(\mathcal{S}_*)$ (HA – 1.4.3)

References :

$\left.\begin{array}{l}\text{HTT}\\ \text{HA}\\ \text{SAG}\end{array}\right\}$ Lurie

SAG $\equiv$ Rezk

Exemple : (∞-topos d'un espace topologique)

$X \equiv$ espace topologique

$\mathcal{O}p(X) \equiv$ ensemble p.o des ouverts dans X.

Un faiceau des espaces sur X est un (∞) foncteur :

$$F : \mathcal{O}p(X)^{op} \longrightarrow \mathcal{S} \qquad \text{tq}$$

$\forall \{U_i \hookrightarrow U\}_{i \in I}$ on a :

$$F(U) \longrightarrow \lim_{\Delta} \left[[n] \longrightarrow \prod_{i_0, i_1, \dots i_n \in I} F(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}) \right]$$

est une equivalence.

$$Shv_{\mathcal{S}}(X) \subseteq Fun(\mathcal{O}p(X)^{op}, \mathcal{S})$$

Exemple (∞-topos d'un schema $\begin{cases} \text{ét} \\ \text{rét} \end{cases}$).

$X \equiv$ schema

$\text{Ét}_X \equiv$ site étale de X

$X_{\text{rét}} \equiv$ site réel étale de X

$\mathrm{Shv}_{\mathcal{S}}(X_{\text{ét}}^{\wedge})$

Un <u>faiceau des espaces sur X</u> est un foncteur :

$$F : \begin{pmatrix} \text{Ét}_X \\ X_{\text{rét}} \end{pmatrix}^{op} \longrightarrow \mathcal{S} \qquad \text{tq}$$

$\forall$ recouvrement $\{U_i \hookrightarrow U\}_{i \in I}$ on a que :

$$F(U) \longrightarrow \lim \left[[n] \longmapsto \prod_{i_0, i_1, \dots i_n \in I} F(U_{i_0} \times_X U_{i_1} \times_X \dots \times_X U_{i_n}) \right]$$

est une equivalence.

$\mathrm{Shv}_{\mathcal{S}}(X_{\text{rét}})$ $\qquad$ $\mathrm{Shv}_{\mathcal{S}}(X_{\text{ét}})$

∞ - topos :

$\mathcal{X} \equiv \infty$ - cat.

$\mathcal{X}$ ∞ - topos $\iff$ (∞ - Giraud) :

1. $\mathcal{X}$ est presentable
2. Colimites sont universel
3. Coproduits sont disjoint
4. Toute grupoid object de $\mathcal{X}$ est effective.

$\iff$ sous - catégorie accessible, reflective de un ∞ - catégorie de Psh sur $\mathcal{C}$

c.à.d :

$$\mathcal{X} \underset{\text{p.f}}{\overset{\text{lex}}{\underset{\hookrightarrow}{\overset{\twoheadleftarrow}{\perp}}}} \mathrm{Psh}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{S})$$

Déf (∞-topos) : est un ∞-cat $\mathcal{X}$ tq

presentable

① ∃ $\mathcal{C}$ ∞-cat petit, et

② Adjonction : $\underbrace{i}_{\substack{\text{pl. fidèle} \\ \text{adjoint à droite}}} : \mathcal{X} \underset{\hookrightarrow}{\overset{\twoheadleftarrow}{}} \mathrm{Psh}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}) : a$

③ i est accessible (c.à.d il preserve λ-colimites filtrées pour λ cardinal regulier)

④ a est exact à gauche.

Remarques :

① 1–3 $\equiv$ presentable.

Eg : • ∞-gpd petites

• Spectra Sp

• $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ $\equiv$ presentable.

petit presentable

(petite)

② Toutes les categ presentables sont complèt et co-complete (petit).

(3) (AFT – HTT 5.5.2.9)

(i) $\mathcal{A}$ = presentable . $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ admet an adjoint à droite $\Leftrightarrow$ il preserves petites colimites.

(ii) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ presentables : $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ admet un adjoint à gauche $\Leftrightarrow$ il preserve petites limit + accessible.

Examples:

- $$\mathrm{Psh}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}) \equiv \infty\text{-topos}$$
  $$\mathrm{Psh}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{S})$$

- $\mathcal{S} \equiv \infty$-topos

- $$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Shv}_{\mathcal{S}}(X) \\ \mathrm{Shv}_{\mathcal{S}}(X_{r\acute{e}t}), \quad \mathrm{Shv}_{\mathcal{S}}(X_{\acute{e}t}) \end{array}\right\} \infty\text{-topos.}$$

- $\mathcal{X} \equiv \infty$-topos alors il est presentable.

Notation: $\mathrm{Shv}_{\mathcal{S}}(X_{r\acute{e}t}) \equiv \mathcal{X}$

Morphism géometric

$\mathcal{X}, \mathcal{Y} \equiv \infty$-topos,

un morphisme des ∞-topos $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$

c'est la donné :

$$\underbrace{f_*}_{} : \mathcal{X} \rightleftarrows \mathcal{Y} : \underbrace{f^*}_{}$$

~~~~ adjoint à droite

~~le~~ exact à gauche

+

Par $\underline{TA}$. $\iff$ $f^* : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ preserves petites colimites.
~~~~

Faiceaux de spectre sur un ∞-topos.

(SAG - Lurie).

<u>Déf</u> : $\mathcal{X} \equiv \infty$-topos. Un faiceaux <u>de spectres</u> sur $\mathcal{X}$ est un foncteur $\mathcal{X}^{op} \longrightarrow Sp$ qui preserves <u>les ~~limites~~</u> petites <u>finis</u>.

$$\underbrace{Shv_{Sp}(\mathcal{X})}_{\text{sous-categ plaine}} \subseteq \boxed{Fun(\mathcal{X}^{op}, Sp)}$$

$Psh_{Sp}(\mathcal{X})$

Remark : $\mathcal{X} = \infty$-topos

redoit
$F(*)$ est final

① HA - 1.4.2.8.

$$Sp = \mathrm{Fun}^{\text{red-exc}}(\mathcal{S}_*^{fin}, \mathcal{S})$$

exc
pushouts $\Rightarrow$ pullbacks.

Alors,

$$\mathrm{Shv}_{Sp}(\mathcal{X}) = \mathrm{Fun}^{\text{lim-pres}}(\mathcal{X}^{op}, Sp)$$

RK HA 1.7.2.9

$$= \mathrm{Fun}^{\text{lim-pres}}(\mathcal{X}^{op}, \mathrm{Fun}^{\text{red-exc}}(\mathcal{S}_*^{fin}, \mathcal{S}))$$

$$\cong Sp\big(\underbrace{\mathrm{Fun}^{\text{lim-pres}}(\mathcal{X}^{op}, \mathcal{S})}\big)$$

$$\cong Sp(\mathrm{Shv}_{\mathcal{S}}(\mathcal{X}))$$

$$Sp(\mathcal{X}_*)$$

② Par Yoneda, $\boxed{\mathrm{Shv}_S(\mathcal{X}) \simeq \mathcal{X}}$

Conclusion: $\mathrm{Shv}_{Sp}(\mathcal{X}) \simeq \underbrace{Sp(\mathcal{X})}$

spectrum objects de $\mathcal{X}$

(HA – 1.4.2.8).

③ $\mathrm{Shv}_{Sp}(\mathcal{X})$ est presentable.

$\mathcal{X} \otimes Sp \leftarrow$ stable $\equiv$ HA 1.1.3.1 + 1.1.3.3.

__Notation__ $\mathcal{X} \equiv \infty$-topos

$\mathcal{C} \equiv \infty$-cat $\quad X \in \mathcal{C}$.

$X \equiv n$-tronqué, $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(a, X)$ est n-tronqué $\forall a \in \mathcal{C}$.

① $\mathcal{X}^{\heartsuit} := \tau_{\leq 0}\mathcal{X}$ (topos sous-jacent).

0-tronqué de $\mathcal{X}$.

$$\mathcal{X} = \mathrm{Shv}_{\mathcal{S}}(X_{\text{ét}}) \qquad \tau_{\leq 0}\mathcal{X} = \mathrm{Shv}_{\tau_{\leq 0}\mathcal{S}}(X_{\text{ét}}) \simeq \mathrm{Shv}_{\mathrm{Set}}(X_{\text{ét}})$$

②
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Shv}_{\mathrm{Sp}}(\mathcal{X}) \arrow[r, "\Omega^\infty"] \arrow[rr, bend right, "\pi_0"'] & \mathrm{Shv}_{\mathcal{S}}(\mathcal{X}) \arrow[r, "\tau_{\leq 0}"] & \mathcal{X}^{\heartsuit} \\ & \mathcal{X} \arrow[u, phantom, "\simeq" rotate=90] & \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{X}^{op} \to \mathrm{Sp} \xrightarrow{\Omega^\infty} \mathcal{S}$$

Plus general : $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
Sh_{Sp}(\mathcal{X}) \arrow[r, "\Omega^n"] \arrow[rr, bend right, "\pi_n"'] & Shv_{Sp}(\mathcal{X}) \arrow[r, "\pi_0"] & \mathcal{X}^{\heartsuit}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}^{op} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & Sp \arrow[r, "\Omega^n"] & Sp
\end{tikzcd}$$

Remark :

$$\begin{tikzcd}
\pi_n : ho(Sh_{Sp}(\mathcal{X})) \arrow[r] \arrow[dr] & ho(\mathcal{X}^{\heartsuit}) \\
 & Ab(\mathcal{X}^{\heartsuit})
\end{tikzcd}$$

$\pi_n E \simeq$ faisceau en gp abelien donné par faisceautisé

$$\mathcal{U} \longmapsto \pi_n(E(\mathcal{U}))$$

$\mathcal{X} = Sh_S(X_{\text{ét}})$

$Ab(\mathcal{X}^{\heartsuit}) = Sh_{Ab}(X_{\text{ét}})$

t-structures :

Def : $\mathcal{X} \equiv \infty$-topos, $E \in \mathrm{Shv}_{Sp}(\mathcal{X})$

E connective si $\pi_n E = 0$ $\forall n < 0$

E co-connective (~~tronqué~~) si $\pi_n E = 0$ $\forall n > 0$

$\mathrm{Shv}_{Sp}(\mathcal{X})_{\geq 0}$ $\equiv$ sous cat plaine des objects conective

$\mathrm{Shv}_{Sp}(\mathcal{X})_{\leq 0}$ $\equiv$ " " " co-conective.

Manin-M. H. A

Prop : (SAG - 1.3.2.7). $\mathcal{X} \equiv \infty$-topos. (notation homologique)

① $Shv_{sp}(\mathcal{X})_{\geq 0}$, $Shv_{sp}(\mathcal{X})_{\leq 0}$ détermine une t-struct pour $Shv_{sp}(\mathcal{X})$.

② La t-structure est compatible avec colimites seq ($Shv_{sp}(\mathcal{X})_{\leq 0} \subseteq Shv_{sp}(\mathcal{X})$ est fermé par colimites seq).

③ La t-structure est complet à droite.

$$\left(Shv_{sp}(\mathcal{X}) = \operatorname{colim} \left(\cdots Sh_{sp}(\mathcal{X})_{\geq 2} \xrightarrow{\tau_{\geq 1}} Shv_{sp}(\mathcal{X})_{\geq 1} \to \cdots \right) \right)$$

4 π_0 determine une equiv des cat

$$\mathrm{Shv}_{Sp}(\mathcal{X})^{\heartsuit} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}(\mathcal{X}^{\heartsuit})$$

$$\mathrm{Shv}_{Sp}(\mathcal{X})_{\geq 0} \cap \mathrm{Shv}_{Sp}(\mathcal{X})_{\leq 0}$$

$\mathcal{X} = \mathrm{Shv}_S(X_{\text{ét}})$.

Remarques : $\mathcal{C}$ = cat triangulé, avec t-structure

① $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{C}_{\geq n} = \mathcal{C}_{\geq 0}[n]$

$\mathcal{C}_{\leq n} = \mathcal{C}_{\leq 0}[n]$

$\iota : \mathcal{C}_{\geq n} \hookrightarrow \mathcal{C} : \tau_{\geq n}$, $\quad i : \mathcal{C}_{\leq n} \hookrightarrow \mathcal{C} : \tau_{\leq n}$

à gauche $\qquad\qquad$ droite

$\tau_{\leq n} X = \tau_{\leq 0}(X[-n])[n]$, $\quad \tau_{\geq n} X = \tau_{\geq 0}(X[-n])[n]$

② $\forall X \in \mathcal{C}$, on a :

$$\tau_{\geq n} X \longrightarrow X \longrightarrow \tau_{\leq n-1} X$$

suite fibré (fiber seq)

③

③ $\tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0} \simeq \tau_{\leq 0}\tau_{\geq 0} = \pi_0$:

$\forall\ n \in \mathbb{Z}$,

$$\pi_n X = \pi_0(X[n])$$

$$\tau_{\geq n}\tau_{\leq n} X = (\pi_n X)[n]$$

Une "∞ - suite spectrale de Grothendieck"

$$\to X(-2) \to X(-1) \to X(0) \to X(1) \to X(2) \to \cdots$$

<u>Def</u> (Object filtrée) $\mathcal{C} = \infty$-cat., $X : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{C}$.

$$X(\infty) = \operatorname{colim} X \quad , \quad X(-\infty) = \lim X$$

<u>Proposition</u> (HA - 1.2.2.6)

- $\mathcal{C}$ = stable ∞-cat + t-structure
- $X : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{C}$ filtrée.
- t-structure est compatible avec colimites seq

$\Rightarrow \exists$ SS cond convergent :

$$E^1_{p,q} = \pi_{p+q}\left(\operatorname{cofib}\left(X(p-1) \to X(p)\right)\right) \Longrightarrow \pi_{p+q}\left(\operatorname{cofib}\left(X(-\infty) \to X(\infty)\right)\right)$$

Gregory Rok = A Groth. SS in higher category theory

Si $X(n) = 0 \quad \forall n < 0$, la SS converge

Theorème : $F : \underset{\llcorner}{\mathcal{C}} \longrightarrow \underset{\llcorner}{\mathcal{D}}$

stable-∞-cats + t-structure

- F t-exact à gauche (c.à.d : exact + $F(\mathcal{C}_{\leq 0}) \subseteq \mathcal{D}_{\leq 0}$)

- La t-structure de $\mathcal{D}$ est séparé à droit et compatible avec limites seq.

- $X \in \mathcal{C}$ tq $\operatorname{colim} F(\tau_{\leq n} X)$ exist en $\mathcal{D}$

Alors : $\exists$ SS hom-index, cond conveg tq

$$E_2^{p,q} = \pi_p F(\pi_q X) \Longrightarrow \pi_{p+q}(\operatorname{colim} F(\tau_{\leq n} X))$$

Changement de base propre :

Rappel :

Theoreme (Thm 9_ Bachmann) : On se donne un carré cartesian :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

avec :

f propre

$Y =$ Noeth + dim fini

Alors, si $E \in SH(X_{ret})$ le morphisme canonique :

$$g^* Rf_* E \longrightarrow Rf'_* g'^* E$$ est une equivalence faible

__Preuve :__ $\mathcal{X}' \equiv \infty$-topos $\mathrm{Shv}_S(X'_{\text{ét}})$.

__Step 1 :__

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f \text{ propre}"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \implies \begin{tikzcd} \mathcal{X}' \arrow[r, "g'_*"] \arrow[d, "f'_*"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "f_*"] \\ \mathcal{Y}' \arrow[r, "g_*"'] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

On note que $g'^* : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ (exact à gauche)

$$\implies \mathrm{Shv}_{Sp}(\mathcal{X}) \simeq \begin{tikzcd} \mathrm{Sp}(\mathcal{X}) \arrow[r, "g'^*"] & \mathrm{Sp}(\mathcal{X}') \arrow[l, bend left, "g'_*"] \end{tikzcd} \simeq \mathrm{Shv}_{Sp}(\mathcal{X}')$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Shv}_{Sp}(X') \arrow[r, "g'_*"] \arrow[d, "f'_*"'] & \mathrm{Shv}_{Sp}(X) \arrow[l, bend left] \arrow[d, "f_*"] \\
\mathrm{Shv}_{Sp}(Y') \arrow[r, "g_*"'] \arrow[u, bend right] & \mathrm{Shv}_{Sp}(Y) \arrow[l, bend right] \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}
$$

$g_* \vdash g^* \longrightarrow$ counité : $g^* g_* \longrightarrow \mathbb{1}$ ①

$g'_* \vdash g'^* \longrightarrow$ unité : $\mathbb{1} \longrightarrow g'_* g'^*$ ②

② + $g^* f_*$

$$
\begin{tikzcd}
g^* f_* \arrow[r] \arrow[ddrr, "\beta"'] & g^* f_* g'_* g'^* \arrow[r, "\sim"] & g^* (f \circ g')_* g'^* \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
 & & g^* g_* f'_* g'^* \arrow[d, "1"] \\
 & & f'_* g'^*
\end{tikzcd}
$$

$f'_* g'^*$

$g^* f_* : \quad Shv_{sp}(X) \longrightarrow Shv_{sp}(Y')$

Si $\quad E \in Sh_{sp}(X)$

$\rightsquigarrow$ On a :
par thm

$$\begin{array}{ccc} \pi_{-p}\, g^* f_* (\pi_{-q} E) & \Longrightarrow & \pi_{-p-q}(g^* f_* E) \\ \Downarrow \beta & & \\ \pi_{-p}\, f'_* g'^* (\pi_{-q} E) & \Longrightarrow & \pi_{-p-q}(f'_* g'^* E) \end{array}$$

à valeurs dans $\left(\mathrm{Shv}_{sp}(Y'_{rét})\right)^{\heartsuit} \simeq \mathrm{Ab}(Y'^{\heartsuit}_{rét})$

$\mathrm{Shv}_{Ab}(Y_{rét})$

c.b.p $\Rightarrow$ iso entre SS.

Step 2: Bachmann f propre + dim rel $= n$

$\forall F \in \mathrm{Shv}(X_{rét}) \Longrightarrow \pi_{-p} f_* F = 0 \quad \forall p > n$

Alors :

$$\pi_{-p-q}\left(g^* f_* E\right) \cong \pi_{-p-q}\left(f'_* g'^* E\right)$$

$\rightsquigarrow$ passer vers hypercomplêt $g^* f_* E \xrightarrow{\sim} f'_* g'^* E$

$\mathcal{X}_{\text{rét}}$, $\mathcal{X}'_{\text{rét}}$ ne sont pas hypercomplet.

à priori (on sait pas). On sait :

Remark : (B.13 - Elmanto - Shah)

X dim fini $\Rightarrow$ $\mathcal{X}_{\text{rét}}$ ∞-topos est hypercomplêt.

D'après se réduire à hypercomplétion :

$$\mathcal{S}hv_{Sp}(\mathcal{X}^{hyp}) \hookrightarrow \mathcal{S}hv_{Sp}(\mathcal{X})$$

On a l'équivalence :

$$g^* f_* E \xrightarrow{\sim} f_*^! g^* E$$

où $E \in \mathcal{S}hv_{Sp}(\mathcal{X}^{hyp})$.

$\boxtimes$