géom. alg.

corps de nombre (anneau d'entiers)

réelle

complexe

corps fini

corps p-adique

$X/\mathbb{C} \rightsquigarrow X(\mathbb{C})$ type d'homotopie

$X/\mathbb{R} \rightsquigarrow X(\mathbb{R})$

Théorie de Cox.

type d'homotopie étale d'Artin - Mazur.

Grothendieck SGA 1.

X sch. $\bar{x}$ point géométrique $\bar{x} \in X(\bar{k})$

$$\pi_1^{et}(X, \bar{x}) \simeq \widehat{\pi_1(X(\mathbb{C}))}$$

$\bar{k} = \mathbb{C}$

$$\hat{G} = \varprojlim_{\substack{G \twoheadrightarrow F \\ F \text{ fini}}} F \quad \text{eg } \hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}_p$$

coh. étale : calculer par des "hyper-recouvrements étales"

$$W \xrightarrow{p} X \quad \text{réc}^{t} \text{ étale}$$

$$W_\bullet = \check{S}_\bullet(W/X) = \underbrace{W \leftleftarrows W\times_X W \leftleftarrows W\times_X W\times_X W \quad \cdots}_{\text{schéma simplicial.}}$$

principe de hyper-rec.

idée : se donner $W_1 \longrightarrow W\times_X W$

W

on en déduit un nouveau schéma simplicial en recollant $\check{S}_\bullet(W_1/_{W\times_X W})$ et $\check{S}_\bullet(W/X)$

Déf. Un hyper-recouvrement étale de X est un schéma simplicial $W_\cdot / X$ tq $W_0 \to X$ rec. étale

$\forall n \geq 0$ $\quad (\operatorname{cosk}_n(W_\cdot))_{n+1} \leftarrow W_{n+1}$ rec. étale.

sch. simplicial " troncation $\leq n$ "

HR_X cat. des hyper. rec. étale.

à homotopie près, $\widetilde{HR}_X$ est cofiltrante.

X schéma : $\pi_0(X)$ = ens. des comp. connexes.

Def (A.M.) $\left|\ \{X\}_{et} := \text{"}\varprojlim_{W_\cdot/X \in HR^\sim_X}\text{"}\ \pi_0(W_\cdot) \in \text{pro-}\mathcal{H}\right.$

$\uparrow$ pro-$(\Delta^{op}\mathcal{E}_{ens})$

$$H^n_{et}(X, \underline{A}) = H^n(X_{et}, \underline{A}) \simeq \varinjlim_{W_\cdot/X} H^n(W_\cdot, \underline{A}) = H^n(\{X\}_{et}, \underline{A})$$

$$\| \quad H^n(\pi_0(W_\cdot), \underline{A})$$

$X/\mathbb{C}$ sch. de t. f. connexe.

Th (A.M.) $\widehat{\{X\}_{et}} \simeq \widehat{X(\mathbb{C})}$ → complétion profini des type d'homotopie.

si X est géom. unibranche (ex: normal) $\widehat{\{X\}_{et}} \xrightarrow{\sim} \{X\}_{et}$

X ens. simplicial : $\hat{X}$ connect. $\pi_i(\hat{X})$ sont pro-finis

Théorie de Cox

$X/_{\mathbb{R}}$ sch. de t. f. $\qquad C_2 = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$

$$X(\mathbb{R}) = X(\mathbb{C})^{C_2} \qquad \overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$$

idée : considérer le C_2-espace $X(\mathbb{C})$.

$$BC_2 = K(\mathbb{Z}/2, 1) = \mathbb{R}P^\infty$$

Borel : $EC_2 = S^\infty$ action antipodale de C_2

$$C_2 \longrightarrow S^\infty \longrightarrow S^\infty/C_2 = \mathbb{R}P^\infty$$

$$X(\mathbb{C})_{C_2} := X(\mathbb{C}) \times_{C_2} EC_2 := X(\mathbb{C}) \times EC_2 / C_2$$

action diagonale

$\underline{\text{Th}}$ (Cox) $\left(\{X\}^{\wedge}_{et} \simeq \widehat{X(\mathbb{C})_{C_2}} \right.$

const. bar

idée de preuve : $EC_2 \overset{\checkmark}{\simeq} C_2 \leftleftarrows C_2 \times C_2 \overset{\leftarrow}{\underset{\leftarrow}{\leftleftarrows}} \cdots$

$(*)$ $X(\mathbb{C}) \times_{C_2} EC_2 \simeq X(\mathbb{C}) \leftleftarrows X(\mathbb{C}) \times C_2 \overset{\leftarrow}{\underset{\leftarrow}{\leftleftarrows}} \cdots$

$\bar{X} = X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ext. des scalaires

$\bar{X} \longrightarrow X$ rev. galoisien de gpe C_2

$\Rightarrow$ $\check{S}_\cdot(\bar{X}/X) \simeq \bar{X} \leftleftarrows \bar{X} \times C_2 \overset{\leftarrow}{\underset{\leftarrow}{\leftleftarrows}} \bar{X} \times C_2 \times C_2 \cdots$

les points complexes de $\check{S}_\cdot(\bar{X}/X)$ s'identifient à $(*)$

Th. A. M. $\{\check{S}_\cdot(\bar{X}/X)\}^{\wedge}_{et} \simeq \widehat{(*)} = \widehat{X(\mathbb{C})_{C_2}}$

$\wr\!\wr$

$\{X\}^{\wedge}_{et}$ $\square$

Cor. Π gred. finis:

$$H^*_{et}(X, \Pi) = H^*_{\mathrm{grp}}(\widehat{X(\mathbb{C})_{C_2}}, \Pi) = H^*_{\mathrm{grp}}(X(\mathbb{C})_{C_2}, \Pi) = H^*_{C_2}(X(\mathbb{C}), \Pi)$$

$C_2 \curvearrowright X(\mathbb{C})$ pts fixes $X(\mathbb{R})$

espace des orbites : $\underbrace{X(\mathbb{C})/C_2}_{= X_\infty}$

$$\begin{tikzcd}
X(\mathbb{R}) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] \arrow[dr, hook] & X(\mathbb{C}) \arrow[d] \\
X(\mathbb{R})/C_2 \arrow[r, hook] & X_\infty
\end{tikzcd}$$

triviale

suite exacte longue coh. equiv. $\left(\overset{C_2 \circlearrowright}{X(\mathbb{C})}, \overset{C_2 \circlearrowright}{X(\mathbb{R})}\right)$

$$H^*_{\text{sing}}\left(X(\mathbb{C})/C_2, X(\mathbb{R})/C_2, \mathbb{Z}\right)$$

$$\begin{tikzcd}
H^*_{sing}\left(X(\mathbb{C})/C_2, \underbrace{X(\mathbb{R})/C_2}; \Pi\right) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & H^*_{C_2}\left(X(\mathbb{C}), \Pi\right) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\ 1.2"] & H^*_{C_2}\left(X(\mathbb{R}), \Pi\right) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\|"] & \cdots \\
H^*_{sing}\left((X_{\infty}, X(\mathbb{R})_{\infty}); \Pi\right) \arrow[r] & H^*_{et}\left(X, \Pi\right) \arrow[r] & H^*_{sing}\left(X(\mathbb{R}) \times \mathbb{RP}^\infty, \Pi\right) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

suite exacte de Cox.

$\Pi = \mathbb{Z}/2$

rappel : $H^*_{sing}(\mathbb{RP}^\infty, \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[\omega_1]$

$\omega_1 \in H^1_{sing}(\mathbb{RP}^\infty, \mathbb{Z}/2)$

classe de Stiefel-Whitney du fib. tautologique.

Cor. $X/\mathbb{R}$ dim. d.

$$\forall n > 2d, \quad H^n_{et}(X, \mathbb{Z}/2) \simeq H^n_{sing}(X(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}/2) \simeq \bigoplus_{i=0}^{d} H^i_{sing}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^*_{sing}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

$$X(\mathbb{R}) \neq \emptyset \iff cd_2(X) = \infty$$

eg : $X/_{\mathbb{R}}$ courbe proj. lisse geom. connexe de genre g

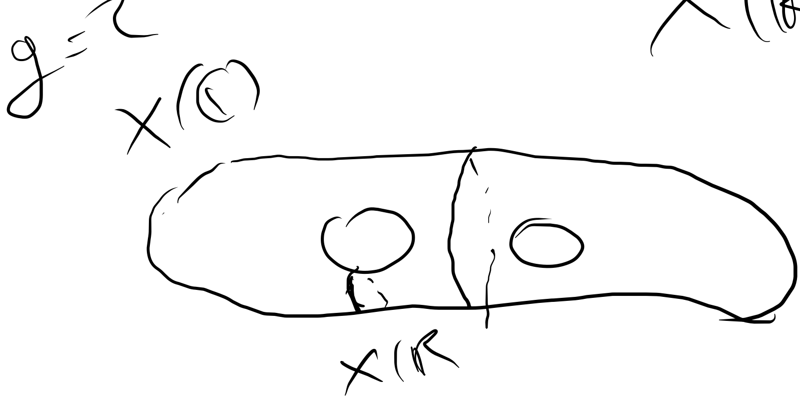
$X(\mathbb{C})$: surface de Riemann compacte orientable connexe

$C_2 \ni \sigma$ involution de $X(\mathbb{C})$ qui renverse l'orientation.

$X(\mathbb{R}) = X(\mathbb{C})^{\sigma} \subset X(\mathbb{C})$

variété compacte dim. 1 = réunion disjointe de cercles S^1

$$X(\mathbb{R}) = \bigsqcup_{n(X)} S^1 \qquad n(X) = \pi_0(X(\mathbb{R}))$$



$X(\mathbb{C})/\sigma$ = surface compacte à bord, de bord $X(\mathbb{R})$

2 cas possible : $\cdot$ $X(\mathbb{C}) \setminus X(\mathbb{R})$ connexe

$a(X) = 1$

$\cdot$ $X(\mathbb{C}) \setminus X(\mathbb{R})$ non connexe

$a(X) = 0$

<u>Th</u> (Klein 1893) 1) (Harnack 1876) $0 \leq n(X) \leq \overset{g}{\overset{\shortparallel}{g(X)}}+1$

2) $n(X) = 0 \Rightarrow a(X) = 1$

$n(X) = g(X)+1 \Rightarrow a(X) = 0$

$a(X) = 0 \Rightarrow n(X) \equiv g+1 \bmod 2$

si (g, n, a) satisfait ces contraintes, il existe une courbe alg. réelle qui réalise ce triplet.

2 cas possible : • $X(\mathbb{C}) \setminus X(\mathbb{R})$ connexe

$$a(X) = 1$$

• $X(\mathbb{C}) \setminus X(\mathbb{R})$ non connexe

$$a(X) = 0$$

Th (Klein 1893) 1) (Harnack 1876) $0 \leq n(X) \leq \overset{g}{\overset{\shortparallel}{g(X)}} + 1$

2) $n(X) = 0 \Rightarrow a(X) = 1$

$n(X) = g(X) + 1 \Rightarrow a(X) = 0$

$a(X) = 0 \Rightarrow n(X) \equiv g + 1 \mod 2$

si (g, n, a) satisfait ces contraintes, il existe une courbe alg. réelle qui réalise ce triplet.

Idée de preuve :

$$(*) \quad b_i^{\mathbb{R}} = \dim\left(H^i_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)\right)$$

$$b_i^{\mathbb{C}} = \text{———————} \; X(\mathbb{C}) \; \text{———}$$

Considérer une décomp. cellulaire de $X(\mathbb{C})$ σ-équiv.

inégalité de Thom-Smith :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ n(X)}}{b_0^{\mathbb{R}}} + \underset{\substack{\shortparallel \\ n(X)}}{b_1^{\mathbb{R}}} \leq \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{b_0^{\mathbb{C}}} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 2g}}{b_1^{\mathbb{C}}} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{b_2^{\mathbb{C}}} \qquad \text{Ok}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}\left(b_0^{\mathbb{R}} + b_1^{\mathbb{R}}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(b_0^{\mathbb{C}} + b_1^{\mathbb{C}} + b_2^{\mathbb{C}}\right) \mod 2$$

Cq avec les notat° précédentes :

$$H^n_{et}(X, \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{si } n = 0 \\ (\mathbb{Z}/2)^{r(X)+g(X)} & \text{si } n = 1 \\ (\mathbb{Z}/2)^{< r(X)} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$H^*_{sing}(X_\infty, X(\mathbb{R}); \Lambda) \to H^*_{et}(X, \Lambda) \to H^*_{sing}(X(\mathbb{R}) \times \mathbb{RP}^\infty, \Lambda) \to \dots$$

Scheiderer : interpréter la suite de Cox en termes cohomologiques / topologiques.

pf : compactifier $\widetilde{X}_{et}$ de manière à ce que $\widetilde{X(\mathbb{R})}$ soit le bord dans le cas $X/\mathbb{R}$

si $X/\mathbb{Z}[1/2]$: $\widetilde{X(\mathbb{R})} \leftarrow \widetilde{X}_{ret}$ site réel-étale

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{X}_{ret} \arrow[r, "i_*"] & \widetilde{X}_{b} \arrow[l, bend right, "i_!"'] \arrow[l, bend left, "i^*"] \arrow[r, "j^*"] & \widetilde{X}_{et} \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"]
\end{tikzcd}
$$

bord   compactification   ouvert

points fixes + action $\circlearrowright$ C_2