Groupe de travail
«L'hypothèse de Riemann d'après Deligne»

FONCTIONS L ET HYPOTHÈSE DE RIEMANN GÉNÉRALISÉES

F. DÉGLISE

TABLE DES MATIÈRES

1. Fonctions L suivant E. Artin

Définition 1.1. Soit G un groupe fini.

Un G-schéma est un schéma muni d'une action à droite de G.

Pour tout point x de X, on définit alors le *groupe de décomposition de x* comme le stabilisateur de x sous l'action de G :

$$G_d(x) = \{g \in G \mid x.g = x\}.$$

Pour tout $g \in G_d(x)$, l'automorphisme $\delta_g : x \mapsto x.g$ induit par définition un automorphisme $\bar{\delta}_{g,x} : \kappa(x) \to \kappa(x)$. Le corps résiduel $\kappa(x)$ est ainsi muni d'une action à gauche de $G_d(x)$.

Définition 1.2. Sous les conditions de la définition précédente, on définit le *groupe d'inertie* d'un point x de X comme le sous-groupe de $G_d(x)$ formé des éléments qui agissent trivialement sur $\kappa(x)$:

$$G_i(x) = \left\{g \in G_d(x) \mid \bar{\delta}_{g,x} = 1_{\kappa(x)}\right\}.$$

Evidemment, $G_i(x)$ est un sous-groupe normal de $G_d(x)$ et on dispose d'une suite exacte courte de groupes :

$$0 \to G_i(x) \to G_d(x) \xrightarrow{\bar{\delta}_x} \mathrm{Aut}(\kappa(x)) \tag{1.2.1}$$

1.3. Soit A un anneau muni d'une action à gauche d'un groupe G – on dira simplement un G-anneau. On note A^G le sous-anneau de A formé des éléments invariants sous G. Rappelons les faits classiques suivants (*cf.* [Bou85, V, §2, th. 2]) :

Théorème 1.4. *Soit G un groupe fini.*

(i) *Tout G-anneau A est entier sur le sous-anneau A^G.*

Date: Octobre 2009.

(ii) *Pour tout G-corps K, l'extension de corps K/K^G est normale*[1] *et le morphisme canonique :*

$$G \to Gal\big(K/K^G\big)$$

est surjectif.

Définition 1.5. Soit X un G-schéma.

On dit que l'action de G sur X est *admissible* si tout point x de X admet un voisinage ouvert affine U fixe sous l'action de G : $U.G \subset U$.

1.6. Si l'action de G sur X est admissible, il existe un schéma X/G et un morphisme $\pi : X \to X/G$ tel que pour tout $(x, g) \in X \times G$, $\pi(x.g) = \pi(x)$ – autrement dit π est G-équivariant pour l'action triviale de G sur X/G. De plus $(X/G, \pi)$ est universel pour cette propriété.

Le morphisme $\pi : X \to X/G$ est alors affine. Pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de X fixe sous l'action de G, A est un G-anneau et le schéma $V = \mathrm{Spec}(A^G)$ est un ouvert de X/G tel que $\pi^{-1}(V) = U$.

On déduit du théorème précédent les faits suivants :

(i) Le morphisme $\pi : X \to X/G$ est entier.

(ii) Pour tout point x de X, $y = \pi(x)$, l'extension résiduelle $\kappa(x)/\kappa(y)$ est normale et la suite exacte (1.2.1) induit une suite exacte courte de groupes :

$$0 \to G_i(x) \longrightarrow G_d(x) \xrightarrow{\bar{\delta}_x} Gal(\kappa(x)/\kappa(y)) \to 0$$

1.7. Considérons maintenant un $\mathbb{F}_p$-schéma X_0 de type fini muni d'une action admissible d'un groupe fini G. On fixe de plus un corps Ω de caractéristique 0, un Ω-espace vectoriel de dimension finie V et une représentation

$$\rho : G \to GL_\Omega(V).$$

Notons tout d'abord que $Y_0 := X_0/G$ est un $\mathbb{F}_p$-schéma de type fini. De plus, le morphisme canonique $\pi : X_0 \to Y_0$ est fini.

Considérons un point fermé y de Y_0.

Choisissons un point x de X_0 tel que $y = \pi(x)$. Le corps résiduel $\kappa(x)$ (resp. $\kappa(y)$) est une extension finie de $\mathbb{F}_p$ et on note δ_x (resp. δ_y) son degré. Notons n l'entier naturel tel que $\delta_x = n.\delta_y$. Le groupe de Galois $Gal(\kappa(x)/\kappa(y))$ est cyclique d'ordre n avec pour générateur l'automorphisme :

$$f_x = F_{\kappa(x)}^{\delta_y}.$$

On définit alors un automorphisme de V par la formule suivante

$$\rho_y = \frac{1}{\sharp G_i(x)} . \sum_{g \in G_d(x), \bar{\delta}_x(g) = f_x} \rho(g).$$

On vérifie facilement que ρ_y est indépendant du choix de x. Suivant E. Artin, on introduit alors la définition suivante :

Définition 1.8 (Artin)**.** Avec les notations qui précèdent, on définit la fonction L de (X, ρ) par la formule suivante :

$$L(X, \rho) = \prod_{y \in |Y_0|} \frac{1}{\det\left(1 - \rho_y.t^{\delta_y}\right)},$$

y parcourant l'ensemble des points fermés de Y_0.

1. *i.e.* K le corps des racines d'un pôlynome à coefficients dans K^G.

On retrouve évidemment la fonction $Z(X_0, t)$ dans le cas $G = \{1\}$, $V = \Omega = \mathbb{Q}$. En general, le produit eulérien définissant cette fonction est convergent. On peut de plus écrire sa dérivée logarithmique comme une série formelle grâce au lemme suivant :

Lemme 1.9. *Soit ϕ un automorphisme d'un Ω-espace vectoriel de dimension finie V. Alors,*

$$t.\frac{d}{dt}\log\det(1-\phi.t)^{-1} = \sum_{n>0} \mathrm{tr}_V(\phi^n).t^n.$$

On en déduit ainsi la formule suivante :

$$t\frac{d}{dt}\log L(X,\rho,t) = \sum_{r>0} c_r(X,\rho).t^r.$$

où l'on a posé :

$$c_r(X,\rho) = \sum_{y\in Y_0(\mathbb{F}_{p^r}),\, r=n.\delta_y} \delta_y.\,\mathrm{tr}_V(\rho_y^n).$$

2. Faisceaux l-adiques

2.1. Considérons un $\mathbb{F}_p$-schéma X, l un premier différent de p.

On introduira dans la suite du groupe de travail les $\mathbb{Z}_l$-faisceaux (adiques) sur $X_{\text{ét}}$. Brièvement, il s'agit des systèmes projectif de faisceaux abéliens sur $X_{\text{ét}}$ de la forme $(\mathcal{F}_n)_{n>0}$ tels que pour tout $n>0$, le morphisme de transition $\mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_n$ est isomorphe au morphisme canonique $\mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_{n+1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$.

Ces faisceaux forment une catégorie abélienne de Grothendieck. La partie rationnelle de cette catégorie abélienne est appelée la catégorie des $\mathbb{Q}_l$-faisceaux sur $X_{\text{ét}}$.

On dira que $\mathcal{F}$ est constructible (resp. lisse) si pour tout $n>0$, $\mathcal{F}_n$ est constructible (resp. localement constant fini).

Définition 2.2. Soit X un $\bar{\mathbb{F}}_p$-schéma séparé de type fini, $f : X \to \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ son morphisme structural.

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Q}_l$-faisceau adique sur $X_{\text{ét}}$. On définit la cohomologie à supports compacts de X par la formule suivante :

$$H^n_c(X,\mathcal{F}) = \varprojlim_{n>0} H^n_c(X,\mathcal{F}_n)$$

où $H^n_c(X,\mathcal{F}_n) = \mathsf{R}^n f_!(\mathcal{F}_n)$.

Les mêmes remarques que pour la définition [Intro1, 1.2] s'appliquent ici. Les groupes $H^n_c(X,\mathcal{F})$ sont des $\mathbb{Q}_l$-espaces vectoriels de dimension finie, nuls si $n > 2\dim(X)$.

2.3. On définit de même les R-faisceaux adiques sur $X_{\text{ét}}$ pour une extension entière R de $\mathbb{Z}_l$. Plus précisément, R sera la normalisation de $\mathbb{Z}_l$ dans une extension fini E de $\mathbb{Q}_l$. La partie rationnelle de la catégorie obtenue sera la catégorie des E-faisceaux adiques sur $X_{\text{ét}}$.

En considérant une 2-limite, on obtiendra *in fine* la catégorie des $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux (adiques) sur $X_{\text{ét}}$.

La notion de cohomologie à support compact dans le cas d'un $\bar{\mathbb{F}}_p$-schéma séparé de type fini s'applique à nouveau à ces diverses notions de faisceaux adiques, avec les mêmes propriétés.

Exemple 2.4. Considérons les hypothèses du paragraphe 1.7 dans le cas $\Omega = \mathbb{C}$. Comme le groupe G est fini, la représentation $\rho : G \to GL_{\mathbb{C}}(V)$ se ramène à une représentation sur un corps de nombre E. Quitte à prendre une extension composée de E et $\mathbb{Q}_l$, on peut supposer que E est une extension finie de $\mathbb{Q}_l$.

Soit $W = \mathscr{V}^\vee$ le dual du E-espace vectoriel V, W_{X_0} le faisceau constant sur $X_{0\text{ét}}$ qui lui est associé. Alors, G opère à droite sur W_{X_0}. Le $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceau $\mathcal{F}_0$ des invariants de W_{X_0} sous G est alors constructible sur $Y_0 := X_0/G$.

2.5. Considérons un $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceau $\mathcal{F}$ sur un $\mathbb{F}_p$-schéma X. Soit $F : X \to X$ l'endomorphisme de Frobenius de X (Définition [Intro1, 2.2]).

D'après la Proposition [Intro1, 2.8], pour tout X-schéma étale V, il existe un isomorphisme canonique $F_{V/X} : V \to F^{-1}(V)$.

On en déduit un isomorphisme canonique :

$$\Gamma(V, F_*\mathcal{F}) = \mathcal{F}(F^{-1}(X)) \xrightarrow{F^*_{V/X}} \mathcal{F}(V).$$

On vérifie que cet isomorphisme est naturel en V, de sorte qu'il induit un isomorphisme de $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux sur X : $F_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$. L'isomorphisme réciproque induit par adjonction un morphisme canonique

$$F^* : F^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

qui est encore un isomorphisme – F étant un homéomorphisme universel, la paire de foncteurs adjoints (F^*, F_*) est une équivalence de catégories.

Définition 2.6. Le morphisme F^* de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$ défini ci-dessus est appelé la correspondance de Frobenius du faisceau $\mathcal{F}$.

2.7. On considère les hypothèses de la définition précédente, en supposant que X est un $\bar{\mathbb{F}}_p$-schéma séparé de type fini. Rappelons suivant le paragraphe [Intro1, 2.1] que l'on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p) \end{tikzcd}$$

où f est le morphisme structural de X et φ le Frobenius de $\mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$.

On obtient donc un isomorphisme dans la catégorie dérivée des $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux :

$$\mathsf{R}f_!(\mathcal{F}) \xrightarrow{(1)} \mathsf{R}f_!(F_*F^*(\mathcal{F})) \overset{(2)}{\simeq} \varphi_*\mathsf{R}f_!(F^*\mathcal{F}) \overset{(3)}{=} \mathsf{R}f_!(F^*\mathcal{F}).$$

La flèche (1) est obtenue par adjonction – c'est donc un isomorphisme du fait que F est un homéomorphisme universel. L'isomorphisme (2) résulte du fait que F et φ sont finis (pour un morphisme fini h, $h_* = \mathsf{R}h_* = \mathsf{R}h_!$). L'égalité (3) vient du fait trivial que $\varphi_* = 1$.

On en déduit donc une flèche canonique :

$$\mathsf{R}f_!(\mathcal{F}) \to \mathsf{R}f_!(F^*\mathcal{F}) \xrightarrow{F^*} \mathsf{R}f_!(\mathcal{F})$$

où la première flèche est la composée précédente et la deuxième est donnée par la correspondance de Frobenius défini précédemment.

On a ainsi obtenu un automorphisme de la cohomologie à support compact de $X/\bar{\mathbb{F}}_p$ à coefficients dans $\mathcal{F}$:

$$F^* : H^i_c(X, \mathcal{F}) \to H^i_c(X, F^*\mathcal{F}) \to H^i_c(X, \mathcal{F}) \tag{2.7.1}$$

D'après la description précédente, la première flèche est induite d'après la fonctorialité (contravariante) de la cohomologie à support compacte, relativement au morphisme F. La deuxième flèche est induite par la correspondance (faisceautique) de Frobenius de $\mathcal{F}$.

3. Fonctions L suivant Grothendieck

3.1. On fixe un $\mathbb{F}_p$-schéma X_0 séparé de type fini, et un $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X_0. On considère de plus le carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & X_0 \arrow[d, "f_0"] \\ \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \end{tikzcd}$$

et on pose $\mathcal{F} = \pi^*(\mathcal{F})$. On note F_0 (resp. F, φ) l'endomorphisme de Frobenius de X_0 (resp. X, $\bar{\mathbb{F}}_p$).

Considérons un point fermé x_0 de X_0. On pose $\delta(x_0) = [\kappa(x_0) : \mathbb{F}_p]$. Ainsi, $F_0^{\delta(x_0)}(x_0) = x_0$.

On considère $Z = \pi^{-1}(\{x_0\})$ la fibre de π au-dessus de x_0. Par définition, Z est stable sous l'action de F. De plus, si l'on choisi $x \in Z$, on obtient $Z = \{F^r.x \mid r \geq 0\}$. Considérons la correspondance de Frobenius F^* sur $\mathcal{F}$ – définition 2.6. Pour tout $y \in Z$, la fibre de F^* au point géométrique y est un morphisme de la forme :

$$\mathcal{F}_{F(y)} \to \mathcal{F}_y.$$

Appliquant la relation $F^{\delta(x_0)}(x) = x$, on obtient le composé suivant :

$$(F_x^*)^{\delta(x_0)} : \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{F^{\delta(x_0)}(x)} \longrightarrow \mathcal{F}_{F^{\delta(x_0)-1}(x)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{F(x)} \longrightarrow \mathcal{F}_x. \tag{3.1.1}$$

qui est un endomorphisme du $\bar{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{F}_x$.

Notons que si x' est un autre point de Z, on obtient un isomorphisme $\mathcal{F}_{x'} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F}_x$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{x'} \arrow[r, "(F_{x'}^*)^{\delta(x_0)}"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathcal{F}_{x'} \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathcal{F}_x \arrow[r, "(F_x^*)^{\delta(x_0)}"] & \mathcal{F}_x. \end{tikzcd}$$

Il en résulte que le polynôme de $\bar{\mathbb{Q}}_l[t]$ suivant :

$$\det\big(1 - (F_x^*)^{\delta(x_0)}, \mathcal{F}_x\big)$$

est indépendant du choix de x. Suivant Deligne, on posera simplement :

$$\det\big(1 - F_{x_0}^*.t, \mathcal{F}_0\big) = \det\big(1 - (F_x^*)^{\delta(x_0)}.t, \mathcal{F}_x\big). \tag{3.1.2}$$

Définition 3.2 (Grothendieck)**.** Avec les notations qui précèdent, on défini la fonction L associée à $(X_0, \mathcal{F}_0)$ comme la série formelle à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ suivante :

$$Z(X_0, \mathcal{F}_0, t) = \prod_{x_0 \in |X_0|} \frac{1}{\det\big(1 - F_{x_0}^*.t^{\delta(x_0)}, \mathcal{F}_0\big)}.$$

Exemple 3.3. Reprenons les notations du paragraphe 1.7 et de la définition qui le suit. On suppose que Ω est une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ – dans le cas classique, on prend $\Omega = \mathbb{C}$; la représentation finie ρ se redescent donc sur une corps de nombre E et on peut considérer la représentation induite sur un composé de E et $\mathbb{Q}_l$.

Soit $W = V^\vee$ le Ω-dual de V. On note W_{X_0} le faisceau constant sur X_0 de valeur W. On obtient donc une action à droite de G sur W_{X_0}. Le faisceau des invariants $\mathcal{F} = W_{X_0}^G$ est un faisceau constructible sur $Y_0 = X_0/G$ dont la fibre en un point géométrique y de Y_0 est l'espace vectoriel :

$$\mathcal{F}_{0,y} = \big(V^{G_i(x)}\big)^\vee$$

pour un point géométrique x de X_0 au-dessus de y, $G_i(x)$ son groupe d'inertie par rapport à l'action de G.

On déduit de cette description la formule suivante :

$$L(X_0, \rho) = Z(X_0, \mathcal{F}_0, t).$$

Exemple 3.4. Supposons avec les notations de la définition précédente que X_0 est géométriquement connexe et que $\mathcal{F}_0$ est localement constant constructible. Ce faisceau correspond donc à une $\bar{\mathbb{Q}}_l$-représentation

$$\rho : \pi_1(X_0, z) \to \mathcal{F}_z$$

où $\pi_1(X_0, z)$ désigne le groupe fondamental de X_0 en un point géométrique donné z.

Considérons un point fermé x_0 de X_0, et un point géométrique x au-dessus de x_0. On en déduit un morphisme de groupes fondamentaux :

$$\pi_1(x_0, x) \to \pi_1(X_0, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_0, z).$$

Bien sûr, $\pi_1(x_0, x) \simeq Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ pour $q = p^{\delta(x_0)}$; il admet donc pour générateur topologique l'endomorphisme de Frobenius $F_x : \lambda \mapsto \lambda^q$ qu'on appelle suivant Deligne le *Frobenius arithmétique* (de x).

Comme dans le paragrpahe précédent, on montre que le polynôme en t suivant

$$\det(1 - \rho(F_x^{-1}).t, \mathcal{F}_z)$$

ne dépend pas du choix de x ; on le note simplement $\det(1 - \rho(F_{x_0}^{-1}).t, \mathcal{F}_z)$

On peut alors définir une série en t :

$$L(X_0, \rho, t) = \prod_{x_0 \in |X_0|} \frac{1}{\det\left(1 - F_{x_0}^*.t^{\delta(x_0)}, \mathcal{F}_0\right)}.$$

On peut alors vérifier la formule suivante [2] :

$$Z(X_0, \mathcal{F}_0, t) = L(X_0, \rho, t).$$

Remark 3.5. Ces deux exemples montrent donc que les fonctions L de Grothendieck (bien que lui-même les note avec la lettre « Z » , *cf.* [Gro95]) sont une généralisation des fonctions L d'Artin sur les corps finis.

4. Formule des traces et interprétation cohomologique

La formule des traces de Grothendieck est la suivante :

Théorème 4.1 (Grothendieck). *Sous les hypothèses et notations du paragraphe 2.7, on a la formule suivante pour tout entier $n > 0$,*

$$\sum_{x \in X^{F^n}} \operatorname{tr}\left((F_x^*)^n, \mathcal{F}_x\right) = \sum_i (-1)^i. \operatorname{tr}\left((F^*)^n, H_c^i(X, \mathcal{F})\right).$$

On en déduit, suivant la même démonstration que pour le théorème [Intro1, 3.2], le résultat suivant :

Théorème 4.2 (Grothendieck). *Soit X_0 un $\mathbb{F}_p$-schéma séparé de type fini, $\mathcal{F}_0$ un $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceau sur X_0. On note X (resp. $\mathcal{F}$) l'extensien de X (resp. $\mathcal{F}_0$) à une cloture algébrique de $\mathbb{F}_p$.*

Pour tout entier $i \leq 2\dim(X_0)$, on défini un polynôme en t

$$P_i(t) = \det\left(1 - F^*.t, H_c^i(X, \mathcal{F})\right).$$

2. Le seul point où il faut faire attention réside dans le calcul de l'action de la correspondance de Frobenius (3.1.1). On trouve qu'elle agit par *l'inverse* du Frobenius arithmétique.

Alors, la relation suivante est vérifiée :

$$Z(X_0, \mathcal{F}_0) = \frac{P_1(t)P_3(t)\cdots}{P_0(t)P_2(t)\cdots}$$

C'est l'interprétation cohomologique des fonctions L de Grothendieck, qui prouve immédiatement la rationalité de ces fonctions.

5. L'hypothèse de Riemann généralisée

Pour formuler l'analogue de l'hypothèse de Riemann pour les fonctions L de Grothendieck on est conduit à introduire la notion de poids suivante :

Définition 5.1 (Deligne)**.** Soit X_0 une $\mathbb{F}_p$-schéma séparé de type fini, $\mathcal{F}_0$ un $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceau constructible sur X_0.

Pour un entier $n \in \mathbb{Z}$, on dit que $\mathcal{F}_0$ est *ponctuellement pur de poids* n si pour tout point fermé x_0 de X_0, les racines du polynôme $\det\big(1 - F_{x_0}^*.t, \mathcal{F}_0\big)$ défini en (3.1.2) sont des entiers algébriques de valeur absolue $p^{-\delta(x_0)n/2}$.

Suivant Deligne, on reformule cette dernière condition en disant que les valeurs propres de l'endomorphisme $F_{x_0}^*$ – qui n'est défini qu'à conjugaison près – sont des entiers algébriques de valeur absolue $p^{\delta(x_0)n/2}$.

Exemple 5.2. Le faisceau $\mathbb{Q}_l(r)$ est de poids $-2r$.

Références

[Bou85] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 5 à 7.* Masson, 1985.

[Gro95] Alexander Grothendieck. Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 9*, pages Exp. No. 279, 41–55. Soc. Math. France, Paris, 1995.

[Intro1] F. Déglise. L'hypothèse de Riemann d'après Deligne. `http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/gdt/Riemann/intro1.pdf`, 2010.