La leçon de Polyhédronomie et Homotopie

Henri-Paul de Saint-Gervais

1er absolu 150, vulg. 8 Septembre 2022

Personnages

Le professeur
L'appariteur
Premier étudiant
Deuxième étudiant

Scène 1 : le plan.

Le professeur est à son bureau, il écrit quelques notes sur son cahier. Il se repeigne la barbichette. L'appariteur se tient derrière la porte. Un pupitre est disposé sur scène.

Le professeur : *(s'inclinant légèrement)* Mme La Vice-Curatrice du Collège de 'Pataphysique, M. le Vice-Rogateur du Collège de 'Pataphysique, chères provéditrices, chers provéditeurs, chères pataphysiciennes, chers pataphysiciens. M. l'appariteur, je suis prêt. Si vous voulez bien inviter les étudiantes et les étudiants à entrer...

L'appariteur ouvre la porte (imaginaire), les étudiants rentrent et s'installent.

L'appariteur : Entrez, veuillez vous installer, je vous prie.

Le professeur se prépare à commencer son cours. Il vérifie l'heure puis se lance.

Le professeur : Comme vous n'êtes probablement pas sans ignorer..., enfin comme vous ne savez probablement pas, j'ai récemment découvert au fin fond de la bibliothèque... Savez-vous seulement ce qu'est une bibliothèque ?

Bande de geeks.
J'ai récemment découvert, disais-je, une note inédite du grand Henri Poincaré concernant les invariants des polyèdres. Cette note fait suite à une intervention du célèbre professeur Achras. Elle semble même s'en être inspirée.

Alors, qu'en est-il donc de ces invariants de Poincaré ?

Commençons par un problème plus simple, si vous voulez bien, celui des polygones dans le plan.

Le professeur pointe un carré à côté d'un triangle videoprojeté sur l'écran, actionné par l'appariteur.

Le professeur : Prenons un tetragone et un trigone, ce qu'on va être obligé de nommer pour le vulgaire *(montrant les étudiants)* un carré et un triangle. Des polygones à quatre et trois côtés. On ne va certainement pas dessiner un CarlosGohn, qui a des millions de côté(s). Qui est capable de subdiviser le triangle, c'est-à-dire de le couper en morceaux à la règle et au cutter, puis recombiner ces morceaux afin de former le carré ?

Le premier étudiant, après quelques secondes seulement de réflexion, lève le doigt, et sur l'invitation du professeur, il se lève et décrit sa solution au tableau, puis retourne s'asseoir.

Le professeur : Bon... Vous avez bien compris le problème. Ça mérite un bon-poin.t.caré (carré !) *(le Professeur lui donne une image bon-point carré à l'effigie de Poincaré. L'étudiant la brandit fièrement)* Cependant, votre réponse me déconcerte un brin. Y parviendriez-vous dans le cas de figure suivant ?

Le professeur efface le tableau (vidéoprojection) et dessine deux carrés, l'un deux fois plus gros que l'autre. Les étudiants chuchotent entre eux, on entend distinctement le mot "trompé".

Deuxième étudiant : *(lève le doigt)* Les deux carrés n'ont pas la même surface ! M. le professeur, votre question n'est pas correcte.

Le professeur : *(légèrement énervé par le ton de l'élève)* Pas correcte, Pfuuu...Vous croyez me faire découvrir la notion de surface, peut-être ? ! La réponse à ma question est en effet négative, je le sais pardi ! Mais qu'en est-il en général si les deux polygones ont même surface ?

PREMIER ÉTUDIANT : *(sans lever le doigt)* C'est toujours possible M. le professeur, tout le monde le sait depuis Euclide !

L'APPARITEUR : *(en apparté)* Houuuu ! Ça y est, ils vont me l'énerver.

Scène 2 : l'espace.

LE PROFESSEUR : Alors comme ça, ce problème est trop trivial pour des esprits "éclairés... au gaz" comme les vôtres ? Faites des réserves pour l'hiver ! Eh bien voyons... Qu'en est-il dans l'espace, alors ? Prenez, par exemple, ces polyèdres. *(Il attend un peu. Les polyèdres se font attendre.)* Petits, petits, petits ! *(comme on appelle des volailles.)*

Apparaissent au tableau un cube et un tétraèdre côte à côte.

LE PROFESSEUR : Du haut de ce tétraèdre, 40 siècles d'histoire des mathématiques vous défient. Et moi, je vous mets au défi de subdiviser le premier pour reconstruire l'autre.

DEUXIÈME ÉTUDIANT : Mais non, s'ils n'ont pas le même volume !

LE PROFESSEUR : Fariboles ! Nous supposons bien évidemment que les deux polyèdres ont le même volume !

DEUXIÈME ÉTUDIANT : Dans ce cas, oui cela doit être possible.

LE PROFESSEUR : Alors, venez donc au tableau nous expliquer vos calembredaines !

Le deuxième étudiant se lève, puis reste perplexe quelques secondes devant le tableau.

LE PROFESSEUR : Pas si simple ! C'est raide, hein ! ? Les polyèdres, c'est poly-raide. Comme la justice. *(À lui-même)* Mouais... Poly, c'est grec tandis que raide, c'est latin, mais bon...

Et bien apprenez qu'il est impossible de réaliser la cubature du tétraèdre. Ils n'ont pas le même invariant de Dehn ! Un sacré petit malin ce Dehn, cet élève de Hilbert... Combiner longueurs et angles via un produit tensoriel ! !

Et résoudre ainsi le 3ème problème de Hilbert à peine celui-ci posé. Quel incroyable Dehn-oument !

Deuxième étudiant : Ah oui, l'invariant de Dehn... mais alors, ce n'est pas Poincaré qui l'a découvert !

Le professeur : Ah tiens ! Je vois qu'on fait "son cultivé" à présent ! Alors dites-moi donc. Pensez-vous qu'avoir même invariant de Dehn soit une condition suffisante pour pouvoir transformer un polyèdre en un autre ?

Premier étudiant : Mais n'est-ce pas exactement ce que dit le théorème de Sydler, publié en 1965... chez Springer... dans les Commentarii Mathematici Helvetici... volume 40... pages 43 à 80, sous le DOI 10.1007 BF02564364.

Le professeur encaisse la bonne réponse et rumine quelques secondes.

Scène 3 : la géométrie hyperbolique.

Le professeur : Certes... Ben oui évidemment le théorème de Sydler, publié en 1965, dans les Commentarii Mathematici Helvetici. Certes... Mais ça ne marche que dans l'espace euclidien. Eh bien vous, qui êtes si malin... Qu'avez-vous d'intelligent à dire dans le cas de la géométrie non euclidienne ?

L'appariteur : Professeur, vous savez que la géométrie hyperbolique vous mène au pire. *(L'appariteur se précipite pour éponger le front du Professeur)*

Les élèves chuchotent entre eux, incompréhension, on entend "géométrie non euclidienne".

Premier étudiant : Mais Professeur, l'espace est une représentation nécessaire a priori telle qu'elle donne aux intuitions extérieures les propriétés énoncées dans les Éléments d'Euclide, n'est-ce pas ?

Le professeur : Ah voilà, nous y sommes ! Comme disait mon professeur de réthorique "C'est quand on compte sur Kant qu'on n'a rien à conter".
On prétend comprendre Poincaré sans connaître la géométrie non euclidienne ! Poincaré nous a pourtant appris que la géométrie hyperbolique est la

géométrie de toutes les équations, de tous les phénomènes physiques... Tout y est beaucoup plus riche. Les polyèdres y sont beaucoup plus nombreux. Quand je pense aux cinq polyèdres réguliers de la géométrie euclidienne... *(attendri)* Ces petits amours, les polyèdres platoniciens. *(sévère)* Autant dire platoniques... Comment voulez-vous qu'ils fassent des petits ? !

La géométrie hyperbolique, ce n'est pourtant pas difficile à comprendre, bon sang de bois... Le plan hyperbolique, pour commencer, est délimité par un cercle à l'infini.

Apparait un cercle sur le tableau, puis d'autres figures suivant le développement du cours.

Le professeur : Par deux points passe une unique droite, l'arc de cercle orthogonal au cercle à l'infini. Tous les postulats d'Euclide sont satisfaits, excepté le cinquième ! Regardez, cette droite passe par ce point sans rencontrer la première : elle lui est parallèle. Mais, cette droite également. Toutes ces droites passent par ce point et sont parallèles à la première ! Ça en fait un paquet, n'est-ce-pas ?

Et les triangles y sont beaucoup plus intéressants : la somme des angles est largement inférieure à 180 degrés ! Et moins de degré, c'est mieux pour la planète !

Premier étudiant : M. le professeur, vous parlez de droites mais vous dessinez des cercles !

Le professeur : Des droites, des cercles, c'est pareil ! Appelez ça des gidouilles si vous voulez. Décidément, ils ne comprennent rien ! *(Les yeux et les bras au ciel)* Henri, Henri, viens à mon secours ! J'ai besoin de toi. La puissance de ton intuition, la justesse de ton expression, de ta terminologie, la force de tes images. Marre de ces barbares, ces profanateurs, ces malodorants !

Le professeur commence à manifester de sérieux signes d'énervements.

Deuxième étudiant : J'ai mal au dents.

Le professeur s'apprête à couper sa barbichette aux ciseaux. L'appariteur lui apporte la pâte à modeler, que le professeur va malaxer pour se calmer.

L'apparITEUR : *(aux étudiants)* Partez vite, il est pris de fièvre hyperbolique !
Les étudiants sortent discrètement.

Le professeur : Ces étudiants ! Qu'est-ce qu'ils sont plan-plan (euclidien). Pour visiter le monde avec Google Maps, là ils sont forts ! Mais quand il s'agit de nous suivre dans des univers à parallèles multiples... Alors là ! Plus personne. S'il fallait compter sur eux pour domestiquer les polyèdres hyperboliques...

Suis je le seul à comprendre Poincaré ? Sa dernière conjecture est tellement merveilleuse, tellement en avance sur son temps... Imaginez-donc, 70 ans avant Sydler. L'homologie des groupes rendus discrets. L'algèbre homologique n'en était encore qu'à ses... babillages. Il a déjà l'intuition que la bonne question est celle de la rigidité. Doit-il garder cela pour lui ? Dois-je garder cela pour moi ?

J'ai fait un rêve. J'ai fait le rêve d'un objet d'un type nouveau, non linéaire, où les textes de Poincaré seraient repris, où l'on expliquerait de manière modulaire comment ses découvertes sont enseignées de nos jours, avec de nombreux liens internes permettant de sauter allègrement d'un sujet à un autre, où le cinématographe viendrait offrir des animations, permettant d'illustrer les magnifiques constructions mouvantes qu'il a imaginées. Nous l'appellerions "Analysis Situs, le site".

Le professeur : *(vers le public)* Contrairement à ces cancres-là, vous, chères pataphysiciennes, chers pataphysiciens, vous êtes prêts pour l'invitation. Comme l'écrivait Poincaré "On n'entreprend pas un long voyage pour retrouver des spectacles tout pareils à ceux que l'on rencontre chez soi".

L'appariteur projette un polyèdre hyperbolique.

Et puisque la topologie est la science des objets mous, je vous demanderai, pour la prochaine séance, de bien vouloir me construire ce magnifique polyèdre hyperbolique en (apostrophe)Pata...modeler.

Rideau