

TD d'algorithmique avancée

TD 3 : multiplications « diviser pour régner »

Jean-Michel Dischler et Frédéric Vivien

Multiplications « diviser pour régner »

1. Montrez comment multiplier deux polynômes linéaires $ax + b$ et $cx + d$ à l'aide de trois multiplications seulement. (*Indication* : l'une des multiplications est $(a + b)(c + d)$.)
2. Donnez deux algorithmes « diviser pour régner » permettant de multiplier deux polynômes de degré au plus n et s'exécutant en $\Theta(n^{\log_2 3})$.
 - (a) Le premier algorithme devra couper les coefficients du polynôme d'entrée en deux moitiés, l'une supérieure et l'autre inférieure.
 - (b) Le second algorithme devra séparer les coefficients du polynôme d'entrée selon la parité de leur indice.
3. Montrez que deux entiers à n bits peuvent être multipliés en $\Theta(n^{\log_2 3})$ étapes.

Calcul de $(\cos(nx), \sin(nx))$

Écrire un algorithme prenant en entrée un entier n et une paire de valeurs réelles qui sont en fait les valeurs du cosinus et du sinus d'un certain angle x , et renvoyant la paire $(\cos(nx), \sin(nx))$. Autrement dit, le deuxième argument de la fonction est une paire (a, b) telle que $a = \cos x$ et $b = \sin x$. Le schéma de calcul doit être récursif (mais non « diviser pour régner »).

On pourra se servir des formules de trigonométrie suivantes :

$$\begin{aligned}\cos(nx) &= \cos((n-1)x) \cos(x) - \sin((n-1)x) \sin(x) \\ \sin(nx) &= \sin((n-1)x) \cos(x) + \cos((n-1)x) \sin(x)\end{aligned}$$