Invent. math. 126, 297–318 (1996)

Inventiones mathematicae

Dynamique des systèmes d'isométries: Sur les bouts des orbites

Damien Gaboriau

ENS Lyon, Mathématique, F-69364 Lyon Cedex, France

Oblatum 15-VI-1994 & 27-II-1996

Un *système d'isométries* (de dimension un) est une réunion finie D d'intervalles compacts de $\mathbf{R}$, munie d'une famille finie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ d'isométries entre sous-intervalles fermés de D. Ces objets sont des systèmes dynamiques très riches malgré la grande simplicité de leur définition.

Ils apparaissent comme générateurs de l'holonomie pour les feuilletages transversalement mesurés singuliers de codimension 1 sur les variétés compactes: on se donne une famille de courbes transverses et on considère les applications d'holonomie le long des feuilles (voir par exemple [Hae1], [Hae2], [Mol], [Sal]). Lorsque la variété est une surface, les systèmes qui apparaissent sont des échanges d'intervalles; ils ont été largement étudiés (voir [Kea], [Vee], [Mas], [DN]) et donnent une idée de la fertilité de ces objets.

C'est essentiellement par des techniques introduites par E. Rips qu'ils ont fait leur entrée dans un autre domaine: celui des actions de groupes par isométries sur des arbres réels. Un *arbre réel* est un espace métrique où deux points quelconques sont toujours joints par un unique arc, lequel est, de plus, isométrique à un segment de $\mathbf{R}$. Une action d'un groupe de type fini sur un arbre réel définit un système d'isométries en considérant les restrictions des générateurs à des segments de l'arbre. C'est l'étude de ces systèmes, qui a permis à E. Rips de démontrer, en particulier, la conjecture de Morgan–Shalen: Les groupes de type fini qui agissent par isométries et librement sur un arbre réel sont des produits libres de groupes abéliens libres et de groupes de surfaces (voir [GLP1], [BF]). Inversement, partant d'un système d'isométries, on peut construire des actions de groupes sur des arbres réels (cf. [GL], [GLP2] et [LP]).

Lorsque les systèmes d'isométries sont étudiés pour eux-mêmes (voir [Lev2], [Lev3]), comme systèmes dynamiques, une notion essentielle est celle d'*orbite*. Deux points x et y de D sont dans la même orbite si et seulement s'il existe un mot m ès[1] $\varphi_i^{\pm 1}$, tel que l'isométrie associée soit définie en x et envoie x sur y.

De la même manière qu'un groupe équipé d'un système générateur, chaque orbite est l'ensemble des sommets d'un *graphe de Cayley*: il y a une arête d'appellation φ_i entre x et $\varphi_i(x)$. Comme dans le cas des groupes de type fini, c'est un espace métrique bien défini à quasi-isométrie près. En effet, si on remplace le système X par un système X' ayant les mêmes orbites, les graphes de Cayley restent quasi-isométriques [GLP2, Proposition 5.6]. Il est alors légitime de considérer, pour les orbites, des notions asymptotiques telles que *nombre de bouts* (voir par exemple [Sta]) ou *type de croissance* (voir par exemple [EMS]). Le principal objet de ce travail concerne le nombre de bouts des orbites des systèmes d'isométries. On démontre le théorème suivant:

Théorème 0.1. *Les orbites d'un système d'isométries ont un nombre fini de bouts. Ce nombre est au plus deux, sauf peut-être pour un nombre fini d'orbites.*

On dispose d'une décomposition canonique du système d'isométries (voir [AL, app.], [GLP1, Théorème 3.1], [MS2]) en un nombre fini de sous-systèmes élémentaires: ses *composantes*. Sur chacun d'eux, soit toute orbite est finie, soit toute orbite est dense (la composante est alors dite *minimale*). Les composantes minimales se répartissent en trois types [GLP1]:

- *homogènes*, les orbites sont la trace sur D de celles d'un groupe P d'isométries de $\mathbf{R}$,
- *échanges d'intervalles* au sens de [DN],
- les autres, dites *exotiques*, dont l'existence a été mise en évidence par G. Levitt [Lev2].

Elles engendrent des comportements dynamiques spécifiques. Par exemple, toutes les orbites d'un système homogène ont le même nombre de bouts, un ou deux bouts selon le groupe P. Les orbites des échanges d'intervalles minimaux ont (toutes sauf un nombre fini) deux bouts.

L'étude dynamique des systèmes d'isométries se ramène à celle de leurs composantes et finalement à celle des systèmes exotiques (Processus II.3 ou Théorème II.4), de sorte que le Théorème 0.1 est conséquence du Théorème 0.3 ci-dessous.

Dans la Sect. IV, on apporte pour les systèmes exotiques une réponse générique, au sens de Baire (Théorème IV.1):

Théorème 0.2. *La réunion des orbites à un bout d'un système exotique contient un G_δ dense.*

Pour étudier l'ensemble des orbites à au moins trois bouts d'un système exotique, on peut appliquer le résultat (bien plus général) de S. Adams [Ada], qui conclut que presque toute orbite de X a au plus deux bouts. F. Paulin redonne une preuve de ce résultat [Pau] qui simplifie les arguments de S. Adams

[1] en les (voir [Gab1, intro.]).

et utilise des mesures de probabilité sur le compactifié du graphe de Cayley du groupe libre.

Ici, on donne un résultat optimal (Théorème VI.1) et plus précis que dans le Théorème 0.1:

Théorème 0.3. *Le nombre de bouts des orbites d'un système exotique est borné et le nombre d'orbites à au moins trois bouts est fini.*

On donne des bornes explicites, ne dépendant que du nombre de générateurs et du nombre de composantes connexes de D.

Cependant, contrairement à la situation des autres systèmes minimaux, dont toutes les orbites, sauf peut-être un nombre fini, ont le même nombre de bouts, on a (Théorème V.1):

Théorème 0.4. *L'ensemble des orbites à deux bouts d'un système exotique est non dénombrable.*

Ces théorèmes entraînent des résultats analogues sur le nombre de bouts des feuilles des feuilletages mesurés singuliers de Codimension 1 sur les variétés compactes.

Question: quelle est la mesure de la réunion des orbites à deux bouts?

Question: Lorsque le système provient d'une action de groupe sur un arbre, comment interpréter les bouts des orbites du système en termes de l'action?

Une notion importante pour cette étude est celle de système à *générateurs indépendants* (Les graphes de Cayley des orbites sont presque tous des arbres). Si un système est sans composante minimale homogène, on peut obtenir un système à générateurs indépendants, ayant les mêmes orbites, sans augmenter le nombre de φ_i (voir [Lev1], [Rim] et voir [Gab1] pour un énoncé optimal).

De plus, on s'appuie de façon centrale sur un processus itéré d'*élagages* adapté de celui dû à E. Rips et déjà utilisé dans [GLP1], qui consiste à supprimer les arêtes terminales dans les graphes de Cayley.

L'étude du nombre de bouts des systèmes se ramène (Processus II.3) à celle des systèmes dits *idéaux* où le processus d'élagages est infini et les générateurs sont indépendants. On introduit pour ces systèmes un *ensemble limite* qui présente certaines similitudes avec l'ensemble limite des groupes kleiniens et dont le saturé est (à un ensemble fini d'orbites près) la réunion des orbites à deux bouts.

Plusieurs preuves reposent alors sur la:

Proposition V.2. *Si X est idéal alors son ensemble limite est un ensemble de Cantor.*

Etudier le type de croissance de l'orbite de x, c'est s'intéresser au comportement asymptotique de la suite $(|B(x,n)|)_n$, dont le n-ième terme est égal au nombre de points de l'orbite de x atteints à l'aide de mots de moins de n lettres.

Puisque les orbites des systèmes considérés sont contenues dans les orbites d'un groupe de type fini d'isométries de $\mathbf{R}$, elles ont une *croissance* *polynômiale* (i.e. $|B(x,n)|$ est majoré par un polynôme). On dit qu'une orbite a une *croissance linéaire* quand la suite est semblable à un polynôme de degré 1, c'est-à-dire quand $0 < \limsup_{n\to\infty} \frac{|B(x,n)|}{n} < \infty$.

Si X est un échange d'intervalles minimal, alors la croissance est linéaire. En revanche, dans le cas d'un système minimal homogène, la croissance est comparable (polynômiale de degré un de moins) à celle du groupe sous-jacent d'isométries de $\mathbf{R}$, donc non linéaire dès que le groupe est "assez gros".

Pour les systèmes exotiques, on relie croissance et nombre de bouts dans le résultat partiel suivant (Proposition VII.1):

Proposition 0.5. *Soit $X = (D, \Phi)$ un système exotique. S'il existe une orbite à croissance linéaire, alors il existe une mesure invariante pour laquelle la réunion des orbites à deux bouts est de mesure strictement positive.*

On utilise encore la notion d'élagages et la mesure invariante est obtenue par une construction de J.F. Plante [Pla].

Nous avons avec G. Levitt [Lev3, Proposition 8] généralisé ce théorème, avec le même argument d'élagages, au cas d'un compact métrique mesuré (D,μ), muni d'un ensemble fini d'homéomorphismes préservant la mesure Φ, à générateurs indépendants: dans ce cas, s'il existe une constante C telle que $|B(x,n)| \leqq Cn$, pour tout $n \geqq 1$ et μ-presque tout $x \in D$ alors μ-presque toute orbite a zéro ou deux bouts.

Sous les mêmes hypothèses, G. Levitt a obtenu une réciproque [Lev5, Proposition 3]: La réunion des orbites à deux bouts et à croissance non linéaire constitue un ensemble de mesure nulle.

Ces résultats sont extraits de ma thèse de doctorat, soutenue en juin 1993, préparée au Laboratoire de Topologie et Géométrie de Toulouse (URA CNRS 1408) sous la direction de Gilbert Levitt, que je remercie sincèrement pour sa disponibilité et sa patience. Je remercie également Frédéric Paulin pour ses conseils et ses relectures attentives.

1 Systèmes d'isométries, généralités

Un *multi-intervalle* D est la réunion d'un nombre fini d'intervalles compacts disjoints inclus dans $\mathbf{R}$; il est orienté. On notera $|I|$ la mesure de Lebesgue d'un multi-intervalle I. Un intervalle est dit *trivial* si sa mesure est nulle. Un multi-intervalle est trivial si l'une de ses composantes connexes est triviale.

Définition I.1: systèmes d'isométries. *Un système d'isométries $X = (D, \Phi)$ est la donnée d'un multi-intervalle D et d'une famille Φ constituée de k isométries $\varphi_i : A_i \to B_i$, $i = 1, \ldots, k$ où A_i et B_i sont des sous-intervalles fermés (éventuellement triviaux) inclus dans D.*

On supposera toujours D non trivial. Les isométries φ_i sont les *générateurs*, les intervalles A_i et B_i sont les *bases* de X. Un générateur φ_i est un *singleton* si A_i est réduit à un point. Si aucun générateur n'est un singleton, le système est *non dégénéré*.

Un *Φ-mot* est un mot $m = \varphi_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \varphi_{i_p}^{\varepsilon_p}$ ès lettres φ_i et φ_i^{-1}. Il fournit une isométrie notée aussi m, dont le domaine (éventuellement vide) est l'intervalle fermé maximal défini de façon évidente. On convient que le mot trivial l fournit l'isométrie identité qui est définie sur D tout entier.

Si le système est non dégénéré, on appelle $\mathring{\varphi}_i : \mathring{A}_i \to \mathring{B}_i$ la restriction de φ_i à l'intérieur de son domaine, $\mathring{\Phi}$ l'ensemble des $\mathring{\varphi}_i$ et $\mathring{X} = (D, \mathring{\Phi})$.

Un Φ-mot m donne une isométrie $\mathring{m}$; son domaine est l'intérieur du domaine de l'isométrie m.

Définition I.2: orbites. *Les orbites de X sont les classes de la relation d'équivalence sur D engendrée par $x \sim \varphi_i(x)$ pour tout $x \in A_i$.*

L'orbite de x, notée $X(x)$, est l'ensemble des points y de D pour lesquels il existe un Φ-mot m contenant x dans son domaine tel que $m(x) = y$. De manière analogue, on note $\mathring{X}(x)$ l'orbite de x pour $\mathring{\Phi}$.

Un *point singulier* du système est un point du bord de D ou du bord d'une base. Une orbite est *singulière* si elle contient un point singulier et *régulière* sinon.

Notons que chaque orbite est dénombrable et que les $\mathring{X}$-orbites sont contenues dans des X-orbites.

Définition I.3: graphes de Cayley. *Chaque orbite $X(x)$ du système $X = (D, \Phi)$ est l'ensemble des sommets d'un graphe appelé graphe de Cayley et noté $\Phi(x)$: il y a une arête orientée, d'appellation φ_i de y vers y' si $y \in A_i$ et $y' = \varphi_i(y)$. L'arête inverse d'une arête d'appellation φ_i porte l'appellation φ_i^{-1}. On note $\mathring{\Phi}(x)$ le graphe de Cayley de la $\mathring{X}$-orbite de x.*

On appelle *sommet terminal* un sommet de valence 1, et *arête terminale* une arête aboutissant à un sommet terminal.

Une arête de $\Phi(x)$ entre y et $\varphi_i(y)$ est dite *singulière* si $y \in \partial A_i$ et *régulière* sinon.

Si $X(x)$ est une orbite régulière alors $X(x) = \mathring{X}(x)$ et $\Phi(x) = \mathring{\Phi}(x)$.
Si $X(x)$ est une orbite singulière, alors l'orbite $\mathring{X}(x)$ est un sous-ensemble de l'orbite $X(x)$ et chaque composante connexe du graphe de Cayley $\Phi(x)$ privé des arêtes singulières devient le graphe de Cayley $\mathring{\Phi}(y)$ d'une orbite $\mathring{X}(y)$ de $\mathring{X}$. Le graphe de Cayley $\mathring{\Phi}(x)$ d'un point du bord de D est réduit à un point.

Un point x étant fixé, il existe une correspondance bijective naturelle entre les Φ-mots réduits m dont le domaine contient x, d'une part, et les chemins dans $\Phi(x)$ reliant x à un sommet, sans aller-retour, modulo reparamétrage, d'autre part. On remarque que les *lacets* sans aller-retour correspondent aux isométries qui fixent x.

Chacun de ces graphes est muni de sa *métrique de Cayley*; c'est la distance pour laquelle les arêtes sont isométriques au segment $[0, 1]$ et les distances entre sommets sont maximales pour cette condition. Puisque les sommets sont de valence finie, les boules fermées sont compactes.

Une *quasi-isométrie* entre des espaces métriques $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ est une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ pour laquelle il existe $\lambda, \mu, \delta > 0$ tels que

$$\forall x, y \in \mathscr{E},\ \frac{1}{\lambda}(d(x,y) - \mu) \leqq d(f(x), f(y)) \leqq \lambda d(x,y) + \mu \quad et$$

$$\forall x' \in \mathscr{E}',\ d(x', f(\mathscr{E})) \leqq \delta\,.$$

Si l'espace (σ-compact) métrique connexe $\mathscr{E}$ est réunion de la suite croissante de compacts $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on considère l'ensemble $\mathscr{S}$ des suites (x_n) de points de $\mathscr{E}$ telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, les points $x_n, \ldots, x_{n+k} \ldots$ appartiennent à la même composante connexe de $\mathscr{E}\backslash K_n$. Deux suites (x_n) et (y_n) de $\mathscr{S}$ sont équivalentes si et seulement si $\forall n \in \mathbf{N}$, les points x_{n+k} et y_{n+k} appartiennent à la même composante connexe de $\mathscr{E}\backslash K_n$. Un *bout* est une classe de cette relation d'équivalence (voir aussi [Sta]).

En général, le nombre de bouts n'est pas invariant par quasi-isométrie (par exemple une droite est quasi-isométrique à la réunion de deux droites parallèles et d'un segment les reliant).

Proposition I.4. *Pour des espaces de longueur* (*i.e. la distance entre deux points est la borne inférieure des longueurs des chemins les joignant*) *localement connexes dont les boules fermées sont compactes* (*par exemple pour des graphes de Cayley*), *le nombre de bouts est un invariant de quasi-isométrie* [Gab0].

Proposition I.5 [GLP2, Proposition 5.6]**.** *Si $X = (D, \Phi_1)$ et $X_2 = (D, \Phi_2)$ ont les mêmes orbites, alors pour tout $x \in D$, les graphes de Cayley $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$ sont quasi-isométriques.*

Cela légitime la définition suivante:

Définition I.6. *Soit $X = (D, \Phi)$ un système d'isométries et $x \in D$. On appelle nombre de bouts de l'orbite de x le nombre de bouts de son graphe de Cayley.*

Cette notion ne dépend que de l'ensemble des orbites et non du système de générateurs.

Définition I.7. *Soit $X = (D, \Phi)$ un système d'isométries et $D' \subset D$ un multi-intervalle. On appelle restriction de X à D' le système $X' = (D', \Phi')$ obtenu en remplaçant chaque $\varphi_i : A_i \to B_i$ par sa ou ses restrictions au multi-intervalle $(A_i \cap D') \cap \varphi_i^{-1}(D' \cap B_i)$.*

On appelle *groupe fondamental* ou π_1 d'une orbite, le groupe fondamental de son graphe de Cayley $\Phi(x)$. Ce groupe (défini à isomorphisme près tant qu'on n'a pas choisi de point base) dépend du système de générateurs.

2 Réduction du problème

Soit $X = X_0 = (D_0, \Phi_0)$ un système d'isométries. On décrit un procédé inspiré de celui dû à E. Rips [Rip], [GLP1].

L'ensemble $L(X_0)$ des points de D_0 qui appartiennent à au plus une base de Φ_0 est une réunion finie d'intervalles qui sont des ouverts relatifs de D_0.

Définition II.1. *Lorsque $L(X_0)$ est non vide, on dit que la restriction $X_1 = (D_1, \Phi_1)$ de X à $D_1 = D \backslash L(X_0)$ est obtenue par* **élagage** *à partir de (D_0, Φ_0) et on note $X_1 = Elag(X_0)$.*

Après qu'on ait effectué un élagage, il est possible que $L(X_1)$ soit non vide, on peut alors itérer le processus d'élagage. On obtient ainsi une suite finie ou infinie de systèmes $X_j = (D_j, \Phi_j) = Elag^j(X_0)$.

Définitions II.2.
Un système $X = (D, \Phi)$ est à générateurs indépendants si les graphes de Cayley $\mathring{\Phi}(x)$ sont tous des arbres.
Un système est minimal s'il est non dégénéré et si toutes ses orbites sont denses.
Un système minimal est pur si les seuls points à $\mathring{X}$-orbites finies sont les extrémités du multi-intervalle D.
Un système minimal, pur, à générateurs indépendants, pour lequel le processus d'élagages est infini, sera dit **idéal***.*
Un système qui a les mêmes orbites qu'un système idéal est exotique.

Les trois premières définitions reprennent celles de [GLP1].

Décrivons maintenant un processus qui permet de ramener l'étude d'un système d'isométries quelconque X à un système idéal.

Processus II.3.
1) On remplace X par un système non dégénéré, car supprimer les singletons revient à ôter un nombre fini d'arêtes, à un nombre fini de graphes de Cayley.
2) On remplace un système non dégénéré par un nombre fini de systèmes minimaux.
Pour un système $X = (D, \Phi)$ non dégénéré, on dispose d'une décomposition canonique en un nombre fini de sous-systèmes "élémentaires" (voir [GLP1, Théorème 3.1] pour une preuve dans ce cadre précis, voir aussi [Ima], [AL, app.], [MS2]). Précisément, il existe des multi-intervalles $D^1, D^2, \ldots, D^N$ en nombre fini, deux à deux d'intérieurs disjoints, dont la réunion est égale à D, tels que pour chaque générateur $\varphi_i : A_i \to B_i$ de X et pour chaque $j = 1, \ldots, N$ on a $\varphi_i(A_i \cap D^j) = D^j \cap B_i$ et tels que pour chaque restriction $X^j = (D^j, \Phi^j)$, soit toute orbite est finie, soit toute orbite est dense (la restriction est alors dite *minimale*).

Soit $x \in D$. Si $X(x)$ ne rencontre qu'un seul D^j (c'est clairement le cas si $X(x)$ rencontre D^j sans rencontrer son bord), alors le graphe de Cayley $\Phi(x)$ s'identifie naturellement avec $\Phi^j(x)$. Sinon $X(x)$ rencontre disons

$D^{j_1}, D^{j_2}, \ldots, D^{j_l}$, $l > 1$, et les graphes de Cayley $\Phi^{j_p}(x)$ s'identifient naturellement à des sous-graphes de $\Phi(x)$, dont les intersections deux à deux sont compactes et dont la réunion est égale à $\Phi(x)$. Il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de ce type.

Puisque les orbites finies n'ont pas de bout, l'étude se ramène à celle des restrictions minimales.

3) On se ramène à l'étude des systèmes minimaux non homogènes, puisque celle des systèmes homogènes ne présente pas difficulté.

On rappelle qu'un système minimal est homogène s'il existe un sous-groupe P de Isom($\mathbf{R}$), de type fini, à orbites denses qui vérifient pour tout x, y dans D, les points x et y sont dans la même $\mathring{X}$-orbite si et seulement s'ils sont dans la même P-orbite.

Puisqu'il est de type fini, le groupe P ou à défaut un de ses sous-groupes d'indice fini est isomorphe à $\mathbf{Z}^p$, $p \geqq 2$, et on peut vérifier que toutes les orbites sont quasi-isométriques à $\mathbf{Z}^{p-1}$ (voir par exemple [Pau, Proposition 1.7]). Elles ont donc un ou deux bouts selon que $p > 2$ ou $p = 2$.

4) On transforme X en un système à générateurs indépendants.

En effet, on dispose du théorème suivant qui optimise des résultats de G. Levitt [Lev1] ou F. Rimlinger [Rim].

Théorème [Gab1, Théorème VII.1]. *Si $X = (D, \Phi)$ est un système sans restriction minimale homogène, alors on peut obtenir un système $X' = (D, \Phi')$ à générateurs indépendants, ayant les mêmes orbites, en remplaçant chaque générateur φ_i par sa restriction à un certain sous-intervalle (éventuellement vide) de son domaine.*

5) On peut supposer que le processus d'élagages est infini.

On a montré dans [GLP1] qu'un système minimal, à générateurs indépendants, pour lequel les élagages s'arrêtent après un nombre fini d'étapes est un échange d'intervalles minimal (au sens de [DN], [GLP1]). Dans ce cas, toutes ses orbites ont deux bouts sauf un nombre fini d'entre elles qui ont alors un nombre fini de bouts.

6) On peut enfin rendre les systèmes purs.

Soit $x \in \mathring{D}$. On remplace d'abord chaque générateur $\varphi_i : A_i \to B_i$ dont le domaine A_j contient x dans son intérieur, par deux générateurs: ses deux restrictions aux adhérences de chaque composante connexe de $A_j \backslash \{x\}$. On fait ensuite de même pour chaque générateur dont le but B_j contient x dans son intérieur. On remplace l'intervalle de D qui contient x par deux intervalles fermés D_1 et D_2, isométriques aux adhérences des composantes connexes de $D \backslash \{x\}$, disjoints entre eux et disjoints des autres intervalles de D: on obtient un multi-intervalle D' et on remplace enfin chaque générateurs sur D par les générateurs sur D' définis naturellement.

Dans les graphes de Cayley, cela a pour effet de remplacer x par deux points x_1 et x_2, et ne modifie que les arêtes d'extrémité x.

Par minimalité, les $\mathring{\Phi}$-orbites finies contiennent un point singulier. Elles sont donc en nombre fini et leur réunion R est finie. Il suffit alors de découper D en tous les points de R qui sont intérieurs à D: précisément, l'opération ci-dessus appliquée successivement à chacun d'eux conduit à un système pur, dont les orbites sont en correspondance bijective avec celles de X, avec quasi-isométrie des graphes de Cayley.

On vérifie immédiatement que cette opération préserve les propriétés qu'ont assurées les étapes (1) à (5).

De plus (mais cela ne sera utilisé que dans la preuve du Théorème VI.1), on peut remarquer que si k est le nombre de générateurs et λ le nombre de composantes connexes de D, alors la différence $k-\lambda$ ne croît pas. En effet, le graphe de Cayley $\mathring{\Phi}(x)$ d'une $\mathring{\Phi}$-orbite finie possède a arêtes et s sommets. Par indépendance des générateurs, $s-a=1$. L'opération ci-dessus appliquée successivement en tous les points de l'orbite fait augmenter le nombre de générateurs de a et le nombre de composantes connexes de s.

L'ensemble de ce processus fournit la preuve du théorème suivant:

Théorème II.4. *Si le Théorème* 0.1 *est vrai pour les systèmes idéaux, alors il est vrai pour tout système d'isométries.*

3 Processus d'élagage de E. Rips et l'ensemble limite

A partir de maintenant, $X = X_0$ est un système idéal.

Notons quelques observations concernant le processus d'élagage:

Remarques III.1.

(1) *Soit $x \in D_1$, le graphe de Cayley $\Phi_1(x)$ est obtenu à partir de $\Phi_0(x)$ en effaçant toutes les arêtes terminales* (*d'où le nom d'élagage*); *les noms des arêtes changent. Si $x \in D_j$, alors le graphe de Cayley $\Phi_j(x)$ s'identifie naturellement à un sous-graphe connexe* (*sans appellations des arêtes*) *de $\Phi_0(x)$.*

(2) *Un point $x \in D_0$ appartient à $L(X_0)$ si et seulement s'il est un sommet terminal du graphe $\Phi_0(x)$. Les points de $X_0(x) \cap L(X_j)$ sont les sommets y du graphe $\Phi_0(x)$ pour lesquels $\Phi_0(x) \backslash \{y\}$ n'a qu'une seule composante connexe infinie et la borne supérieure des longueurs des chemins géodésiques* (*immergés non nécessairement plongés*) *issus de y dans l'adhérence des composantes connexes bornées de $\Phi_0(x) \backslash \{y\}$ est égale à j*; *en particulier, l'adhérence de ces composantes est simplement connexe.*

(3) *Un point $x \in D_0$ de valence $\geqq 2$ dans son graphe $\mathring{\Phi}_0(x)$ n'est pas adhérent à $L(X_0)$ donc appartient à $\mathring{D}_1$.*

(4) *La Φ_j-orbite d'un point de D_j est égale à l'intersection de sa Φ_0-orbite avec D_j.*

(5) *L'ensemble des points singuliers de X_j est inclus dans l'ensemble des images des points singuliers de X_0, par les mots d'au plus j lettres ès $\varphi_i^{\pm 1}$.*

Proposition III.2. *Si X_0 est idéal, alors $X_1 = Elag(X_0)$ l'est aussi.*

Preuve de la Proposition III.2.

- Montrons que D_1 est non trivial. Soit $x \in D_1$, isolé dans D_1 d'un côté où il ne l'était pas dans D_0, alors $x \in \overline{L(X)} \backslash L(X)$ et x appartient au bord d'une base. Par non dégénérescence, $x \in \mathring{D}_0$, donc (par pureté) x appartient à l'intérieur d'une base. Il existe donc un intervalle d'extrémité x contenu dans deux bases et x n'est pas isolé des deux côtés dans D_1.
- Montrons que X_1 est non dégénéré. Considérons $\varphi : A \to B$ un générateur de X_0, $x \in A \cap D_1 \cap \varphi^{-1}(D_1)$ et $y = \varphi(x)$. La composante connexe U_x (resp. U_y) de D_1 qui contient x (resp. y) est non triviale. Il s'agit de montrer que $A \cap U_x \cap \varphi^{-1}(U_y) \neq \{x\}$.

  Si $x \in \partial A$, alors $A \cap U_x$ est non trivial (par pureté de X_0 si $x \in \mathring{D}_0$, resp. non dégénérescence si $x \in \partial D_0$). Par symétrie, $B \cap U_y$ est non trivial et on conclut.

  Si $x \in \mathring{A}$ et si $x \in \mathring{U}_x$ ou $y \in \mathring{U}_y$, on a le résultat. Enfin la pureté de X_0 empêche qu'on ait à la fois $x \in \mathring{A}$, $x \in \partial U_x$ et $y \in \partial U_y$ (x et y seraient de valence 1 dans leur $\mathring{\Phi}$-graphe de Cayley, lequel serait alors réduit à une arête).
- Il est clair que X_1 est minimal, à générateurs indépendants et à élagages infinis.
- Montrons que X_1 est pur. Soit $x \in \mathring{D}_1$, alors $x \in \mathring{D}_0$. Par pureté et indépendance des générateurs de X_0, le graphe $\mathring{\Phi}_0(x)$ est un arbre infini mais localement fini. On peut donc y trouver (lemme de König) un plongement isométrique γ de $\mathbf{R}^+$ issu de x. Chaque sommet de γ est de valence 2 dans $\mathring{\Phi}_0(x)$ donc n'adhère pas à $L(X)$. Le plongement γ se retrouve dans $\mathring{\Phi}_1(x)$, donc $\mathring{X}_1(x)$ est infinie. □

Définition III.3. *On appelle ensemble limite, et on note D_∞, l'intersection décroissante*

$$D \Big\backslash \bigcup_{j=0}^{\infty} L(X_i) = \bigcap_{j=0}^{\infty} D_j$$

constituée de tous les points jamais élagués.

Si $x \in D_\infty$ alors on appelle $\Phi_\infty(x)$ le sous-graphe de $\Phi(x)$ qui a pour sommets les points qui appartiennent à D_∞ et pour arêtes (sans appellation) celles qu'on retrouve dans chaque $\Phi_j(x)$. La connexité de $\Phi_\infty(x)$ est immédiate.

Proposition III.4. *Si $x \in D_\infty$, le graphe $\Phi_\infty(x)$ est égal à la réunion des* **R** *immergés* (*images de* **R** *par une application localement injective*) *dans $\Phi_0(x)$. Le saturé de D_∞ est égal à la réunion des orbites à au moins deux bouts et des orbites à π_1 non trivial.*

Preuve de la Proposition III.4. Considérons une immersion γ de $\mathbf{R}$ dans $\Phi_0(x)$. La locale injectivité entraîne que chaque sommet de $\gamma(\mathbf{R})$ appartient à au moins deux bases de Φ_0, donc appartient à D_1. On identifie alors γ à une immersion de $\mathbf{R}$ dans $\Phi_1(x)$ et en itérant, dans chaque $\Phi_j(x)$ donc dans $\Phi_\infty(x)$.

Soit $y \in \Phi_\infty(x)$. S'il existe deux arêtes issues de y qui sont incluses dans des composantes connexes infinies de $\Phi(x)\setminus\{y\}$, alors (les valences des sommets étant finies) on trouve une immersion de $\mathbf{R}$ contenant y. Sinon, seule une arête issue de y se trouve dans une composante connexe infinie (on y plonge $\mathbf{R}^+$), et l'une des composantes finies contient un chemin géodésique de longueur arbitrairement grande (cf. III.1 (2)) donc un lacet non trivial. Il est alors facile de construire une immersion de $\mathbf{R}$ contenant y. Le reste s'en déduit. $\square$

4 Orbites à un bout: le cas générique

Dans ce paragraphe, on montre le théorème suivant:

Théorème IV.1. *La réunion des orbites à un bout d'un système exotique contient un G_δ dense.*

On suppose X idéal. Le théorème est alors une conséquence immédiate de la proposition suivante:

Proposition IV.2. *L'ensemble limite D_∞ d'un système idéal est un fermé non vide, d'intérieur vide de D; son saturé est donc un F_σ d'intérieur vide.*

Preuve du Théorème IV.1. Toute orbite à au moins deux bouts rencontre D_∞ (Proposition III.4). La réunion des orbites à un bout contient donc le complémentaire du saturé de D_∞, qui est un G_δ dense. $\square$

Avant la preuve de la proposition, une observation déjà faite par E. Rips:

Lemme IV.3. *Si H est un intervalle fermé non dégénéré inclus dans l'intérieur de D, alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall x \in D$, on peut trouver un Φ-mot m de longueur inférieure à N tel que $m(x) \in H$.*

Preuve du Lemme IV.3. Pour tout $x \in D$, il existe (pour la topologie intrinsèque de D) un voisinage $\mathscr{V}_x$ de x et un mot m_x contenant $\mathscr{V}_x$ dans son domaine et tel que $m_x(\mathscr{V}_x) \subset H$. On note $\lambda_x = |m_x|$ (où $|m_x|$ est le nombre de lettres du mot m_x). La famille $(\mathscr{V}_x)_{x\in D}$ constitue un recouvrement ouvert du compact D, dont on extrait un recouvrement fini $\mathscr{V}_{x_1}, \mathscr{V}_{x_2}, \ldots, \mathscr{V}_{x_p}$.

On prendra alors $N = \max\{\lambda_{x_1}, \lambda_{x_2}, \ldots, \lambda_{x_p}\}$. $\square$

Preuve de la Proposition IV.2. L'ensemble limite, intersection de compacts de D, est clairement fermé non vide.

Raisonnons par l'absurde pour montrer qu'il est d'intérieur vide. Supposons que H est un intervalle non trivial inclus dans D_∞ et considérons $N \in \mathbf{N}$ donné par le Lemme IV.3. Soit $x \in L(X_{N+1})$, alors $\Phi(x)\setminus\{x\}$ n'a qu'une composante connexe infinie. Les autres composantes connexes sont nécessairement des arbres, ont tous leurs sommets dans $\bigcup_{i=0}^N L(X_i)$ et l'une d'elles contient (dans son adhérence) un chemin géodésique γ de longueur $N+1$ qui relie x à un point y de $L(X_0)$. Tout chemin de y à un point de D_{N+1} passe par x, donc y

se trouve dans $\Phi(x)$ à distance $\geqq N+1$ de tout point de D_{N+1}. Cela contredit le lemme.

Pour tout mot m ès $\varphi_i^{\pm 1}$, $m(D_\infty)$ est un fermé d'interieur vide. Le saturé de D_∞ est la réunion (dénombrable) des $m(D_\infty)$. L'ensemble limite est donc un F_σ, d'intérieur vide par le théorème de Baire. □

5 Orbites à au moins deux bouts

Théorème V.1. *L'ensemble des orbites à au moins deux bouts d'un système exotique est non dénombrable.*

On suppose X idéal, alors ce théorème repose sur la proposition suivante:

Proposition V.2. *Si X est idéal alors l'ensemble limite D_∞ est un ensemble de Cantor.*

Preuve du Théorème V.1. Les générateurs étant indépendants, seules les orbites singulières peuvent avoir un groupe fondamental non trivial et donc à un nombre fini d'orbites près, D_∞ ne rencontre que des orbites à au moins deux bouts (Proposition III.4). Chaque orbite étant dénombrable et les ensembles de Cantor ne l'étant pas, la proposition entraîne le théorème. □

Preuve de la Proposition V.2. On sait déjà que D_∞ est un fermé non vide, d'intérieur vide. On aura en fait besoin de son infinitude pour prouver qu'il n'a pas de point isolé.

Lemme V.3. *L'ensemble limite D_∞ d'un système idéal est non vide, il est même infini.*

Preuve du Lemme V.3. Soit $x \in D_\infty$ et γ une immersion de $\mathbf{R}^+$, issue de x dans le graphe $\Phi_0(x)$. Les sommets de γ ne sont élagués à aucune étape. □

Avant de démontrer que D_∞ est sans point isolé, on le prouve dans le cas particulier où chaque point du bord de D appartient à au moins deux bases (Lemme V.5) auquel le cas général se ramène (Proposition V.4). Cela démontrera la Proposition V.2.

Proposition V.4: nouvelle réduction du problème. *Soit X un système idéal, alors il existe un système ideal $X' = (D', \Phi')$, avec $D' \subset D$, qui a le même ensemble limite et qui vérifie $(*) \partial D' \cap L(X') = \emptyset$.*

De plus, les orbites de X et de X' sont en correspondance bijective, avec quasi-isométrie des graphes de Cayley.

Preuve de la Proposition V.4. On décrit un algorithme "d'élagages au bord", où l'on supprime les points du bord de D couverts par une seule base. Cet algorithme préserve le caractère idéal de X ainsi que l'ensemble limite et il aboutit, en un nombre fini d'étapes, au X' cherché.

Elagages au bord ou ∂-élagages: Soit $L_\partial(X)$ la réunion des intervalles de $L(X)$ qui contiennent un point du bord de D. On note $D_1' = D \backslash L_\partial(X)$; c'est un multi-intervalle, inclus dans D et dont chaque composante connexe de D contient au plus un intervalle.

On appelle $X_1' = \mathrm{Elag}_\partial(X) = (D_1', \Phi_1')$ la restriction de X à D_1' et on dit que X_1' est obtenu par ∂-élagage. Notons que le nombre de générateurs de X_1' est majoré par celui de X. Si $x \in D_1'$, son Φ_1'-graphe de Cayley $\Phi_1'(x)$ est obtenu à partir de $\Phi(X)$ en effaçant certains sommets terminaux et les arêtes correspondantes. Si $L_\partial(X_1')$ n'est pas vide, on peut recommencer. On appelle $X_i' = \mathrm{Elag}_\partial^i(X)$ le système obtenu après i ∂-élagages.

La Proposition V.4 est une conséquence des propriétés suivantes:

(1) Le système X_1' est idéal et a le même ensemble limite que X.

(2) Les orbites de X et de X_1' sont en correspondance bijective, avec quasi-isométrie des graphes de Cayley.

(3) Après un nombre fini de ∂-élagages, le système obtenu X_p' vérifie l'hypothèse $(*)$.

(1) et (2) se vérifient facilement (même preuve que celle de la Proposition III.2).

Pour (3), on prouve en trois affirmations que le processus de ∂-élagage s'arrête après un nombre fini d'étapes. Soit $\overline{D}$ l'intersection (finie ou infinie) de tous les D_i', on montre:

Affirmation 1. *$\overline{D}$ contient un intervalle H non trivial.*

En effet. chaque intervalle de D contient au plus une composante connexe de D_1' alors, en itérant, il en contient au plus une de $\overline{D}$, qui a donc un nombre fini de composantes. On exclut le cas où $\overline{D}$ n'aurait qu'un nombre fini de points car il contient l'ensemble infini D_∞ (Lemma V.3). □

Pour $x \in D$, la *profondeur* de x pour Φ est l'élément de $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ défini de la manière suivante: si $x \in L(X_i)$, la *profondeur* de x est $i \in \mathbf{N}$; si $x \in D_\infty$ la *profondeur* de x est ∞. La profondeur d'un point est fixée une fois pour toute dans l'algorithme.

Affirmation 2. *Soit $N \in \mathbf{N}$ donné pour l'intervalle H par le Lemme* IV.3, *alors aucun point de profondeur $\geqq N$ n'est ∂-élagué.*

Preuve de l'Affirmation 2. En effet, soit x un point ∂-élagué à une étape M, alors $\Phi_0(x) \backslash \{x\}$ n'a qu'une composante connexe infinie. Les autres composantes connexes sont nécessairement des arbres et ont tous leurs sommets en dehors de H, puisqu'ils sont ∂-élagués avant l'étape M. Considérons un sommet terminal y d'une des composantes connexes finies et un chemin de longueur $\leqq N$ joignant y à un point de H. Ce chemin passant par x, la distance de Cayley de x à y est majorée par $N-1$ et la profondeur de x est $\leqq N-1$ (cf. III.1 (2)). □

Affirmation 3. *$\forall j < N$, il existe une étape p_j de ∂-élagage à partir de laquelle on ne ∂-élague plus aucun point de profondeur $\leqq j$.*

Preuve de l'Affirmation 3. On procède par récurrence sur j.

Si $x \in L(X_0)$ est ∂-élagué à une certaine étape alors toute sa composante connexe dans $L(X_0)$ est ∂-élaguée à cette même étape. $L(X_0)$ n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes, l'étape 0 de la récurrence s'en déduit, on trouve p_1.

Supposons le résultat vrai jusqu'à un certain j. Soit K l'ensemble des points de profondeur $j+1$, ∂-élagué après après le p_j-ième ∂-élagage. Si $K = \emptyset$, on pose $p_{j+1} = p_j$. Sinon, chaque point x de K appartient à $L(X_{p_j})$ (les sommets des composantes connexes finies de $\Phi_0(x)\backslash\{x\}$ sont de profondeur strictement inférieure à celle de x). On applique alors l'étape 0 de la récurrence pour conclure. □

Combiner les Affirmations 2 et 3 conduit à prouver la propriété (3) et achève la preuve de la Proposition V.4. □

Lemme V.5. *Si X_0 est idéal et vérifie la propriété $(*)$ $\partial D_0 \cap L(X_0) = \emptyset$, alors D_∞ est sans point isolé.*

Preuve du Lemme V.5. La démonstration se fait en trois temps.

Premier temps V.5.1. *Si X est idéal et vérifie la propriété $(*)$, alors il en est de même pour $X_j = Elag^j(X), \forall j \in \mathbf{N}$.*

En effet. Déjà, $X_1 = \mathrm{Elag}(X)$ est idéal (Proposition III.2). Soit $x \in L(X_1)$, montrons que x n'est pas un point du bord de D_1 (lequel est inclus dans la réunion du bord de D_0 avec l'adhérence de $L(X_0)$). Appelons α l'unique arête issue de x dans $\Phi_1(x)$ et $\tilde{\alpha}$ l'arête correspondante dans $\Phi_0(x)$. Puisque $x \notin L(X_0)$, il existe au moins une autre arête, disons $\tilde{\beta} = xz$ issue de x dans $\Phi_0(x)$. Puisque $x \in L(X_1)$, l'extrémité z est un sommet terminal de $\Phi_0(x)$. Par hypothèse $(*)$, le point z ne se trouve pas dans le bord de D donc, par pureté, sa $\mathring{X}$-orbite est infinie. On trouve donc une demi-droite plongée dans $\mathring{\Phi}(z)$, issue de z; elle passe nécessairement par x. On en déduit que:

- les graphes de Cayley $\mathring{\Phi}(x)$ et $\mathring{\Phi}(z)$ sont égaux donc $x \notin \partial D_0$,
- x est de valence au moins 2 dans $\mathring{\Phi}(x)$, donc n'adhère pas à $L(X_0)$. □

Deuxième temps V.5.2. *Le bord des intervalles élagués est contenu dans l'ensemble limite*: $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} \partial L(X_i) \subset D_\infty$

En effet. Si $L(X_{j-1})$ (qui est un ouvert relatif de D_{j-1}) contenait un point x de son bord, alors x appartiendrait au bord de D_{j-1}, ce qui est impossible par la propriété $(*)$. Ainsi, si $x \in \partial L(X_{j-1})$ alors $x \in \partial D_j$. De plus, par la propriété $(*)$, si $x \in \partial D_j$, alors $x \in \partial D_{j+1}$. En itérant et en passant à la limite, on obtient que

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} \partial L(X_j) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \partial D_j \subset D_\infty \,. \qquad \square$$

Troisième temps V.5.3. *Si un point x est isolé dans D_∞, il l'est dans un certain D_p.*

En effet. Soit x non isolé d'un côté (disons à droite) dans D mais isolé du même côté dans D_∞, alors il existe un intervalle $]x, x+\varepsilon[, \varepsilon > 0$, qui ne rencontre pas $\bigcup_{j\in\mathbf{N}} \partial L(X_j)$ mais est, tout de même, entièrement élagué: il est donc inclus dans un certain $L(X_q)$.

Ainsi un point isolé de D_∞ le serait déjà dans un certain D_p, ce qu'interdit la non dégénérescence des Φ_j. □

Cela termine la preuve du Lemme V.5. et donc de la Proposition V.2, d'après la Proposition V.4. □

6 Orbites à au moins trois bouts: finitude

On rappelle qu'à un système $X = (D, \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\})$ est associé un groupe, qu'on note $G(X)$ (dont on donne ci-dessous une présentation), invariant par élagages, qui dans le cas où X est idéal, est isomorphe à un groupe libre de type fini, disons à r générateurs F_r (voir [GLP1], [BF]). Si λ est le nombre de composantes connexes de D, k le nombre de générateurs de X et $n = k - \lambda + 1$, alors $n \geqq r$.

Une *réflexion* est un mot m pour lequel il existe $x \in D$ tel que $\forall \delta > 0$ petit, $m(x+\delta) = m(x-\delta)$.

Théorème VI.1. *Les orbites d'un système exotique ont toutes un nombre fini de bouts. Le nombre d'orbites à au moins trois bouts d'un système exotique X est fini, strictement inférieur à $2n-2$. Mieux encore, dans le cas sans réflexion, leur nombre est strictement inférieur à $2r-2$.*

Preuve du Théorème VI.1. Notons que rendre les générateurs indépendants (II.3.4), les rendre purs (II.3.6) ne fait pas croître le nombre n. De même lorsqu'on remplace X par X' dans la Proposition V.4 (en effet le nombre de générateurs ne croît pas et il est facile de voir qu'à chaque composante connexe de D, qui disparaît complètement lors d'un élagage au bord, correspond injectivement un générateur qui est supprimé). On peut donc supposer que le système est idéal et vérifie la propriété $(*)$ de la Proposition V.4.

On utilise essentiellement les deux formules combinatoires usuelles:
Si Γ est un graphe fini à s sommets et a arêtes, alors

$$a - s + 1 = \text{rang } \pi_1(\Gamma)\,. \tag{VI.2}$$

Si Γ est un graphe localement fini, à $\mathrm{b}(\Gamma)$ bouts, sans sommets terminaux alors

$$\sum_{x\in\Gamma} (\mathscr{V}_\Gamma(x) - 2) = 2 \text{ rang } \pi_1(\Gamma) + \mathrm{b}(\Gamma) - 2 \tag{VI.3}$$

où $\mathscr{V}_\Gamma(x)$ représente la valence de x dans Γ.

Au système $X_i = (D_i, \Phi_i)$ correspond un graphe Γ_i dont les sommets sont les composantes connexes de D_i et dont une arête relie l'intervalle contenant le domaine à celui contenant le but de chaque générateur. Le groupe fondamental de ce graphe est isomorphe à F_n. C'est clair pour Γ_0. Il suffit ensuite de remarquer que les élagages ne changent pas la différence $a - s$ dans (VI.2).

Pour $i \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, si $x \in D_i$, on note $u_i(x)$ la valence de x dans $\Phi_i(x)$. Si $x \in D_\infty$, alors $u_\infty(x) \geqq 2$ et la suite $(u_i(x))_{i \in \mathbf{N}}$ est décroissante, stationnaire et tend vers $u_\infty(x)$. De plus, $\forall i \in \mathbf{N}$, x appartient à au moins $u_\infty(x)$ bases de Φ_i et x appartient à une composante connexe D_i^0 de D_i qui est un sommet de valence $\geqq u_\infty(x)$ dans Γ_i.

Si $x_1, \ldots, x_p$ sont p points distincts de D_∞ tels que $u_\infty(x_i) \geqq 3$, on peut supposer, quitte à élaguer un certain nombre de fois, qu'ils appartiennent à des composantes connexes distinctes $D_i^1, \ldots, D_i^p$ de D_i (D_∞ est d'intérieur vide). En appliquant alors la formule (VI.3) dans Γ_i (qui n'a pas de sommets terminaux, car chaque X_i vérifie la propriété $(*)$ (V.5.1)), on obtient: $\sum_{j=1}^{p} (u_\infty(x_j) - 2) \leqq 2n - 2$.

Si toutes les bases incluses dans une composante connexe E de D_i ont un point commun, alors par $(*)$ cette composante ne rencontre pas $L(X_i)$; c'est par exemple le cas si E est un sommet de valence 2 de Γ_i. En cas d'égalité dans l'inégalité ci-dessus, chaque x_j appartient à toutes les bases de D_i^j et les sommets de Γ_i autres que $D_i^1, \ldots, D_i^p$ sont de valence 2, on en conclut que $L(X_i)$ est vide ce qui est absurde. Donc:

$$\text{(VI.4)} \qquad \sum_{x \in D_\infty} (u_\infty(x) - 2) < 2n - 2 .$$

La formule (VI.3) appliquée à $\Phi_\infty(x)$ permet d'écrire (puisque $\Phi_0(x)$ et $\Phi_\infty(x)$ ont le même nombre de bouts et des π_1 isomorphes):
$2 \text{ rang } \pi_1(\Phi_0(x)) + \mathrm{b}(\Phi_0(x)) - 2 = \sum_{y \in \Phi_\infty(x)} (u_\infty(y) - 2)$. En sommant sur les diverses orbites qui rencontrent D_∞ et en notant D_∞ / X leur ensemble, on obtient:

$$\text{(VI.5)} \qquad \sum_{\mathcal{O} \in D_\infty / X} (2 \text{ rang } \pi_1(\mathcal{O}) + \mathrm{b}(\mathcal{O}) - 2) < 2n - 2 ,$$

donc en particulier grâce à la Proposition III.4:

$$\text{(VI.6)} \qquad \sum_{\mathcal{O} \in D / X} \sup(\mathrm{b}(\mathcal{O}) - 2, 0) < 2n - 2 ,$$

où D/X désigne l'ensemble des orbites de X. Cela termine la preuve de la première assertion du théorème.

Un raffinement de [GLP1] permet de montrer que $n - r = \sum_{\mathcal{O} \in D/X} \text{rang } \pi_1(\mathcal{O})$.

En effet, on sait que $G(X) \simeq G(X_j)$ pour tout $j \in N$ et que $G(X_j)$ admet la présentation suivante [GLP1]:
– comme générateurs, on prend les générateurs de X_j.

Les relations sont de deux types:
-1- un arbre maximal quelconque étant choisi dans le graphe Γ_j, chacune de ses arêtes (associée à un générateur φ de Φ_j) fournit la relation φ,
-2- chaque isométrie avec un point fixe (i.e. chaque lacet dans un graphe de Cayley) fournit une relation de même nom que l'isométrie (l'indépendance des générateurs entraîne qu'il n'y a qu'un nombre fini de lacets simples).

Notons que si l'on ne considère que les relations du premier type, le groupe obtenu est isomorphe au groupe fondamental $\pi_1(\Gamma_j)$, groupe libre de rang n quel que soit j.

Considérons les plus petits sous-graphes $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_\rho$ qui engendrent le π_1 des graphes de Cayley des orbites singulières de X_0. Ils fournissent les relations du deuxième type et se retrouvent dans les graphes de Cayley correspondants pour $X_l, \forall l \in \mathbf{N}$. On peut prendre l suffisamment grand pour que leurs sommets appartiennent à des composantes connexes deux à deux distinctes de D_l et pour que toutes leurs arêtes portent des appellations deux à deux distinctes. Cette condition entraîne qu'ils se plongent alors dans Γ_l en des sous-graphes deux à deux disjoints. Du coup, on peut choisir l'arbre maximal (relations du premier type) de sorte que les plongements des Θ_j engendrent dans $\pi_1(\Gamma_l)$ un facteur libre. Le groupe libre $\pi_1(\Gamma_l)$ quotienté par le facteur libre sera bien un groupe libre de rang égal à $n - \sum_{\mathcal{O} \in D_l/X_l} \operatorname{rang} \pi_1(\mathcal{O}) = n - \sum_{\mathcal{O} \in D/X} \operatorname{rang} \pi_1(\mathcal{O})$.

On en déduit alors:

$$\text{(VI.7)} \qquad \sum_{\mathcal{O} \in D_\infty/X} (\mathrm{b}(\mathcal{O}) - 2) < 2r - 2 \,,$$

Et donc dans le cas où les orbites à π_1 non trivial ont au moins deux bouts:

$$\text{(VI.8)} \qquad \sum_{\mathcal{O} \in D/X} \sup(\mathrm{b}(\mathcal{O}) - 2, 0) < 2r - 2 \,.$$

C'est ce qui arrive en particulier si Φ n'a pas de réflexions (Lemme VI.9 ci-dessous). □

Lemme VI.9. *Dans le cas idéal, sans réflexion, les orbites à* π_1 *non trivial ont au moins deux bouts.*

Preuve du Lemme VI.9. Soit $\Phi(x)$ le graphe de Cayley d'une orbite à un bout et π_1 non trivial du système idéal X, on montre que X admet une réflexion. Chaque composante connexe du complexe Θ obtenu en ôtant du graphe $\Phi(x)$ ses arêtes singulières est le graphe de Cayley d'une $\mathring{X}$-orbite. Appelons Θ^0 l'unique composante connexe infinie de Θ. Soient $\Theta^1, \Theta^2, \ldots, \Theta^\rho$ ses composantes finies. Puisque le système est pur, leurs sommets sont des points du bord de D. Pour cette raison, un chemin γ (localement injectif et aboutissant à un sommet) dans $\Phi(x)$ qui ne rencontre pas Θ^0 donne un mot $m = \varphi_{i_l}^{\varepsilon_l} \ldots \varphi_{i_1}^{\varepsilon_i}$ défini sur un intervalle non trivial (le système est non dégénéré). Si γ est, de plus, un lacet, alors m fixe un intervalle non trivial. L'indépendance des générateurs entraîne alors que tout lacet γ non trivial (1) rencontre Θ^0 et (2) n'y est pas entièrement inclus. Soit $x \in \Theta^0$ un point où γ quitte Θ^0, soit γ' un sous-chemin de γ ne rencontrant Θ^0 qu'en ses extrémités $x = \gamma'(0)$, $\gamma'(1)$ et soit γ'' un chemin dans Θ^0 de $\gamma'(1)$ à x. Le mot lu suivant γ' est défini sur un intervalle non trivial d'extrémité x, celui lu en suivant γ'' est défini sur un intervalle non trivial contenant $\gamma'(1)$ dans son intérieur. Le lacet $\gamma' \cdot \gamma''$ fournit donc un mot fixant x, défini sur un intervalle non trivial, donc une réflexion. □

7 Croissance et nombre de bouts

Soit $X = (D, \Phi)$ un système, x un point d'une orbite régulière et $B(x, n)$ la boule de centre x, de rayon n dans le graphe de Cayley de x. On note $|B(x, n)|$ le nombre de sommets de $B(x, n)$ et on s'intéresse à la limite supérieure de la suite $\frac{|B(x,n)|}{n}$. Elle ne dépend pas du choix de x dans son orbite.

On dit qu'une orbite a une *croissance polynômiale* quand $|B(x, n)|$ est majoré par un polynôme et une *croissance linéaire* quand $0 < \limsup_{n\to\infty} \frac{|B(x,n)|}{n} < \infty$. Cette notion est invariante par quasi-isométrie.

Si X est un échange d'intervalles minimal, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{|B(x,n)|}{n} = 2$. Si l'échange d'intervalles n'est obtenu qu'après un certain nombre d'élagages, il demeure que la croissance est linéaire. En revanche, dans le cas d'un système minimal homogène, les orbites étant quasi-isométriques à $\mathbf{Z}^{p-1}$, on a lim sup $\frac{\log |B(x,n)|}{\log n} = p - 1$, et donc lim sup $\frac{|B(x,n)|}{n}$ est infinie sitôt que $p \geqq 2$.

Pour les systèmes exotiques, on démontre la proposition suivante:

Proposition VII.1. *Soit $X = (D, \Phi)$ un système exotique. S'il existe une orbite à croissance linéaire, alors il existe une mesure invariante pour laquelle la réunion des orbites à deux bouts est de mesure strictement positive.*

On ne connait malheureusement pas d'exemples qui vérifient cette hypothèse.

Question. *Existe-t'il des systèmes exotiques possédant des orbites à croissance linéaire*?

La croissance des graphes étant un invariant de quasi-isométrie, on peut supposer X idéal.

Dans [Pla], J.F. Plante décrit, sous une hypothèse de croissance sous-exponentielle, une construction de mesure invariante pour un pseudogroupe de type fini d'homéomorphismes locaux (à *domaines ouverts*), sur un espace de Hausdorff compact. Appliqué ici, ce résultat fournit une mesure μ qui est $\mathring{\Phi}$-invariante. Pour démontrer la Proposition VII.1, on doit revenir sur la manière dont cette mesure apparaît et on a besoin pour le deuxième paragraphe de la preuve du Lemme VII.2 de montrer qu'elle est sans atome.

Rappel [Pla, Proof of Théorème 3.2]: On choisit un point x de D. Pour $i = 1, \dots, k$ et $n \in \mathbf{N}$, on pose:

$$W_n^i = \{ y \in B(x,n), \text{ t.q. } (y \in A_i \text{ et } \varphi_i(y) \notin B(x,n)) \text{ ou}$$
$$(y \in B_i \text{ et } \varphi_i^{-1}(y) \notin B(x,n))\} \, .$$

La croissance étant polynômiale, on peut trouver une suite croissante $(n_p)_p$ telle que l'égalité $\lim_{p\to\infty}$ Card $W_{n_p}^i/$Card $B(x, n_p) = 0$ soit valable pour tout $i = 1, \dots, n$. On considère alors la suite $(\mu_{n_p})_p$ extraite de la suite $(\mu_n)_n$, $\mu_n = \frac{1}{|B(x,n)|} \cdot \sum_{y \in B(x,n)} \delta_y$ (μ_n est la moyenne des masses de Dirac placées aux points de D qui appartiennent à l'orbite de x, dont la distance de Cayley à x est inférieure ou égale à n). La compacité (pour la topologie faible) de l'espace des mesures de probabilité sur D permet d'extraire de la suite $(\mu_{n_p})_p$ une suite $(\mu_{n_j})_j$ qui converge vers une mesure μ de probabilité. Par choix de $(n_p)_p$, la mesure μ est invariante pour $\mathring{\Phi}$. La question de la Φ-invariance de μ n'est pas immédiate car la convergence faible ne fournit la relation $\mu_{n_j}(f) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mu(f)$ que pour les fonctions f continues. Or, si f est une fonction continue dont le support est contenu dans A, la fonction qui vaut $f \circ \varphi^{-1}$ sur B et 0 ailleurs n'est pas forcément continue, si bien qu'on ne sait pas évaluer $\mu(f \circ \varphi^{-1})$. Notons cependant qu'il suffit de montrer que μ est sans atome, ce qu'on fait dans le lemme qui suit. Fin du rappel.

Lemme VII.2. *La mesure* μ *n'a pas d'atomes.*

Preuve du Lemme VII.2. Par pureté de Φ et $\mathring{\Phi}$-invariance de μ, la mesure μ ne possède pas d'atome dans $\mathring{D}$. Soit $y \in \partial D$. Par minimalité, il existe un générateur $\varphi : A \to B$ de Φ qui contient y dans (le bord de l') une de ses bases. Supposons pour fixer les idées que $y \in A$. On va montrer que pour $\mu(y) \leqq \mu(\varphi(y))$. Cela suffit car si $\varphi(y)$ est encore un point de ∂D, on recommence jusqu'à atteindre un point $z \in \mathring{D}$. La majoration $\mu(y) \leqq \mu(z)$ montre alors que y n'est pas un atome.

On se donne une suite $(g_r)_{r \in \mathbf{N}}$ de fonctions continues sur D telles que:

- $0 \leqq g_r \leqq 1$
- La suite g_r converge simplement vers la fonction caractéristique (ou fonction de Dirac) χ_y de $\{y\}$ (on a alors, par convergence dominée, $\mu(y) = \lim_{r\to\infty} \mu(g_r)$)
- $\mathrm{Supp}(g_r) \subset A$.

On se donne aussi une suite de fonctions continues (f_r) telles que (que $z := \varphi(y)$ soit un point intérieur à D ou non):

- $0 \leqq f_r \leqq 1$
- $f_r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \chi_z$
- f_r prolonge continûment $g_r \circ \varphi^{-1}$ sur D.

Pour tout $j, r \in \mathbf{N}$, on a $\mu_{n_j}(f_r) \geqq \mu_{n_j}(g_r \circ \varphi^{-1})$. D'autre part:

$$\begin{aligned}
&|\mu_{n_j}(g_r \circ \varphi^{-1}) - \mu_{n_j}(g_r)| \\
&\quad = \frac{1}{|B(x, n_j)|} \times \left| \sum_{\substack{v \in B(x, n_j) \\ v \in B}} g_r \circ \varphi^{-1}(v) - \sum_{\substack{u \in B(x, n_j) \\ u \in A}} g_r(u) \right| \\
&\quad = \frac{1}{|B(x, n_j)|} \times \left| \sum_{\substack{v \in B(x, n_j) \\ v \in B \\ \varphi^{-1}(v) \notin B(x, n_j)}} g_r \circ \varphi^{-1}(v) - \sum_{\substack{u \in B(x, n_j) \\ u \in A \\ \varphi(u) \notin B(x, n_j)}} g_r(u) \right| \\
&\quad \leqq \frac{\mathrm{Card}\ W^i_{n_j}}{|B(x, n_j)|} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0 \,.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a: $\mu(f_r) = \lim_{j \to \infty} \mu_{n_j}(f_r) \geqq \lim_{j \to \infty} \mu_{n_j}(g_r \circ \varphi^{-1}) = \lim_{j \to \infty} \mu_{n_j} (g_r) = \mu(g_r)$. D'où en faisant tendre r vers l'infini, $\mu(z) \geqq \mu(y)$. □

Preuve de la Proposition VII.1. Notons $A = \mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} L(X_i)) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(L(X_i))$. Soit $\varepsilon > 0$ et $l \in \mathbf{N}$ tel que $A \geqq \mu(\bigcup_{i=0}^{l} L(X_i)) \geqq A - \varepsilon$.

On utilise ensuite ce résultat bien connu de la théorie de la mesure: une suite μ_i de mesures de probabilité sur un compact de $\mathbf{R}$ qui converge faiblement vers une mesure μ NON ATOMIQUE, converge sur les fonctions caractéristiques des intervalles. On a alors:

$$\lim_{j \to \infty} \mu^x_{n_j} \left(\bigcup_{i=0}^{l} L(X_i) \right) = \mu \left(\bigcup_{i=0}^{l} L(X_i) \right) \,.$$

En particulier, il existe $j_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall j \geqq j_0$, on ait:

$$\mu \left(\bigcup_{i=0}^{l} L_i \right) - \varepsilon \leqq \mu^x_{n_j} \left(\bigcup_{i=0}^{l} L_i \right) \leqq \mu \left(\bigcup_{i=0}^{l} L_i \right) + \varepsilon \,.$$

Alors, $\forall j \geqq j_0$,

$$A - 2\varepsilon \leqq \frac{\mathrm{Card}(B(x, n_j) \cap \bigcup_{i=0}^{l} L_i)}{|B(x, n_j)|} \leqq A + \varepsilon \,.$$

En suivant un chemin infini sans aller-retour issu de x dans $\Phi(x)$, au plus les l premiers sommets appartiennent à $\bigcup_{i=0}^{l} L_i$. Cela donne la minoration suivante:

$$|B(x, n_j)| \geqq \left| B(x, n_j) \cap \bigcup_{i=0}^{l} L_i \right| + n_j - l \,.$$

D'où $|B(x, n_j)| \times (1 - A + 2\varepsilon) \geqq n_j - l$.

Cette inégalité étant valable pour tout j, puis pour tout ε, on en conclut:

$$(1 - A) \cdot \limsup_{n \to \infty} \frac{|B(x,n)|}{n} \geqq 1 .$$

Ainsi, si $\limsup \frac{|B(x,n)|}{n}$ est finie, alors A est différent de 1, donc D_∞ est de mesure non nulle pour μ, de même que la réunion des orbites à deux bouts. □

References

[Ada] S. Adams: Trees and amenable equivalence relations. Erg. Th. Dyn. Syst. **10** (1990) 1–14

[AL] P. Arnoux, G. Levitt: Sur l'unique ergodicité des 1-formes fermées singulières. Invent. Math. **84** (1986) 141–156

[BF] M. Bestvina, M. Feighn: Stable actions of groups on real trees. Invent. Math. **121** (1995) 287–321

[DN] C. Danthony, A. Nogueira: Measured foliations on nonorientable surfaces. Ann. Sci. Eco. Nor. Sup. **23** (1990) 469–494

[EMS] A.N. Parshin, I.R. Shafarevich Eds: Algebra VII, Encyclopedia of Mathematical Sciences **58** (1993), Springer, Berlin, 208

[Gab0] D. Gaboriau: Dynamique des systèmes d'isométries et actions de groupes sur les arbres réels. Thèse de l'université de Toulouse III (1993)

[Gab1] D. Gaboriau: Générateurs indépendants pour les systèmes d'isométries de dimension un. A paraître Ann. Inst. Fourier

[GL] D. Gaboriau, G. Levitt: The rank of actions on **R**-trees. Annales de l'Ens **28** (1995) 549–570

[GLP1] D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin: Pseudogroups of isometries of **R** and Rips' theorem on free actions on **R**-trees. Israel J. Math. **87** (1994) 403–428

[GLP2] D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin: Pseudogroups of isometries of **R** and reconstruction of free actions on **R**-trees. Erg. Th. Dyn. Syst. **15** (1994) 1–20

[GS] H. Gillet, P.B. Shalen: Dendrology of groups in low **Q**-ranks. J. Diff. Geom. **32** (1990) 605–712

[Hae1] A. Haefliger: Pseudogroups of local isometries dans "Proc. V$^{\text{th}}$ Coll. in Differential Geometry". ed. L.A. Cordero, Research Notes in Math. **131** (Pitman 1985) 174–197

[Hae2] A. Haefliger: Leaf closures in Riemannian foliations dans. A fete of topology, papers dedicated to I. Tamura, Academic Press, New York (1988) 3–32

[Ima] H. Imanishi: On codimension one foliations defined by closed one forms with singularities. J. Math. Kyoto Univ. **19** (1979) 285–291

[Kea] M. Keane: Interval exchange transformations. Math. Z. **141** (1975) 25–31

[Lev1] G. Levitt: Groupe fondamental de l'espace des feuilles dans les feuilletages sans holonomie. J. Differ. Geom **31** (1990) 711–761

[Lev2] G. Levitt: La dynamique des pseudogroupes de rotations. Invent. Math. **113** (1993) 633–670

[Lev3] G. Levitt: On the cost of generating an equivalence relation. Ergodic Theory **15** (1995) 1173–1181

[LP] G. Levitt, F. Paulin: Geometric group actions on trees (prépublication, Univ. Toulouse) (Sep. 1994) ((Sep. 1994))

[Mas] H. Masur: Interval exchange transformations and measured foliations. Ann. Math. **115** (1982) 169–200

[Mol] P. Molino: Riemannian foliations. Progress in Math. **73** (1988), Birkhäuser, Basel Boston

[MS1] J.W. Morgan, P.B. Shalen: Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I. Ann. Math. **122** (1985) 398–476

[MS2] J.W. Morgan, P.B. Shalen: Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures II, III. Ann. Math. **126** (1988) 403–519
[Pau] F. Paulin: A dynamical system approach to free actions on **R**-trees: a survey with complements. "Geometric Topology", C. Gordon, Y. Moriah, B. Wajnryb eds, Haifa 1992, **164** (1994), Contemp. Math, Amer. Math. Soc. 187–217
[Pla] J.F. Plante: Measure preserving pseudogroups and a theorem of Sacksteder. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **25** (1975) 237–249
[Rim] F. Rimlinger: **R**-trees and normalization of pseudogroups (prépublication Fairfield Univ.)
[Sal] E. Salem: Riemannian foliations and pseudogroups of isometries. Appendix D dans "Riemannian foliations", P. Molino, Progress in Math. **73** (1988), Birkhäuser, Basel Boston
[Sta] J. Stallings: Group theory and three dimensional manifolds. New Haven and London, Yale University Press (1971)
[Vee] W.A. Veech: Interval exchange transformations. J. Anal. Math. **33** (1978) 222–272