Rubriques : Systèmes dynamiques (22), Théorie des groupes (6)

MERCURIALE DE GROUPES ET DE RELATIONS

Titre anglais : **A list of prices for groups and relations**

Damien Gaboriau

Ecole normale supérieure de Lyon, UMPA, CNRS-UMR 128
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 07
E-mail : gaboriau@ umpa.ens-lyon.fr

Résumé Le *coût* est un invariant dynamique de groupes discrets et de relations d'équivalence. On montre qu'il est non trivial pour des groupes non moyennables, en établissant une liste de prix (mercuriale). Il nous permet notamment, de prouver que les actions libres préservant la mesure sur des espaces de mesures finies, de groupes libres de rangs différents, ou bien de $SL(2, \mathbf{Z})$ ne peuvent pas être orbitalement équivalentes.

Abstract The *cost* is a dynamical invariant of discrete groups and equivalence relations. Establishing a list of prices (mercuriale), we show that it is not trivial for some non amenable groups. It enables us to prove that measure preserving free actions of free groups of different ranks on probability spaces cannot be orbit equivalent.

INTRODUCTION

Soit (X, μ) un espace borélien standard, de probabilité, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence mesurée à classes dénombrables préservant μ. Les classes de $\mathcal{R}$ sont les orbites de l'action d'un groupe dénombrable G d'automorphismes préservant μ (voir [2]).

Un *système* est une famille dénombrable $\Phi = (\varphi_j : A_j \to B_j)_{j \in I}$ d'isomorphismes préservant μ, partiellement définis entre parties boréliennes de X. Il engendre une relation d'équivalence $\mathcal{R}_\Phi$, la plus petite relation vérifiant $\varphi_j(x) \sim x$, $j \in I$, $x \in A_j$. La classe de $x \in X$ est appelée *orbite* de x. Elle hérite d'une structure de graphe (les sommets sont les éléments de l'orbite et une arête orientée d'appellation φ_j relie y à $\varphi_j(y)$) qui donne à l'orbite une métrique d_Φ (la plus grande qui place y et $\varphi_j(y)$ à distance 1, s'ils sont distincts). Comme G. Levitt dans [4], on définit le *coût* de Φ :

$$\mathcal{C}(\Phi) = \sum_{j \in I} \mu(A_j).$$

Par exemple, si le groupe G est engendré par $\{g_1, \ldots, g_n\}$ et agit librement sur X, alors la relation $\mathcal{R}$ est engendrée par le système des n isomorphismes g_j définis sur X tout entier, pour un coût égal à n, et la structure de graphe des orbites est isomorphe au graphe de Cayley du groupe. Cependant, il n'existe pas d'identification mesurable, au sens où le graphe de Cayley a un sommet privilégié, tandis qu'on ne peut pas choisir mesurablement un point par orbite. Les relations entre les $g_j^{\pm 1}$ introduisent une "surdétermination" suggérant qu'on peut engendrer $\mathcal{R}$ à meilleur marché.

Le *coût* $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}$ est la borne inférieure des $\mathcal{C}(\Phi)$, pour les Φ qui engendrent $\mathcal{R}$ (on néglige toujours les ensembles de mesure nulle).

Le *coût* $\mathcal{C}(G)$ d'un groupe dénombrable G est la borne inférieure des coûts des relations $\mathcal{R}_\alpha$, où α parcourt la famille des actions **libres** de G sur des (X,μ). Signalons que tout groupe dénombrable admet une action libre préservant la mesure sur un espace borélien standard de probabilité [5]. Un groupe sera dit à *prix fixe* si toutes les $\mathcal{R}_\alpha$ ont même coût. On ne connaît pas d'exemple de groupe qui ne soit pas à prix fixe. Deux groupes à prix fixe avec des coûts différents ne peuvent pas avoir des actions libres orbitalement équivalentes : pour $i = 1, 2$, soit $\mathcal{R}_i$ la relation donnée par une action libre du groupe à prix fixe G_i, sur (X_i, μ_i). Une équivalence orbitale entre $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ fournit sur X_1 une action de G_2 par $\mathcal{R}_1$-automorphismes (qui préservent donc μ_1) dont les orbites sont les $\mathcal{R}_1$-classes.

Le théorème 2 de [4] révèle que le coût d'un groupe G, de cardinal $|G|$, est toujours supérieur ou égal à $1-\frac{1}{|G|}$ (avec $\frac{1}{\infty}=0$) ; et l'invocation du théorème de [1] assure l'égalité lorsque G est moyennable. Le théorème suivant permet de mettre au jour des groupes infinis de coût différent de 1.

Théorème. *Si Φ est un système fini qui donne à chaque orbite la structure d'un arbre (on dit que Φ est un arbrage), alors le coût de $\mathcal{R}_\Phi$ est égal à $\mathcal{C}(\Phi)$.*

Corollaire 1.
- *$\mathcal{C}(F_n) = n$, pour le groupe libre de rang n,*
- *$\mathcal{C}(A *_C B) = 1 - (\frac{1}{|A|} + \frac{1}{|B|} - \frac{1}{|C|})$, pour le produit amalgamé des groupes finis A, B, C,*
- *en particulier, $\mathcal{C}(SL(2,\mathbf{Z})) = \frac{13}{12}$, et ces groupes sont à prix fixe.*

(Pour exhiber un arbrage pour $A *_C B$, on en choisit un pour l'action de C, puis un compatible pour l'action de A (resp. de B)).

Corollaire 2. *Les actions libres préservant la mesure, d'un groupe libre de rang q ou de $SL(2,\mathbf{Z})$, ne sont jamais orbitalement équivalentes à une action libre préservant la mesure d'un groupe libre de rang $p \neq q$ (les espaces étant de mesures finies).*

Les théorèmes de rigidité de R. Zimmer [6] fournissent des résultats analogues de non équivalence orbitale (par exemple pour les actions ergodiques des $SL(n,\mathbf{Z})$, pour des $n \geq 3$ distincts). Le corollaire ci-dessus s'en distingue particulièrement du fait qu'il concerne des groupes qui ne sont pas de rang supérieur. De plus, l'abondance de commutativité a tendance à trivialiser le coût, comme on peut le voir en calculant $\mathcal{C}(SL(n,\mathbf{Z})) = 1$, pour $n \geq 3$.

ESQUISSE DE PREUVE DU THÉORÈME

Soit $\Phi = (\varphi_j)_{j=1,2,\dots,r}$ comme dans le théorème, et soit Λ un système qui a les mêmes orbites. On veut établir que $\mathcal{C}(\Phi) \leq \mathcal{C}(\Lambda)$.

Etape 1 : système adapté. Puisqu'ils ont les mêmes orbites et pour x appartenant au domaine d'un générateur ψ de l'un des systèmes, il existe un premier (quitte à se donner un bon ordre sur les mots) mot α, écrit à l'aide des lettres de l'autre système tel que α soit défini en x et $\alpha(x) = \psi(x)$. On peut établir que quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un système fini $\Omega = (\omega_i : D_i \to E_i)_{i\in\{1,2,\dots,s\}}$ qui a les mêmes orbites que Φ, tel que :

(1) chaque $\omega_i \in \Omega$ coïncide sur tout D_i avec **un** Φ-mot $m_i = \varphi_{t(i,l(i))}^{\varepsilon(i,l(i))} \dots \varphi_{t(i,k)}^{\varepsilon(i,k)} \dots \varphi_{t(i,2)}^{\varepsilon(i,2)} . \varphi_{t(i,1)}^{\varepsilon(i,1)}$ de longueur $l(i)$, avec $t(i,k) \in \{1, 2, \dots, r\}$ et $\varepsilon(i,k) = \pm 1$,

(2) le domaine de chaque φ_j se décompose en un nombre fini de pièces sur lesquelles φ_j coïncide avec **un** Ω-mot,

(3) $\mathcal{C}(\Omega) \leq \varepsilon + \mathcal{C}(\Lambda)$.

Etape 2 : déploiement. Soient alors $D_{i,0} = D_i$ et $D_{i,k} = \varphi_{t(i,k)}^{\varepsilon(i,k)}(D_{i,k-1})$ et $\Delta_{i,k}$ une copie de $D_{i,k}$. On construit un espace Y comme réunion disjointe de X, et des $\Delta_{i,k}$ pour $i \in \{1, \dots, s\}$ et

$k \in \{0, 1, \dots, l(i)\} \setminus \{0, l(i)\}$. Tribu et mesure (qu'on note encore μ et qui est finie) sont induites de celles de X.

On définit les isomorphismes $\sigma_{i,k}$ sur Y, leur famille Σ, et la projection $P : Y \to X$ de manière à faire commuter les diagrammes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
D_i & \xrightarrow{\sigma_{i,1}} & \Delta_{i,1} & \xrightarrow{\sigma_{i,2}} & \dots & \xrightarrow{\sigma_{i,l(i)-1}} & \Delta_{i,l(i)-1} & \xrightarrow{\sigma_{i,l(i)}} & E_i \\
= \Big\downarrow P & & \sim \Big\downarrow P & & & & \sim \Big\downarrow P & & = \Big\downarrow P \\
D_i & \xrightarrow{\varphi^{\varepsilon(i,1)}_{t(i,1)}} & D_{i,1} & \xrightarrow{\varphi^{\varepsilon(i,2)}_{t(i,2)}} & \dots & \xrightarrow{\varphi^{\varepsilon(i,l(i)-1)}_{t(i,l(i)-1)}} & D_{i,l(i)-1} & \xrightarrow{\varphi^{\varepsilon(i,l(i))}_{t(i,l(i))}} & E_i
\end{array}$$

Avec la même notation pour le coût (même si $\mu(Y) \neq 1$), il est manifeste que :

$$\mathcal{C}(\Sigma) - \mu(Y) = \mathcal{C}(\Omega) - \mu(X).$$

Deux points $x, y \in Y$ sont dans la même Σ-orbite si et seulement si $P(x)$ et $P(y)$ sont dans la même Φ-orbite. De plus, les orbites sont uniformément quasi-isométriques : il existe deux nombres C_1 et C_2 indépendants de x et y tels que : $d_\Phi(P(x), P(y)) \leq d_\Sigma(x, y) \leq C_1.d_\Phi(P(x), P(y)) + C_2$.

En particulier, si u et v sont dans la même P-fibre, $d_\Sigma(u, v) \leq C_2$. On va chercher, par l'étape 3, à réduire cette distance :

L'application $\sigma_{i,k} \mapsto \varphi^{\varepsilon(i,k)}_{t(i,k)}$ se prolonge en un morphisme P_* des Σ-mots dans les Φ-mots. L'image par P_* d'un Σ-mot de u à v est un Φ-mot **non réduit** puisqu'il correspond à un cycle dans l'**arbre** représentant l'orbite de $P(u)$.

Etape 3 : réduction. Rebaptisons $(\sigma_j)_{j \in J}$ le système $\Sigma^0 = \Sigma$. Donnons-nous un ordre total sur l'ensemble fini K^0 des paires $(\sigma_i^{\varepsilon_i}, \sigma_j^{\varepsilon_j})$ où $\sigma \in \Sigma$, $\sigma_i \neq \sigma_j$, $\varepsilon = \pm 1$ et $P_*(\sigma_i^{\varepsilon_i}) = P_*(\sigma_j^{\varepsilon_j})$. Pour la première d'entre elles, disons (α_1, α_2), appelons U^1 l'ensemble des x appartenant aux domaines de α_1 et de α_2, pour lesquels les images $\alpha_1(x)$ et $\alpha_2(x)$ sont distinctes (elles sont nécessairement dans la même P-fibre). Soit π^1 la projection de Y sur $Y^1 = Y/(\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ pour $x \in U^1)$ et soit P^1 la factorisation $P = P^1 \circ \pi^1$. Les σ_j^1, déterminés par le diagramme commutatif suivant (considéré lorsque la flèche horizontale du haut est définie) sont des isomorphismes boréliens :

$$\begin{array}{ccc}
Y & \xrightarrow{\sigma_j} & Y \\
{\scriptstyle \pi^1} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle \pi^1} \\
Y^1 & \xrightarrow{\sigma_j^1} & Y^1 . \\
{\scriptstyle P^1} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle P^1} \\
X & \xrightarrow{P_*(\sigma_j)} & X
\end{array}$$

Du coup, α_1^1 et α_2^1 coïncident sur $\pi^1(U^1)$: supprimons cette partie du domaine de α_1^1 et appelons encore α_1^1 la restriction au reste. Soit $\Sigma^1 = (\sigma_j^1)_{j \in J}$ le système sur Y^1 constitué des σ_j^1 ainsi construits.

Puisque $\mu(U^1)$ est la diminution de mesure de l'espace et la diminution de coût du système,

$$\mathcal{C}(\Sigma^1) - \mu(Y^1) = \mathcal{C}(\Sigma) - \mu(Y).$$

L'ensemble K^1 défini pour Σ^1 est en bijection naturelle avec K^0. Passons donc à la paire suivante et produisons de la même façon (Y^2, Σ^2) à partir de (Y^1, Σ^1). Et ainsi de suite jusqu'à la dernière paire, où achevant l'étape 3 on produit (Y^M, Σ^M) qui vérifie :

$$\mathcal{C}(\Sigma^M) - \mu(Y^M) = \mathcal{C}(\Sigma) - \mu(Y) = \mathcal{C}(\Omega) - \mu(X).$$

Si P n'était pas injective, alors pour chaque paire de points distincts x et y de la même P-fibre, leurs images x^M et y^M dans Y^M se sont rapprochées :
$d_{\Sigma^M}(x^M, y^M) < d_{\Sigma}(x, y)$.

Appliquons plusieurs fois l'étape 3 à Σ^M, jusqu'à obtenir (Y^N, Σ^N) pour lequel $P^N : Y^N \to X$ est un isomorphisme. Chaque σ^N coïncide sur son domaine avec la **Φ-lettre** $P_*^N(\sigma^N)$ et Σ^N a les même orbites que l'**arbrage** Φ. On en déduit que $\mathcal{C}(\Phi) \leq \mathcal{C}(\Sigma^N)$ et donc $\mathcal{C}(\Phi) \leq \varepsilon + \mathcal{C}(\Lambda)$.

CONCLUSION

Les preuves complètes paraîtront dans un article en préparation [3], où l'on montrera que si $\mathcal{R}$ induit la relation $\mathcal{S}$ sur $Y \subset X$ et si Y rencontre toutes les $\mathcal{R}$-orbites alors $\mathcal{C}(\mathcal{S}) - \mu(Y) = \mathcal{C}(\mathcal{R}) - \mu(X)$.

Cela permettra l'évaluation du coût des relations de type produit amalgamé $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 *_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2$ (voir [3]) où $\mathcal{R}_3$ est moyennable, puis celui du produit amalgamé de deux groupes G_1, G_2 à prix fixe au-dessus de G_3 moyennable :
• $\mathcal{C}(G_1 *_{G_3} G_2) = \mathcal{C}(G_1) + \mathcal{C}(G_2) - \mathcal{C}(G_3)$.
Par exemple pour le groupe fondamental π_g de la surface de genre g :
• $\mathcal{C}(\pi_g) = 2g - 1$, et ces groupes sont à prix fixe.

Si on appelle $n(\Gamma)$ le nombre minimal de générateurs du groupe Γ, le théorème de Grushko établit, pour les produits libres : $n(\Gamma_1 * \Gamma_2) = n(\Gamma_1) + n(\Gamma_2)$. La formule ci-dessus avec $G_3 = \{1\}$ en fournit un analogue mesurable.

Remarquons par ailleurs que pour le produit **direct** de deux groupes libres :
• $\mathcal{C}(F_p \times F_q) = 1$. Mais si $p.q > 1$, les actions n'étant pas moyennables cette valeur n'est atteinte par aucun système générateur (voir [4]). De telles actions ne sont donc pas *arbrables*.

Le travail présenté ici a été réalisé durant un séjour à l'Université Fédérale Fluminense de Niteroi (Brésil) que je remercie très chaleureusement pour son accueil. Si vous y trouvez un grain de sable, gardez-le, il vient de Copacabana. Je remercie sincèrement Livio Flaminio pour de passionnantes discussions. Cette recherche a été financée par le CNRS et la FAPERJ.

Références bibliographiques

[1] **Connes A., Feldman J. et Weiss B, 1981**, An amenable equivalence relation is generated by a single transformation, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 1, no. 4, p.431-450.

[2] **Feldman J. et Moore C., 1977**, Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 234, no. 2, p.289-324.

[3] **Gaboriau D.** Mercuriale de produits amalgamés, en préparation.

[4] **Levitt G., 1995.** On the cost of generating an equivalence relation, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 15, no. 6, p.1173-1181.

[5] **Zimmer R., 1983.** Curvature of leaves in amenable foliations. *Amer. J. Math.*, 105, no. 4, p.1011-1022

[6] **Zimmer R., 1984.** Ergodic theory and semisimple groups. Monographs in Mathematics, 81. Birkhäuser.