I – évolutions $\mathbb{A}^1$-homotopie / homotopie motivique

1) Voevodsky PHD – 1992

Beilinson : cohomologie motivique et régulateurs

"cohomologie universelle"
analogue à la coh. singulière.

h-motifs : 2 idées :

– h-topologie : recouvrements :
épimorphismes topologiques universels

S = schéma de base

– analogue de $[0,1]$ est $\mathbb{A}^1$.

$\hookrightarrow$ $\underline{DM}_h^{eff}(S)$: catégorie dérivée des h-faisceaux de gps ab. sur Sch_S
"modulo la relation" $\mathbb{Z}_S^h(\mathbb{A}^1_X) \simeq \mathbb{Z}_S^1(X)$

2) Conjecture de Bloch-Kato 1995

cohomologie "extraordinaires" en géom alg.

en top : "cohomologie" $H^*(X)$

tq $H^*(pt)$ n'est pas (approximation)

concentrée en deg. 0

eg : K-théorie topologique/complexe. A.-H.,

cobordisme (complexe) Thom, Quillen, ...

K-théories de Morava.

↳ faire marcher la preuve de Vo.-S.

(conj de Milnor en poids 3) grâce

aux K-th. de Morava alg.

3) Suslin – Voevodsky 1996

Homologie de Suslin.

X/S schéma lisse, S lisse$/k$.

$\mathrm{Spec}\left(k[t_0,\dots,t_n]/_{t_0+\dots+t_n=1}\right)$

$\uparrow$

$C_n^{sus}(X/S) = \{ \alpha$ cycle alg. de $\Delta^n \times X$

$\mathrm{Supp}(\alpha)$ est fini équidim de dim. 0 sur $\Delta^n \times S \}$

complexe de Suslin: $C_*^{sus}(X/S)$

(modèle : groupes de Chow supérieurs Bloch)

Déf : $H_n^{sus}(X/S) = H_n(C_*^{sus}(X/S))$

Th S (normal) affine, X/S lisse de dim. 1,

$X \hookrightarrow \bar{X}$: $\bar{X}/S$ propre normal, dim. rel. 1

$X_\infty = \bar{X} - X$ admet un v. ouvert affine

$\Rightarrow H_n^{sus}(X/S) = \begin{cases} \mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty) & n=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2 nouvelles : | correspondances finies et transferts
| topologie de Nisnevich / étale

2000

$$DM^{eff}_{(Nis)}(k) \xrightarrow{a_{et}} DM^{eff}_{et}(k) \simeq DM_{h}^{eff}(k)$$

cat. dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts (sur Sm_k) modulo la relation $\mathbb{A}^1 \sim *$

$\mathbb{Z}^{tr}(\mathbb{A}^1_X) \simeq \mathbb{Z}^{tr}(X)$

idem étale au lieu de Nisnevich

Th (rigidité S.V.) | $n \in k^\times$

$$DM^{(eff)}_{et}(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq D(\underbrace{Sh(k_{et}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[G_k]\text{-mod}})$$

$G_k = Gal(\bar{k}/k)$

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_{DM^{eff}_{Nis}}\left(\mathbb{Z}^{tr}_{/n}(X),\ \mathbb{Z}/n(q)[p]\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{DM_{et}}\Big(\mathbb{Z}^{tr}_{/n,et}(X),\ \underbrace{\mathbb{Z}/n,et(q)[p]}_{\overset{\simeq}{\mu_n^{\otimes q}}}\Big) \\ \| & & \| \\ H^{p,q}_M(X, \mathbb{Z}/n) & \longrightarrow & H^p_{et}(X, \mu_n^{\otimes q})\end{array}$$

$p = q$, $X = \mathrm{Spec}(k)$:

$$H^p_M(k)/n \longrightarrow H^p_{et}(G_k, \mu_n^{\otimes p})$$

est un iso $n = l^r$ (Bloch-Kato l quelconque)

Milnor $l=2$

Rost + Voevodsky 2002-2005

point clé : preuve th. de rigidité :

F fx étale de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ torsion, inv. par homotopie, sur Sm_k

alors F est "localement constant" sur k

mq $x \in X$, $X/_k$ lisse. $\bar{x} = \mathrm{Spec}(\overline{k(x)})$

$$F(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{h_s}_{X,\bar{x}})) \simeq F(k(\bar{x})).$$

4) Morel – Voevodsky 2000

top. $\mathcal{H}^{top}_{\bullet}$ espace top. pointés "à hep près"

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{H}^{top}_{\bullet} & & & \\ & \downarrow{\scriptstyle \Sigma^\infty} & & & \\ S^1\text{-spectres} & S\mathcal{H}^{top} & \underset{N}{\overset{K}{\rightleftarrows}} & D(Ab) & \\ & \| & & & \\ & \mathcal{H}^{top}_{\bullet}[(S^1)^{\wedge -1}] & & & \end{array}$$

spectre ordinaire $= $ "$K(C_*)$"

: $E \in S\mathcal{H}^{top}$; $E^n(X) = [\Sigma^\infty X_+, \underset{S^n \wedge E}{\underset{\shortparallel}{E(n)}}]^{ab}$

eg. - spectre d'Eilenberg-MacLane

A gpe ab. : $\underset{\underset{S\mathcal{H}}{\cap}}{KA} = (K(A,1), K(A,2), \dots)$: ab. ass. à A coef. dans A

fx simpliciaux pointés Nisnevich modulo la relation d'homotopie simpliciale et $\mathbb{A}^1_x \simeq X$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^{\mathbb{A}^1}_\bullet(k) \arrow[r, shift left] \arrow[d] & DM^{eff}(k) \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\
SH(k) \arrow[r, shift left] & DM(k) \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{P}^1$-spectre

$SH(k) = \mathcal{H}^{\mathbb{A}^1}_\bullet(k)\left[(\mathbb{P}^1_k)^{\wedge -1}\right]$

adjonction de Dold-Kan "motivique"

$k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$\rho_k : \mathcal{H}^{\mathbb{A}^1}_\bullet(k) \longrightarrow \mathcal{H}^{top}_\bullet$$
$$X \longrightarrow X(k)$$

+ top. analytique ($k = \mathbb{C}$) euclidienne ($k = \mathbb{R}$)

$\rho_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = S^2$ $\qquad$ $\rho_{\mathbb{C}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) = S^1$

$\rho_{\mathbb{R}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}) = S^1$ $\qquad$ $\rho_{\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}) = S^0$

dans $\mathcal{H}_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)$ $(\mathbb{P}^1, \infty) \simeq S^1 \wedge (\mathbb{G}_m, 1)$

$\uparrow$ fc simplicial constant de valeur S^1

$\underline{\mathrm{Th}}$ (Morel–Voevodsky) $X/_k$ lisse

$\exists\, BGL_\infty \in \mathcal{H}_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)$ tq

$$[S^n \wedge X_+, \mathbb{Z} \times BGL_\infty]_{\bullet} \simeq K_n(X)$$

5) Cross functors Voevodsky 2000

Th. 6 foncteurs Ayoub - Cisinski - D.

Toutes les catégories vues jusqu'ici ont une définition "en famille" :

S schéma $\longmapsto$ $SH(S)$, $DM_{\mathbb{Q}}(S)$, $DM_h(S)$

(noeth. dim. finie
q.c. q.s.

$DM_h(S) = DM_{et}(S) = DA_{et}(S)$

munies des 6 opérations f^*, f_*, $f_!$, $f^!$, $\otimes$, $\underline{Hom}$

+ formalisme de Grothendieck :
changement de base, formules de projection,
dualité

+ transformation naturelle "compatibles" aux 6 opérations.

$$
\begin{tikzcd}
SH(S) \arrow[r] \arrow[d] & DM(S) \arrow[r] \arrow[d] & DM_{et}(S) \arrow[d] \\
SH(S)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, two heads, "\sim"] & DM_{\mathbb{Q}}(S) \arrow[r, "\simeq"] & DM_{et,\mathbb{Q}}(S)
\end{tikzcd}
$$

épimorphisme scindé

Application : Th (rigidité) (ACD) S schéma noeth. dim. finie
n inversible sur S.

$$
DM_{et}(S, \mathbb{Z}/n) \simeq D(Sh(S_{et}, \mathbb{Z}/n))
$$

$$
\wr\!\wr
$$

$$
DM^{eff}_{et}(S, \mathbb{Z}/n)
$$

$\mathbb{Z}/n(1)$

$\simeq \mu_n$

II -

$$\rho_{\mathbb{R}} : \mathcal{SH}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{SH}^{top}$$

$$\rho_{\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}) = S^0$$

$$S^0 \longrightarrow (\mathbb{G}_m, 1)$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ *}}{\mathrm{Spec}\,\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{G}_m \qquad = \qquad \mathbb{G}_m(\mathbb{R}) \ni -1$$

$$\text{"}[-1]\text{"} : * \longrightarrow \mathbb{G}_m \in \mathcal{H}^{\mathbb{A}^1}(k)$$

$$\leadsto [-1] : S^0 \longrightarrow (\mathbb{G}_m, 1) \in \mathcal{H}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}(k)$$

$$\rho = -[-1] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}\left(\Sigma^\infty S^0, \Sigma^\infty(\mathbb{G}_m, 1)\right)$$

$$\rho_{\mathbb{R}}(\rho) \in \mathrm{End}_{\mathcal{SH}^{top}}(\Sigma^\infty S^0) = \mathbb{Z} \Rightarrow \rho_{\mathbb{R}}(\rho) = \pm 1.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{SH}(\mathbb{R}) \arrow[rr, "\rho_{\mathbb{R}}"] \arrow[dr] & & \mathcal{SH}_{top} \\
& \mathcal{SH}(\mathbb{R})[\rho^{-1}] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Th 1 (Bachmann) $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}$ est une équivalence de catégories.

idée : th. de rigidité avec le site réel-étale de S : $S_{rét}$

$$\begin{array}{c}
\mathcal{H}_\cdot(S_{rét}) \\
\downarrow \\
S^1\text{-spectres } \mathcal{SH}(S_{rét})
\end{array}$$

Th 2 S noeth. dim. finie.

$$SH(S_{ét}) \xrightarrow{\sim} SH(S)[e^{-1}].$$

$e : S^\circ \to \mathbb{G}_m$ iso $\Rightarrow \mathbb{G}_m \otimes$-inversible

étapes de preuve.

(1) $S_{ét} \overset{\nu}{\hookrightarrow} Sm_{/S,\, ét}$ inclusion entre "site"

$\rightsquigarrow\ SH(S_{ét}) \xrightarrow{\nu_\#} SH^{eff}(Sm_{S,\, ét})$ est pleinement fidèle

$\rightsquigarrow\ SH(S_{ét})[e^{-1}] \xrightarrow{\nu_\#} SH^{eff}(Sm_{S,\, ét})[e^{-1}]$ pf.

$$SH^{eff}(Sm_{S,\, ét})[e^{-1}] \cong SH(Sm_{S,\, ét})[e^{-1}]$$

(2) $\nu_\#[e^{-1}]$ est essentiellement surjectif.

utiliser les th. de changement de base propre "à gauche et à droite"

$\to$ $\nu_\#[e^{-1}]$ equivalence de cat.

(3) "descente cohomologique"

$$SH(Sm_{S,Nis})[e^{-1}] \xrightarrow{\sim} SH(Sm_{S,\acute{e}t})[e^{-1}]$$

on se réduit au cas des corps $S = Spec(k)$

ops $cd(k) = 0$

$SH(Sm_{k,Nis})$

modules homotopiques = K_*^{MW} - modules

$\nearrow$ K-théorie de Milnor-Witt

Th clé : $\underline{K}^{MW}_*[e^{-1}] \simeq a_{\text{ét}}(\underline{\mathbb{Z}})$

(Morel, + th. de Jacobson)