Architecture des ordinateurs

Corrigé du TD 2 : Arithmétique des ordinateurs (suite)

Arnaud Giersch, Benoît Meister et Frédéric Vivien

1. Indiquer la valeur codée par la suite 1101100101110101 qui représente un entier signé en complément à 2 sur 16 bits.

   Correction : *C'est un nombre négatif. Complément à 2 : 0010011010001011 donc* -9867*.*

   Même question avec la suite 1001000011101101.

   Correction : *C'est un nombre négatif. Complément à 2 : 0110111100010011 donc* -28435*.*

2. Représentation binaire des entiers négatifs

   (a) Coder sur 4 bits les entiers 7, 2, 0, -2, -7 et -8 avec les représentations suivantes :

   – signe et valeur absolue ;

   Correction : *0111, 0010, 0000 ou 1000, 1010, 1111, n/a*

   – complément à 1 ;

   Correction : *0111, 0010, 0000 ou 1111, 1101, 1000, n/a*

   – complément à 2.

   Correction : *0111, 0010, 0000, 1110, 1001, 1000*

   (b) Coder les entiers 61 et -61 sur un octet en utilisant la représentation par le signe et la valeur absolue. Montrer que l'addition binaire de ces entiers ainsi codés produit un résultat incorrect. Montrer qu'en revanche le résultat est correct si ces entiers sont codés en utilisant la représentation par le complément à 2.

   Correction :

   Signe et valeur absolue :

$$\begin{array}{rrr} & 00111101 & (61) \\ + & 10111101 & (-61) \\ \hline & 11111010 & (-122) \end{array}$$

   Complément à deux :

$$\begin{array}{rrr} & 00111101 & (61) \\ + & 11000011 & (-61) \\ \hline & 00000000 & (0) \end{array}$$

3. Effectuer en binaire (8 bits) les opérations $1-2$, $51+127$, $-3-127$, $-127+127$, $-63-63$. Préciser, pour chaque opération, la retenue et le débordement.

   Correction : *On code les nombres négatifs en complément à 2.*
   Débordement :
   – *L'addition de deux nombres de signes différents ne produit jamais de débordement (la valeur absolue du résultat est toujours inférieure au maximum des valeurs absolues des deux opérandes).*

   – *L'addition de deux nombres de même signe produit un débordement si le signe du résultat est différent du signe des deux opérandes.*

$$\begin{array}{rrr} & 00000001 & (1) \\ + & 11111110 & (-2) \\ \hline & 11111111 & (-1) \end{array}$$

   retenue : 0, débordement : 0

$$\begin{array}{rrr} & 00110011 & (51) \\ + & 01111111 & (127) \\ \hline & 10110010 & (-78) \end{array}$$

   retenue : 0, débordement : 1

$$\begin{array}{rrr} & 11111101 & (-3) \\ + & 10000001 & (-127) \\ \hline & 01111110 & (126) \end{array}$$

   retenue : 1, débordement : 1

$$\begin{array}{rrr} & 10000001 & (-127) \\ + & 01111111 & (127) \\ \hline & 00000000 & (0) \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & 11000001 & (-63) \\ + & 11000001 & (-63) \\ \hline & 10000010 & (-126) \end{array}$$

retenue : 1, débordement : 0 *retenue : 1, débordement : 0*

4. Représentation des réels
   (a) En virgule fixe, décoder le nombre binaire 11.011 puis coder en binaire le réel 11.625.

   Correction :

   $$11.011_2 = \left[1\times 2^1 + 1\times 2^0 + 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3}\right]_{10} = [2+1+0.25+0.125]_{10} = 3.375_{10}$$
   $$11.625_{10} = [8+2+1+0.5+0.125]_{10} = \left[2^3+2^1+2^0+2^{-1}+2^{-3}\right]_{10} = 1011.101_2$$

   (b) En virgule flottante normalisée, coder en binaire au format simple précision le réel 12.575

   Correction :

   $$12.575_{10} = 1100.100\underline{1001}\ldots_2 = \left[0.1100100\underline{1001}\ldots\times 10^{100}\right]_2$$
   $$0|10000011|11001001001100110011001|$$

   puis effectuer le codage inverse.

   Correction : *bit de signe = 0 $\longrightarrow$ nombre positif.*
   exposant biaisé $= 10000011_2 = 131_{10} \longrightarrow$ *exposant :* $10000011 - 01111111 = 100_2 = 4_{10}$
   la mantisse est normalisée : 0.11001001001100110011001

   $$\begin{aligned}\left[0.11001001001100110011001\times 10^{100}\right]_2 &= 1100.1001001100110011001_2 \\ &= \Big[2^3+2^2+2^{-1}+2^{-4}+2^{-7}+2^{-8}+2^{-11} \\ &+2^{-12}+2^{-15}+2^{-16}+2^{-19}\Big]_1 0 \\ &= 12.57499885559082031 25_{10}\end{aligned}$$

5. Opérations en virgule flottante.
   Soit $a = \left[0.10010\times 10^{101}\right]_2$ et $b = \left[0.11010\times 10^1\right]_2$. Calculer $a+b$ et $a\times b$.

   Correction : *Avant de faire l'addition, il faut que les deux exposants soient égaux (*$a = 1001\times 10^1$, $b = 0.1101\times 10^1$*). Pour faire la multiplication, on multiplie les mantisses puis on additionne les exposants. Dans les deux cas, le résultat doit ensuite être normalisé.*

   $$\begin{array}{rr} & 1001.0000\times 10^1 \\ + & 0.1101\times 10^1 \\ \hline & 1001.1101\times 10^1 \\ = & 0.10011101\times 10^{101} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 0.1001\times 10^{101} \\ \times & 0.1101\times 10^1 \\ \hline & 1001 \\ & 1001 \\ + & 1001 \\ \hline & 0.01110101\times 10^{110} \\ = & 0.1110101\times 10^{101} \end{array}$$