Rubriques : Systèmes dynamiques (22), Théorie des groupes (6)

SUR LA (CO-)HOMOLOGIE L^2 DES ACTIONS PRÉSERVANT UNE MESURE

Titre anglais : **On L^2-(Co-)Homology of measure-preserving actions**

Damien Gaboriau

Ecole normale supérieure de Lyon, UMPA, CNRS-UMR 5669
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 07
E-mail : gaboriau@umpa.ens-lyon.fr

Résumé : On montre que les nombres de Betti l^2 des groupes dénombrables discrets sont des invariants d'équivalence orbitale. Cela fournit de nouveaux résultats de rigidité. On obtient une généralisation d'un résultat de W. Lück et des applications à l'arborabilité des groupes.

Abstract: We show that l^2-Betti numbers for countable discrete groups are orbit equivalence invariants. This gives new rigidity results. We obtain a generalisation of a result by W. Lück and applications to treeability of groups.

Let Γ be a countable discrete group. Its l^2-Betti numbers $l^2b_i(\Gamma)$ are defined as the von Neumann dimensions of certain Hilbert representations of Γ related to its simplicial actions on simplicial complexes (see [2] for further references and definitions).

Consider now a measure-preserving action of Γ on a standard Borel space. It defines a standard equivalence relation R_Γ: *to be in the same orbit*. Two such actions (of possibly different groups) are said to be *orbit equivalent* if there exists a Borel isomorphism between the spaces which intertwins the measures and sends (almost) every class onto a class. See [4] for generalities on standard equivalence relations.

We connect these notions in the following:

Theorem 1. *If two countable discrete groups Γ and Λ admit orbit equivalent and probability-preserving free actions then they have the same l^2-Betti numbers.*

Thus the Euler characteristics, when defined, is an invariant of orbit equivalence. In fact, if the actions are only *stably orbit equivalent* (see [5] for a definition), then the groups have proportional l^2-Betti numbers: there exists a constant $h_{\Gamma,\Lambda}$ such that $l^2b_i(\Gamma) = h_{\Gamma,\Lambda}\ l^2b_i(\Lambda)$.

This gives new rigidity results (in the probability-preserving context). For instance the direct products of free groups: $F_{p_1} \times F_{p_2} \times \cdots \times F_{p_\ell}$, $p_j \geq 2$, admit no stably orbit equivalent actions for different ℓ's. And no orbit equivalent actions for different $\prod_{j=1}^{\ell}(p_j - 1)$'s.

In this note, I sketch a proof of theorem 1 in the particular case where the groups also admit a free simplicial action on a simplicial complex with finitely many orbits in each dimension. The complete proofs will appear in [6], together with the following complements.

Let R be a probability-preserving standard equivalence relation. In [6], one puts (measurably on each orbit) a simplicial complex structure on R and define, using the von Neumann algebra of R [4] and ideas similar to that of [2], the L^2-Betti numbers for the structure. I then prove that, restricting to structures for which the simplicial complex associated to each orbit is contractible, these numbers are invariants of the relation: they are called the L^2-Betti numbers $L^2b_i(R)$ of the relation. When $R = R_\Gamma$ is given by a free action of Γ, one has $L^2b_i(R) = l^2b_i(\Gamma)$. A graphing induces

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX a 1-dimensional simplicial complex structure on R. The invariant of R related to graphings, namely the cost, introduced in [8] and studied in [5], satisfies: $1 - l^2b_0(\Gamma) + l^2b_1(\Gamma) \leq \mathcal{C}(\Gamma)$, with equality if Γ admits a treeable free action (and no example of strict inequality). Theorem 1 thus implies some of the results of [5].

It is not hard to show that, under the hypothesis of the next corollary, Γ has cost 1. So one gets:

Corollary. *If Γ admits an infinite, infinite index, finitely generated normal subgroup Λ, then $l^2b_1(\Gamma) = 0$.*

This corollary generalises a result asked for by M. Gromov ([7, $8A_4$]) and proved by W. Lück [9]: here, there is no assumption about the torsion of Γ/Λ.

For a non amenable group Γ, the following conditions are known to be equivalent [1]:

(1) $l^2b_1(\Gamma) = 0$,
(2) the only harmonic functions with finite Dirichlet sum on Γ are the constants,
(3) the first cohomology group $H^1(\Gamma, \lambda_\Gamma)$ with coefficients in the left regular representation of Γ vanishes.

Corollary. *Conditions (1) (2) (3) are invariant under orbit equivalence. If they are satisfied for Γ, then Γ is non treeable in the sense that the space of spanning trees on Γ has no Γ-invariant probability measure (and anti-treeable in the sense of [5]).*

This answers a question by Yuval Peres.

Version française

Soit (X, μ) un espace borélien standard, muni d'une mesure de probabilité sans atome. Soient Γ et Λ deux groupes dénombrables discrets. On renvoie à [4] *resp.* [2] pour les définitions et des références plus complètes sur les relations d'équivalence mesurées standards et les nombres de Betti l^2.

Théorème. *Si Γ et Λ admettent des actions libres (ergodiques) préservant la mesure et orbitalement équivalentes sur (X, μ), alors ils ont les mêmes nombres de Betti l^2.*

On esquisse une preuve de ce théorème dans le cas particulier où les groupes admettent aussi des actions libres sur des complexes simpliciaux **contractiles** n'ayant qu'un nombre fini d'orbites dans chaque dimension. On suppose les actions ergodiques pour simplifier certaines notations. On oubliera de mentionner les ensembles μ-négligeables chaque fois que possible.

Un groupe, une relation.

Soit R la relation d'équivalence engendrée par une action libre ergodique (notée $\cdot$) de Γ, préservant la mesure sur (X, μ). Notons $\cdot_2$ l'action $(id \times \cdot)$ de Γ sur la deuxième coordonnée de $R \subset X \times X$.

Soit K un complexe simplicial contractile n'ayant qu'un nombre fini d'orbites dans chaque dimension. Appelons K_i l'ensemble des simplexes de dimension i de K et choisissons une famille Θ_i de représentants ordonnés des Γ-orbites de K_i. Par hypothèse, Θ_i est fini.

L'espace $X \times K$, avec l'action diagonale (notée $\cdot_\Delta$) de Γ fournit un exemple de *structure de complexe simplicial sur la relation R* (voir [6]). On a des identifications Γ-équivariantes de $(X \times \Gamma.k, \cdot_\Delta)$ avec $(R, \cdot_2)$ via $(x, \gamma.k) \mapsto (\gamma^{-1}.x, x)$.

On note $l^2C_i(K)$ l'espace des i-chaînes l^2 de K et l'*opérateur bord* (borné) ∂_i commute avec l'action de l'algèbre de von Neumann $W^*(\Gamma)$ de Γ. La famille $(\gamma.k)_{(k\in\Theta_i, \gamma\in\Gamma)}$ (où $k \in \Theta_i$ est vu comme une chaîne) constitue une base orthonormée de $l^2C_i(K)$ qui permet d'écrire :

$$l^2C_i(K) = \oplus_{k\in\Theta_i} l^2(\Gamma.k) \simeq \oplus_{k\in\Theta_i} l^2(\Gamma).$$

On considère le champ d'espaces de Hilbert $x \to l^2C_i(\{x\} \times K) \simeq l^2C_i(K)$; le champ μ-mesurable de bases orthonormales $(x \to (x, k))_{k\in K_i}$ lui donne sa structure mesurable. Notons $\overline{k}$ le champ de vecteurs $(x \to (x,k))$. On renvoie à [3, chap. II] pour ce qui concerne les champs. On dispose aussi du champ mesurable d'*opérateurs bord* $\partial_i^x : l^2C_i(\{x\}\times K) \to l^2C_{i+1}(\{x\}\times K)$. On définit $L^2C_i(X\times K)$ et D_i comme intégrales :

$$L^2C_i(X\times K) := \int^{\oplus} l^2C_i(\{x\}\times K)d\mu(x) \quad \text{et} \quad D_i := \int^{\oplus} \partial_i^x d\mu(x).$$

On définit les opérateurs M_γ et M_ϕ de $L^2C_i(X\times K)$: pour $c = \sum_{k\in K_i} a_{(x,k)}\overline{k} \in L^2C_i(X\times K)$, $M_\gamma(c) := \sum_{k\in K_i} a_{(\gamma^{-1}.x,\gamma^{-1}k)}\overline{k}$, correspondant à l'action diagonale $\cdot_\Delta$ de $\gamma\in\Gamma$; et pour $\phi \in L^\infty(X,\mu)$, $M_\phi(c) := \sum_{k\in K_i}\phi(x)a_{(x,k)}\overline{k}$. L'algèbre de von Neumann M de la relation R [4], engendrée par $\{M_\gamma, M_\phi\}$, est un facteur (R est ergodique) de type II_1 (R préserve la mesure) qui opère sur les $L^2C_i(X\times K)$ et son action commute à D_i. On dispose donc d'un complexe de M-modules hilbertiens :

$$0 \leftarrow L^2C_0(X\times K) \xleftarrow{D_1} L^2C_1(X\times K) \xleftarrow{D_2} \cdots \xleftarrow{D_i} L^2C_i(X\times K) \xleftarrow{D_{i+1}} \cdots$$

Observons que l'identification, pour $k\in\Theta_i$ de $(X\times\Gamma.k, \cdot_\Delta)$ avec $(R,\cdot_2)$ via $(x,\gamma.k)\mapsto(\gamma^{-1}.x,x)$ induit un isomorphisme de M-modules :

$$(A) \qquad L^2C_i(X\times K) = \oplus_{k\in\Theta_i} L^2C_i(X\times\Gamma.k) \simeq \oplus_{k\in\Theta_i} L^2(R,\nu)$$

où ν est la mesure naturelle ($\mu\times$comptage) sur R [4].

Le *i-ème nombre de Betti l^2 de l'action* (K,Γ) est défini comme la Γ-dimension (pour la trace standard) du i-ème groupe d'homologie l^2 réduite $l^2H_i(K,\Gamma) = \mathrm{Ker}\ \partial_i/\overline{\mathrm{Im}\ \partial_{i+1}}$ qui est isomorphe comme Γ-module au supplémentaire orthogonal $\mathcal{H}_i(K) = \mathrm{Ker}\ \partial_i \ominus \overline{\mathrm{Im}\ \partial_{i+1}}$, où $\overline{A}$ désigne l'adhérence de A. On l'obtient par la formule :

$$l^2b_i(K,\Gamma) := \dim_\Gamma\ \mathcal{H}_i(K) = \sum_{k\in\Theta_i}\langle p_ik|k\rangle,$$

où p_i est le projecteur orthogonal de $l^2C_i(K)$ sur $\mathcal{H}_i(K)$. Puisque K est supposé i-connexe, le *i-ème nombre de Betti* l^2 de Γ est $l^2b_i(\Gamma) := l^2b_i(K,\Gamma)$.

De manière analogue, on appelle *i-ème nombre de Betti L^2 de la structure $X\times K$ sur R*, la M-dimension de von Neumann du i-ème groupe d'homologie L^2 réduite $L^2H_i(X\times K) = \mathrm{Ker}\ D_i/\overline{\mathrm{Im}\ D_{i+1}}$ qui est isomorphe comme M-module au supplémentaire orthogonal $\mathcal{H}_i(X\times K) = \mathrm{Ker}\ D_i\ominus\overline{\mathrm{Im}\ D_{i+1}}$. La M-dimension de l'espace image d'un projecteur P de $L^2(R,\nu)$ qui commute avec M est donnée par le produit scalaire $\langle P\varphi_0|\varphi_0\rangle$, où φ_0 est la fonction caractéristique de la diagonale de $X\times X$, alors l'isomorphisme (A) permet de calculer :

$$L^2b_i(X\times K,R) := \dim_M\ \mathcal{H}_i(X\times K) = \sum_{k\in\Theta_i}\langle P_i\overline{k}|\overline{k}\rangle$$

où P_i est le projecteur orthogonal de $L^2C_i(X\times K)$ sur $\mathcal{H}_i(X\times K)$, qu'on évalue sur les *champs de représentants* $\overline{k}$ pour $k\in\Theta_i$.

Par définition de D_i, pour $c_i\in L^2C_i(X\times K)$, on a $c_{i+1} = D_ic_i \Leftrightarrow c_{i+1}(x) = \partial_i^x c_i(x)$ pour μ-presque tout x. On en déduit que P_i est un opérateur décomposable $P_i = \int^\oplus p_i^x d\mu(x)$ où $x\to p_i^x$ est le champ mesurable d'opérateurs correspondant à p_i via l'isomorphisme $l^2C_i(\{x\}\times K)\simeq l^2C_i(K)$, *i.e.* $P_i\overline{k}(x) = p_i^xk$ pour μ-presque tout x et donc $\langle P_i\overline{k}|\overline{k}\rangle = \int\langle p_i^x\overline{k}(x)|\overline{k}(x)\rangle d\mu(x) = \int\langle p_ik|k\rangle d\mu(x)$. D'où :

$$L^2b_i(X\times K,R) = l^2b_i(K,\Gamma) = l^2b_i(\Gamma).$$

Deux groupes Γ et Λ, une relation.

Supposons maintenant que Λ a une action libre sur (X,μ) qui donne les mêmes orbites que l'action de Γ. Considérons les cocycles correspondants $\kappa : X\times\Gamma\to\Lambda$ et $\upsilon : X\times\Lambda\to\Gamma$. Les relations de cocycle sont de la forme : $\kappa(x,\gamma'\gamma)=\kappa(\gamma.x,\gamma')\kappa(x,\gamma)$.

Supposons de plus que Λ agit sur un complexe simplicial contractile L, n'ayant qu'un nombre fini d'orbites dans chaque dimension. On a alors sur (X,μ) deux familles de champs mesurables d'espaces de Hilbert : $L^2C_i(X\times K)$ et $L^2C_i(X\times L)$. On appelle $\Theta_i(K)$ et $\Theta_i(L)$ un ensemble de représentants ordonnés dans chaque orbite de i-simplexes (pour les actions respectives). Les actions étant orbitalement équivalentes, les algèbres de von Neumann engendrées par $\{M_\gamma, M_\phi\}$ et $\{M_\lambda, M_\phi\}$ sont isomorphes. Notons que pour $\gamma\in\Gamma$ et $c_L=\sum_{l\in K_i(L)} a_{(x,l)}\bar{l}\in L^2C_i(X\times L)$, on a : $M_\gamma(c_L)=\sum_{l\in K_i(L)} a_{(\kappa(x,\gamma^{-1}).x,\kappa(x,\gamma^{-1}).l)}\bar{l}$.

On peut supposer que K et L ont le même nombre d'orbites de sommets. Une bijection quelconque $\rho:\Theta_0(K)\to\Theta_0(L)$ permet de définir une bijection $(x,k)\mapsto(x,\rho(k))$ (pour $x\in X$ et $k\in\Theta_0(K)$) entre les *sommets* des complexes $X\times K$ et $X\times L$.

Rêvons un peu. On aimerait en déduire des champs d'applications linéaires continues t_i^x, s_i^x, r_i^x, essentiellement bornés, commutant avec M, décrits par le diagramme suivant :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longleftarrow & l^2C_0(\{x\}\times K) & \underset{\partial_1^x}{\overset{r_0^x}{\rightleftarrows}} & \cdots & \underset{\partial_i^x}{\overset{r_{i-1}^x}{\rightleftarrows}} & l^2C_i(\{x\}\times K) & \underset{\partial_{i+1}^x}{\overset{r_i^x}{\rightleftarrows}} & l^2C_{i+1}(\{x\}\times K) & \cdots \\
 & & t_0^x \downarrow \simeq \uparrow s_0^x & & & & t_i^x \downarrow\ \uparrow s_i^x & & t_{i+1}^x \downarrow\ \uparrow s_{i+1}^x & \cdots \\
0 & \longleftarrow & l^2C_0(\{x\}\times L) & \underset{\partial_1^x}{\longleftarrow} & \cdots & \underset{\partial_i^x}{\longleftarrow} & l^2C_i(\{x\}\times L) & \underset{\partial_{i+1}^x}{\longleftarrow} & l^2C_{i+1}(\{x\}\times L) & \cdots
\end{array}
$$

tels que

$$(B)\qquad t_{i-1}^x\partial_i^x=\partial_i^x t_i^x \qquad s_{i-1}^x\partial_i^x=\partial_i^x s_i^x \qquad \text{et} \qquad s_i^x t_i^x - id = r_{i-1}^x\partial_i^x-\partial_{i+1}^x r_i^x .$$

Cela assurerait l'existence d'applications linéaires bornées $\overline{T}$ et $\overline{S}$, commutant avec M et vérifiant $\overline{S}\circ\overline{T}=\mathrm{Id} : L^2H_i(X\times K)\xrightarrow{\overline{T}} L^2H_i(X\times L)\xrightarrow{\overline{S}} L^2H_i(X\times K)$. On pourrait alors conclure que la M-dimension du M-module intermédiaire majore la M-dimension des espaces extrêmes, *i.e.* $L^2b_i(X\times L,R)\geq L^2b_i(X\times K,R)$.

Ce rêve se réalisera lorsque les actions (K,Γ) et (L,Λ) seront *mutuellement mesurablement quasi-isométriques* (voir [7, $8A_4$]) et on retrouvera alors un résultat comparable au *Claim* formulé à cet endroit. Conservons-le comme programme et voyons les modifications à apporter.

Commençons par produire des champs mesurables[1] d'applications linéaires sur les chaînes à cœfficients entiers $x\to t_0^x$, $x\to s_0^x$ et $x\to r_0^x$: on pose $t_0^x(x,\gamma.k)=\kappa(\gamma^{-1}.x,\gamma).(x,\rho(k))$, (pour $\gamma\in\Gamma$ et $k\in\Theta_0(K)$), ou autrement dit, on pose pour les représentants $t_0^x(x,k)=(x,\rho(k))$ et on impose la Γ-équivariance, *i.e.* :

$$(C)\qquad t_0^x(x,\gamma.k):=\kappa(\gamma^{-1}.x,\gamma)\cdot_\Delta\Big(t_0^{(\gamma^{-1}.x)}\big(\gamma^{-1}\cdot_\Delta(x,\gamma.k)\big)\Big).$$

On définit de manière analogue $x\to s_0^x$ en utilisant le cocycle υ et on pose $r_0^x\equiv 0$. Au niveau 0, les champs t_i et $s_i=t_i^{-1}$ s'étendent en des champs d'isométries des chaînes l^2.

Supposons construits, jusqu'à i, des champs mesurables d'applications linéaires sur les chaînes à cœfficients entiers $x\to t_i^x$, $x\to s_i^x$ et $x\to r_i^x$, qui commutent avec M au sens de (C) et qui satisfont aux équations (B).

[1]mesurable signifiant que les fonctions $x\mapsto\langle t_i^x(x,k)|(x,l)\rangle$ sont mesurables pour $k\in K_i(K), l\in K_i(L)$

Supposons-nous donnés des ordres totaux sur les chaînes à cœfficients entiers de K et L. Soit $x \in X$ et γ, k **fixés** dans $\Gamma, \Theta_{i+1}(K)$ (*resp.* λ, l **fixés** dans $\Lambda, \Theta_{i+1}(L)$). La $(i+1)$-connexité de K (*resp.* L) assure l'existence de chaînes à cœfficients entiers, solutions des équations en t et s :

$$t_i^x \partial_{i+1}^x(x, \gamma.k) = \partial_{i+1}^x t \qquad (\textit{resp. } s_i^x \partial_{i+1}^x(x, \lambda.l) = \partial_{i+1}^x s).$$

Appelons $t_{i+1}^x(x, \gamma.k)$ (*resp.* $s_{i+1}^x(x, \lambda.l)$) la plus petite solution, parmi celles dont la norme l^2 est minimale, pour l'ordre sur $\{x\} \times L_{i+1}$ (*resp.* $\{x\} \times K_{i+1}$) induit par l'identification (*tordue par* γ, *resp.* λ) : $(x, l') \to \kappa(x, \gamma^{-1}).l'$ (*resp.* $(x, k') \to \upsilon(x, \lambda^{-1}).k'$). De la même manière, on définit $r_{i+1}(x, \gamma.k)$ tel que $(s_{i+1}^x t_{i+1}^x - id)(x, \gamma.k) = (r_i^x \partial_{i+1}^x - \partial_{i+2}^x r_{i+1}^x)(x, \gamma.k)$.

On a ainsi construit des champs mesurables d'applications linéaires sur les chaînes à cœfficients entiers, dont un simple calcul montre qu'ils commutent avec Γ (*resp.* Λ) au sens de (C) (c'est l'intérêt de l'identification tordue). Les champs d'applications linéaires qu'ils définissent au niveau l^2 et L^2 ne sont que densément définis mais, au niveau L^2, commutent avec M.

On va maintenant se restreindre à des sous-espaces où ces applications sont bornées. Soit N un entier. Partons de $l^2C_0(\{x\} \times L)_{|N} = l^2C_0(\{x\} \times L)$ et $l^2C_0(\{x\} \times K)_{|N} = l^2C_0(\{x\} \times K)$ et procédons par récurrence sur i : pour $l \in L_i$ et $k \in K_i$ soient les boréliens

$$X_N(l) = \big\{x \in X : \partial_i^x(x, l) \in l^2C_{i-1}(\{x\} \times L)_{|N} \ \| \ s_i^x(x, l) \ \|_2 \leq N\big\} \quad et$$

$$X_N(k) = \Big\{x \in X : \partial_i^x(x, k) \in l^2C_{i-1}(\{x\} \times K)_{|N}, t_i^x(x, k) \in l^2C_i(\{x\} \times L)_{|N}, \\ \| \ t_i^x(x, k) \ \|_2 \leq N, \ \| \ r_i^x(x, k) \ \|_2 \leq N\Big\}.$$

Appelons alors $l^2C_i(\{x\}\times L)_{|N}$ (qui permet de définir $X_N(k)$) puis $l^2C_i(\{x\}\times K)_{|N}$ les sous-espaces hilbertiens de $l^2C_i(\{x\} \times L)$ et $l^2C_i(\{x\} \times K)$ engendrés respectivement par les (x, l) tels que $x \in X_N(l)$ et les (x, k) tels que $x \in X_N(k)$. Et soit $L^2C_i(X \times L)_{|N} = \int^{\oplus} l^2C_i(\{x\} \times L)_{|N} d\mu(x)$. C'est un M-module puisqu'on peut vérifier que $X_N(\lambda.l) = \lambda.X_N(l)$. Observons qu'on a la formule : $\dim_M L^2C_i(X \times L)_{|N} = \sum_{l \in \Theta_i(L)} \mu(X_N(l))$. Et on dispose du complexe de M-modules hilbertiens :

$$0 \leftarrow L^2C_0(X \times L)_{|N} \xleftarrow{D_1^N} L^2C_1(X \times L)_{|N} \xleftarrow{D_2^N} \cdots \xleftarrow{D_i^N} L^2C_i(X \times L)_{|N} \xleftarrow{D_{i+1}^N} \cdots$$

Soit $j_{L,i}^{x,N}$ le plongement isométrique $l^2C_i(\{x\} \times L)_{|N} \xrightarrow{j_L^{x,N}} l^2C_i(\{x\} \times L)$ et $J_{L,i}^N = \int^{\oplus} j_{L,i}^{x,N} d\mu(x)$. On a aussi les analogues en remplaçant L par K.

Confondons un instant les sommets de $\{x\} \times K$ et ceux de $\{x\} \times L$ (en les collant via t_o^x). On peut montrer que par définition des r, s, t (minimalité), il existe une constante $\eta_{i,N}$ telle que les chaînes mises en jeu pour assurer $x \in X_N(k)$ (ou $x \in X_N(l)$) ont leur support dans le $\eta_{i,N}$-voisinage (pour la métrique naturelle sur $\{x\} \times \cdots$) des sommets du simplexe (x, k) (ou (x, l)). Les complexes K et L étant localement finis en chaque dimension, on en déduit que ces chaînes sont orthogonales à toutes les chaînes (x, k), (x, l) (selon l'espace où elles se trouvent) **sauf un nombre fini uniformément majoré par une constante** (fonction de i et N). Les champs t_i^x, s_i^x et r_i^x définissent alors des champs d'applications linéaires essentiellement bornés

$$l^2C_i(\{x\} \times K)_{|N} \xrightarrow{t_i^{x,N}} l^2C_i(\{x\} \times K)_{|N} \xrightarrow{s_i^{x,N}} l^2C_i(\{x\} \times K) \quad \text{et}$$
$$j_{K,i}^{N,x}\big(l^2C_i(\{x\} \times K)_{|N}\big) \xrightarrow{r_i^{x,N}} l^2C_{i+1}(\{x\} \times K),$$

qui vérifient des relations analogues à (B), en remplaçant la troisième par : $s_i^{x,N} t_i^{x,N} - (j_{K,i}^{x,N}) = r_{i-1}^x(j_{K,i-1}^{x,N})\partial_i^x - \partial_{i+1}^x r_i^x(j_{K,i}^{x,N})$. On en déduit l'existence d'applications linéaires bornées

$$\mathrm{Ker} D_i^N / \overline{\mathrm{Im} D_{i-1}^N}(X \times K)_{|N} \xrightarrow{\overline{T_i^N}} \mathrm{Ker} D_i^N / \overline{\mathrm{Im} D_{i-1}^N}(X \times L)_{|N} \xrightarrow{\overline{S_i^N}} \mathrm{Ker} D_i / \overline{\mathrm{Im} D_{i-1}}(X \times K),$$

tels que $\overline{S_i^N} \circ \overline{T_i^N} = \overline{J_{K,i}^N}$, où $\overline{J_{K,i}^N}$ est l'application induite de $J_{K,i}^N$. Puisque la M-dimension du conoyau de $J_{L,i}^N$ vaut $\sum_{l \in \Theta_i(L)}(1 - \mu(X_N(l))$, on peut vérifier que

$$\lim_{N \to \infty} \dim_M(\mathrm{Ker} D_i^N / \overline{\mathrm{Im} D_{i-1}^N}(X \times L)_{|N}) = \dim_M(\mathrm{Ker} D_i / \overline{\mathrm{Im} D_{i-1}}(X \times L)),$$

(et l'analogue pour K). On en déduit

$$\dim_M(\mathrm{Ker}D_i/\overline{\mathrm{Im}D_{i-1}}(X\times L)) \geq \dim_M(\mathrm{Ker}D_i/\overline{\mathrm{Im}D_{i-1}}(X\times K)),$$

ce qui suffit pour conclure, par symétrie.

Remerciements. Je remercie chaleureusement Étienne Ghys, Pierre de la Harpe, Vaughan Jones, Sorin Popa et Alain Valette pour les discussions que nous avons eues sur le sujet. Je tiens à exprimer ma gratitude à Gilles Carron et à Bruno Sévennec ; leur culture et leurs généreuses explications m'ont été fort utiles. Merci à Carole et Valentine.

Références bibliographiques

[1] Bekka M., Valette A., Group cohomology, harmonic functions and the first L^2-Betti number, Potential Anal. 6 (4) (1997) 313–326.

[2] Cheeger J., Gromov M., L_2-cohomology and group cohomology, Topology 25 (2) 1986 189–215.

[3] Dixmier, J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann), Cahiers scientifiques, Fascicule XXV, Gauthier-Villars Paris 1957.

[4] Feldman J., Moore C., Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I and II, Trans. Amer. Math. Soc. 234 (2) (1977) 289–324, 325–359.

[5] Gaboriau D., Coût des relations d'équivalence et des groupes, Invent. Math. 139 (1) (2000) 41–98.

[6] Gaboriau, D., (Co-)Homologie L^2 des groupes, des actions et des relations d'équivalence, en préparation.

[7] Gromov, M., Asymptotic invariants of infinite groups, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), Cambridge Univ. Press (1993) 1–295.

[8] Levitt, G., On the cost of generating an equivalence relation, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 15 (6) (1995) 1173–1181.

[9] Lück W., L^2-Betti numbers of mapping tori and groups, Topology 33 (2) (1994) 203–214.