Invent. math. 139, 41–98 (2000)
Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s002229900019

Inventiones mathematicae

Coût des relations d'équivalence et des groupes

Damien Gaboriau[⋆]

Département de Mathématiques, ENS-Lyon, 46, Allée d'Italie, F-69364 Lyon Cedex 7, France (e-mail: gaboriau@umpa.ens-lyon.fr)

Oblatum 27-I-1999 & 4-IV-1999 / Published online: 22 September 1999

Abstract. We study a new dynamical invariant for dicrete groups: the cost. It is a real number in $\{1-1/n\}\cup[1,\infty]$, bounded by the number of generators of the group, and it is well behaved with respect to finite index subgroups. Namely, the quantities 1 minus the cost are related by multiplying by the index. The cost of every infinite amenable group equals 1. We compute it in some other situations, including free products, free products with amalgamation and HNN-extensions over amenable groups and for direct product situations. For instance, the cost of the free group on n generators equals n. We prove that each possible finite value of the cost is achieved by a finitely generated group. It is dynamical because it relies on measure preserving free actions on probability Borel spaces. In most cases, groups have *fixed price*, which implies that two freely acting groups which define the same orbit partition must have the same cost. It enables us to distinguish the orbit partitions of probability-preserving free actions of free groups of different ranks. At the end of the paper, we give a *mercuriale*, i.e. a list of costs of different groups. The cost is in fact an invariant of ergodic measure-preserving equivalence relations and is defined using *graphings*. A *treeing* is a measurable way to provide every equivalence class (=orbit) with the structure of a simplicial tree, this an example of graphing. Not every relation admits a treeing: we prove that every free action of a cost 1 non-amenable group is not treeable, but we prove that subrelations of treeable relations are treeable. We give examples of relations which cannot be produced by an action of any finitely generated group. The cost of a relation which can be decomposed as a direct product is shown to be 1. We define the notion for a relation to be a free product or an HNN-extension and compute the cost for the resulting relation from the costs of the building blocks. The cost is also an invariant of the pairs von Neumann algebra/Cartan subalgebra.

⋆ Ce travail de recherche a été financé par le CNRS (France), par le CIC (Mexique) et par la FAPERJ (Brésil)

Mathematics Subject Classification (1991): 28D15, 28D20, 20E15, 20E06, 46L10

Introduction et résultats

Cette étude concerne, essentiellement, la classification des actions mesurables des groupes dénombrables, préservant la mesure, (donc des relations d'équivalence mesurées de type II_1 et des paires algèbre de von Neumann/sous-algèbre de Cartan). Elle décrit un nouvel invariant pour ces relations et pour les groupes dénombrables : le *coût*, et certains autres invariants *dynamiques*.

Soit Γ un groupe dénombrable et soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un borélien standard, de probabilité ($\mu(X) = 1$) sans atome (ils sont tous isomorphes à $X = [0, 1]$ avec la mesure de Lebesgue). Une *action* α de Γ, sera toujours, pour nous, un morphisme de groupes, de Γ dans le groupe $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ des automorphismes mesurables de $(X, \mathcal{B})$ qui préservent la mesure. Une action est *libre* si pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ et pour μ-presque tout $x \in X$, on a $\alpha(\gamma)(x) \neq x$. Tout groupe dénombrable infini admet des actions libres ergodiques, par exemple les *décalages* de Bernoulli sur l'espace probabilisé $\{0, 1\}^\Gamma$, muni d'une mesure produit.

Considérons sur X la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\alpha$ *être dans la même orbite*

$$(x\mathcal{R}_\alpha y) \Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma\ : \alpha(\gamma)(x) = y)$$

(c'est une relation d'équivalence mesurée de type II_1) et *oublions* le groupe et l'action. Une question générale de théorie ergodique est alors de savoir la quantité d'information qu'on peut retrouver dans $\mathcal{R}_\alpha$.

Deux actions ergodiques α_1 et α_2 sur (X_1, μ_1) et (X_2, μ_2) de groupes Γ_1 et Γ_2 sont dites *orbitalement équivalentes* (OE) si $\mathcal{R}_{\alpha_1}$ et $\mathcal{R}_{\alpha_2}$ sont isomorphes, au sens où il existe deux boréliens saturés de mesure totale $X_1' \subset X_1$ et $X_2' \subset X_2$ et un isomorphisme borélien $f : X_1' \to X_2'$ préservant la mesure (il n'y a qu'une mesure de probabilité dans sa classe) tel que pour tout $x, y \in X_1'$, $(x\mathcal{R}_{\alpha_1} y) \Leftrightarrow (f(x)\mathcal{R}_{\alpha_2} f(y))$. Cette notion ne suppose pas que les groupes Γ_1 et Γ_2 soient isomorphes.

En 1959, H. Dye a découvert que pour $\Gamma \simeq \mathbf{Z}$, tout ce qui concerne α est effacé : toutes les actions ergodiques du groupe $\mathbf{Z}$ sur (X, μ) sont orbitalement équivalentes entre elles [Dye59]. Une suite de travaux menés par plusieurs auteurs (notamment H. Dye, A. Connes et W. Krieger, A. Vershik...) conduit au théorème de D. Ornstein et B. Weiss [OW80] : si Γ_1 et Γ_2 sont deux groupes *moyennables*, alors toute action ergodique de Γ_1 est orbitalement équivalente à toute action ergodique de Γ_2. En d'autres termes, il n'existe au niveau OE qu'une seule action ergodique de groupes moyennables (les actions sont dans $\mathrm{Aut}(X, \mu)$).

La situation est radicalement différente pour les actions ergodiques libres des groupes *non moyennables*. Primo, aucune d'entre elles n'est OE à *l'action moyennable*, secundo certains groupes peuvent avoir plusieurs actions ergodiques non OE. Par exemple, des résultats de A. Connes et B. Weiss assurent que tout groupe non moyennable n'ayant pas la propriété (T) de Kazhdan, admet au moins deux actions libres non OE. Par exemple, les travaux de D. McDuff et S. Bezuglyĭ et V. Golodets permettent de trouver des groupes qui possèdent un continuum d'actions deux à deux non orbitalement équivalentes. Tertio, il arrive sous certaines conditions que la relation $\mathcal{R}_\alpha$ détermine, à peu de choses près, et le groupe et l'action. La plupart de ces résultats de *rigidité* concernent des groupes Γ qui sont des réseaux dans des groupes de Lie semi-simples de rang réel ≥ 2. Citons par exemple des travaux de R. Zimmer (voir par exemple [Zim84]) ou les résultats récents d'A. Furman [Fur98] qui entraînent notamment que, si un groupe Γ admet une action libre OE à l'action naturelle de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ sur le n-tore $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$, avec $n \geq 3$ alors $\Gamma \simeq \mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ et les actions sont conjuguées. Notre étude est d'une certaine manière *orthogonale* à ces résultats (prop. VI.30 et prop. VI.34) et se rapproche plutôt des résultats de S. Adams sur les *treeings* [Ada90].

Dans cet article, on associe à chaque groupe Γ dénombrable (y compris fini) un nombre $\mathcal{C}(\Gamma) \in [1, \infty] \cup \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\}$: son *coût*, majoré par le nombre de générateurs de Γ, et à certains groupes on associe des qualités (prix fixe, arborabilité...), le tout reposant sur la notion de *graphage*.

Un graphage de $\mathcal{R}_\alpha$ est une manière mesurable d'équiper chaque classe d'équivalence d'une structure de graphe connexe. Par exemple, si α est une action libre d'un groupe Γ engendré par n éléments $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, alors $\mathcal{R}_\alpha$ est engendrée par les n automorphismes $\alpha(\gamma_j) : X \to X$, et chaque orbite hérite de la structure du graphe de Cayley du groupe Γ, correspondant à $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$. Mais les relations entre les générateurs (les cycles dans les graphes) introduisent une redondance dans la génération de $\mathcal{R}_\alpha$, qu'on va chercher à minimiser en considérant des automorphismes partiellement définis. Ainsi, plus précisément, un *graphage* de $\mathcal{R}_\alpha$ est une famille dénombrable $\Phi = (\varphi_j : A_j \to B_j)_{j \in I}$ d'isomorphismes partiels, telle que la relation engendrée par $(\varphi_j(x) \sim x)$ soit isomorphe à $\mathcal{R}_\alpha$. Le *coût* de Φ se calcule immédiatement, c'est le nombre de générateurs φ_j pondérés par la mesure de leur domaine, c'est la quantité (finie ou non) suivante : $\mathcal{C}(\Phi) = \sum_{j \in I} \mu(A_j)$. L'action α admet de nombreux graphages et la borne inférieure de leurs coûts s'appelle le *coût de la relation* $\mathcal{R}_\alpha$ (ou *de l'action* α), noté $\mathcal{C}(\mathcal{R}_\alpha)$. Enfin, un groupe Γ possède plusieurs actions **libres**, et la borne inférieure (c'est en fait un minimum, prop. VI.21) de leurs coûts est appelée le *coût du groupe* Γ, on le note $\mathcal{C}(\Gamma)$. Ainsi,

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \min_{\alpha \text{ action libre de } \Gamma} \Big(\inf_{\Phi \text{ graphage de } \mathcal{R}_\alpha} \big(\mathcal{C}(\Phi)\big)\Big).$$

Le groupe Γ est *à prix fixe* si $\mathcal{C}(\mathcal{R}_\alpha)$ est constant sur toutes les actions libres α. On ne connaît aucun groupe qui ne soit pas à prix fixe. La notion de coût fut introduite par G. Levitt et le présent travail a été largement motivé par une question de [Lev95, p. 1174] : *"For instance, is cost($\mathcal{R}$) strictly bigger than 1 if $\mathcal{R}$ comes from a free action of a nonabelian free group ? If so, this would lead to a nontrivial numerical invariant for (non amenable) discrete groups"* à laquelle le théorème 1 (annoncé dans [Gab98]) permet de répondre, en fournissant un moyen de calcul effectif de ce nombre :

Théorème 1. *Soit Φ un graphage de $\mathcal{R}_\alpha$ qui donne à presque chaque orbite la structure d'un arbre, alors $\mathcal{C}(\mathcal{R}_\alpha) = \mathcal{C}(\Phi)$.*

On dit, dans ce cas, que Φ est un *arborage*. C'est en particulier un *treeing* au sens de S. Adams (voir par exemple [Ada90]). Un groupe dont toutes les actions libres sont arborables (i. e. admettent un arborage) est dit *arborable*. Si aucune de ses actions libres (dans $\mathrm{Aut}(X, \mu)$) n'est arborable, il est alors dit *anti-arborable*.

D'après [OW80], tous les groupes moyennables sont arborables, à prix fixe, de coût 1. Dans [AS90], S. Adams et R. Spatzier ont montré que tout groupe infini possédant la propriété (T) de Kazhdan est anti-arborable. Le théorème 1 entraîne immédiatement :

Corollaire 1. *Le groupe libre sur p générateurs est arborable, à prix fixe, de coût p.*

L'intérêt de ces notions repose sur leurs propriétés d'*invariance*.

Invariance par OE. *Si deux groupes à prix fixe ont des actions libres orbitalement équivalentes, alors ils ont même coût.*

Cela permet de répondre à une question de A. Vershik [Ver89, p.90] :

Corollaire 2. *Les décalages de Bernoulli de groupes libres de rangs distincts ne sont pas orbitalement équivalents.*

Deux actions sont *stablement orbitalement équivalentes* (SOE) si les relations $\mathcal{R}_{\alpha_i}$ admettent des restrictions, chacune à un borélien rencontrant presque toutes les orbites, qui sont isomorphes (cette notion est comparable, en présence d'un feuilletage sur une variété, à l'équivalence de Kakutani pour les pseudogroupes associés à différentes transversales totales).

Notons que le groupe libre $\mathbf{F}_2$ possède un sous-groupe $\mathbf{F}_3$ d'indice 2. Alors toute $\mathbf{F}_3$ action s'étend en une $\mathbf{F}_2$ action qui lui est stablement orbitalement équivalente : le coût n'est donc pas invariant par SOE.

Invariance par SOE. *Soient Γ_1 et Γ_2, deux groupes qui admettent des actions libres stablement orbitalement équivalentes.*
– *Si Γ_1 est anti-arborable alors Γ_2 n'est pas arborable.*
– *Si Γ_1 et Γ_2 sont à prix fixe, alors $\mathcal{C}(\Gamma_1) = 1$ (resp. est fini, resp. $= \infty$) si et seulement si $\mathcal{C}(\Gamma_2) = 1$ (resp. est fini, resp. $= \infty$).*

On dresse une *mercuriale*, c'est-à-dire une liste de groupes (à prix fixe pour la plupart), avec leur coût, (par exemple $\mathcal{C}(\Gamma) = 1 - \frac{1}{|\Gamma|}$ pour Γ groupe fini de cardinal $|\Gamma|$, les groupes infinis sont de coût ≥ 1) et on décrit comment agrandir la liste, par divers procédés. Le plus frappant, qu'on peut voir comme un analogue du théorème de Grushko dans le cas des produits libres, est le suivant :

Théorème 2. *Si $\Gamma = \Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2$ est le produit amalgamé de deux groupes à prix fixe, de coûts finis Γ_1 et Γ_2 au-dessus du groupe moyennable (éventuellement trivial) Γ_3 alors Γ est à prix fixe et $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma_1) + \mathcal{C}(\Gamma_2) - \mathcal{C}(\Gamma_3)$.*

Cela entraîne, entre autres :

- $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ est arborable, à prix fixe, de coût $1 + \frac{1}{12}$,
- le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma_g)$ de la surface compacte de genre $g \geq 1$ est à prix fixe, de coût $2g - 1$.
- pour tout $c \geq 1$, il existe (au moins) un groupe Γ_c (resp. Λ_c) à prix fixe, de coût c et arborable (resp. anti-arborable) et il existe au moins un groupe *de type fini* de coût c, pour $c < \infty$.

Concernant le passage à des sous-groupes, on obtient :

Théorème 3.

- *Si Λ est d'indice fini $[\Gamma : \Lambda]$ dans Γ, alors $\mathcal{C}(\Lambda) - 1 = [\Gamma : \Lambda] \cdot (\mathcal{C}(\Gamma) - 1)$.*
- *Si Λ est un sous-groupe infini distingué à prix fixe de Γ, alors $\mathcal{C}(\Gamma) \leq \mathcal{C}(\Lambda)$.*

Par ailleurs, il existe de nombreux groupes *familiers* qui sont à prix fixe, de coût 1. Par exemple les produits directs $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ où Γ_1 contient un élément d'ordre infini, les groupes contenant un sous-groupe normal moyennable, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ pour $n > 2$, le groupe de Thompson... On donne des critères algébriques permettant d'établir cela, on en déduit que les groupes considérés par D. McDuff [McD69] sont tous de coût 1 et on prouve :

Théorème 4.

- *Tout groupe non moyennable de coût 1 est anti-arborable.*
- *Tout groupe contenant un sous-groupe anti-arborable est anti-arborable.*

Le groupe libre sur une infinité de générateurs est à prix fixe de coût infini. On en déduit, en réponse à une question de V. Kaimanovich :

Corollaire 3. *Il existe des actions qui ne sont SOE à aucune action d'un groupe de type fini.*

Comme le suggère ce qui précède, plusieurs résultats portent en fait sur des relations d'équivalence mesurées de type II_1, mais on sait (voir les papiers [FM77] de J. Feldman et C. Moore) qu'elles sont toutes de la forme $\mathcal{R}_\alpha$ pour une action α non nécessairement libre d'un certain groupe dénombrable. On définit la propriété (généralisant celle de É. Ghys [Ghy95]) pour une relation de se décomposer comme produit amalgamé ou HNN-extension qui correspond à celle pour les groupes : si α est une action libre du groupe $\Gamma = \Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2$ (resp. $\Gamma = \Gamma_1 *_{\Gamma_3}$), alors $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_1} *_{\mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_3}} \mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_2}$ (resp. $\mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_1} *_{\mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_3}}$). On prouve que ces notions sont identiques modulo SOE et en réalité, on établit l'analogue (th. IV.15) du théorème 1 dans ce contexte. De même, on obtient :

Théorème 5. *Toute sous-relation d'une relation arborable est elle-même arborable.*

S. Jackson, A. Kechris et A. Louveau ont obtenu [JKL] de manière indépendante des résultats comparables aux nôtres sur l'arborabilité, mais dans le *cadre borélien* (i.e. sans la présence d'une mesure quasi-invariante). Notre preuve du théorème 5 se généralise à ce cadre.

On sait bien, depuis les travaux de F. Murray et J. von Neumann, le lien étroit entre relations d'équivalence mesurées et algèbres de von Neumann. En fait ([FM77]), à toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ mesurée ergodique de type II_1 correspond une algèbre de von Neumann M de type II_1 et une sous-algèbre de Cartan A. Inversement [FM77], pour toute telle paire (M, A), il existe une unique relation d'équivalence mesurée préservant la mesure sur un borélien standard de probabilité (et un 2-cocycle σ, sans incidence pour nous), qui est associée (tordue par σ) à (M, A). Si bien que les invariants qu'on a considérés, coût et arborabilité deviennent des invariants pour les paires algèbre de von Neumann/sous-algèbre de Cartan. Les spécialistes ne manqueront pas de remarquer certaines similitudes (non encore élucidées) entre nos résultats sur le coût et ceux concernant l'invariant ("free entropy dimension") introduit par D. Voiculescu des facteurs de von Neumann de type II_1.

Plan de l'article

I Définitions et premières propriétés 47
II Invariances et induction 53
III Relations hyperfinies 57
IV Arborabilité, produits amalgamés et HNN-extensions 60
V Petits coûts et relations décomposables 78
VI En théorie des groupes 79
VII Mercuriale de groupes 95
Bibliographie 97

Remerciements

La réalisation de cet article s'est étalée sur plusieurs mois et plusieurs laboratoires. Durant l'année 1997, j'ai effectué un long séjour à l'Universidade Federal Fluminense de Niteroi (Brésil) et au Centro Internacional de Ciencias de Cuernavaca (Mexique). Je les remercie très chaleureusement pour leur accueil. J'ai aussi bénéficié de la formidable bibliothèque de l'IMPA (Rio). Ce travail doit donc beaucoup au soleil des Amériques et à l'ombre du Pão de Açúcar et du Popocatepetl (mais il n'a vraiment commencé qu'après la lecture de la jolie preuve du théorème de Grushko donnée par J. Stallings [Sta65]). Je l'ai poursuivi dans mon laboratoire d'accueil de l'UMPA de l'Ens-Lyon en 1997-1998. J'ai harcelé de nombreuses personnes pour les entretenir du sujet. Je tiens à les remercier sincèrement, notamment Nicolas Bergeron, Gilles Carron, Claude Danthony, Albert Fathi, Alex Furman, Emmanuel Giroux, Alekos Kechris, Jean-Paul Mohsen, Sorin Popa, Alberto Verjovsky (en particulier pour son enthousiasme et ses suggestions de lectures), Benjamin Weiss, Dave Witte... Je suis particulièrement redevable à Étienne Ghys et Gilbert Levitt pour leurs encouragements constants et leurs conseils réguliers et toujours utiles et à Livio Flaminio avec lequel j'ai travaillé une semaine intensive sur les questions de moyennes et qui, le premier, m'a signalé qu'on ignorait si des actions libres II_1 de $\mathbf{F}_2$ et de $\mathbf{F}_3$ pouvaient être orbitalement équivalentes. Un merci tout spécial à Thierry Barbot, pour son oreille et ses relectures attentives, et à Bruno Sevennec, pour ses connaissances encyclopédiques dont il fait profiter tout le laboratoire, et pour les nombreuses questions pointues, en théorie des groupes, auxquelles il m'a apporté des réponses. À Carole et à Valentine.

I Définitions et premières propriétés

I-A Premières définitions

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace borélien standard muni d'une mesure μ, sans atome. S'il est de probabilité ($\mu(X) = 1$), alors il est isomorphe à l'intervalle $[0, 1]$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue.

(S) Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur (X, μ) est dite **standard** si

– pour tout $x \in X$, la classe d'équivalence $\mathcal{R}[x]$ de x est dénombrable.
– $\mathcal{R}$ comme partie de $X \times X$ est un borélien de la σ-algèbre produit.

(P) On dit que μ est préservée par $\mathcal{R}$ si tout automorphisme borélien de X, dont le graphe est contenu dans $\mathcal{R}$, préserve μ.

Le $\mathcal{R}$-*saturé* d'un borélien A est la réunion des $\mathcal{R}$-classes des éléments de A, c'est un borélien de X. La relation $\mathcal{R}$ est *ergodique* si pour tout borélien $\mathcal{R}$-saturé A, ou bien A, ou bien son complémentaire est de mesure nulle. On appelle **orbite** d'un point $x \in X$ sa classe d'équivalence.

Notre étude se concentrera essentiellement sur les relations **(SP1)**, c'est-à-dire standard, préservant la mesure μ sur X **de probabilité**. Cependant, au cours des démonstrations, apparaîtront des espaces de base boréliens **standards σ-finis** (i.e. réunion dénombrable de boréliens de mesures finies). Ces relations vérifieront (S) et (P), elles seront dites **(SP)**. Nos considérations seront mesurables, préservant la mesure et à un ensemble de mesure nulle près (mod 0). Il existe un *principe* disant "tant qu'on n'utilise pas l'axiome du choix, on demeure dans le cadre mesurable".

Dans un contexte plus faible où l'on ne suppose pas (P), on dit que la mesure μ est *quasi-préservée* si le $\mathcal{R}$-saturé de tout borélien négligeable est lui-même négligeable. Dans ce cadre, on dit qu'une relation standard est de *type* II_1 si $\mathcal{R}$ est à classes infinies et préserve une mesure de probabilité ν équivalente à μ (i.e. μ et ν ont les mêmes ensembles de mesure nulle). Si de plus $\mathcal{R}$ est ergodique, alors ν est unique dans sa classe de mesure.

On dira que les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sur (X_1, μ_1) et (X_2, μ_2) sont *isomorphes* et on écrira $\mathcal{R}_1 \simeq \mathcal{R}_2$ s'il existe une bijection bimesurable $f : X_1 \to X_2$ telle que $f_*(\mu_1) = \mu_2$ et telle que pour μ_1-presque tout $x \in X_1$, les ensembles $f(\mathcal{R}_1[x])$ et $\mathcal{R}_2[f(x)]$ sont égaux. Une propriété est vérifiée pour **presque chaque orbite** de $\mathcal{R}$ si elle est vérifiée pour chaque orbite d'une relation isomorphe.

Si G est un sous-groupe dénombrable du groupe $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ des automorphismes boréliens de X préservant μ, la relation d'équivalence $\mathcal{R}_G$ définie par ses orbites est une relation (SP). Inversement, le corollaire 1 de [FM77] de J. Feldman et C. Moore assure que, pour toute relation (SP) $\mathcal{R}$ sur (X, μ), il existe un sous-groupe dénombrable G de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ tel que $\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}_G$.

On renvoie à [FM77] ou [Wei81] pour plus de détails sur ce qui précède.

Définition I.1. *Un* **graphage** *sur (X, μ) est une famille dénombrable $\Phi = (\varphi_j : A_j \to B_j)_{j \in J}$ d'isomorphismes boréliens préservant μ, entre parties boréliennes de X. Chaque φ_j est un* **générateur**, *le* **domaine** *A_j et le* **but** *B_j sont ses bases.*

Un graphage Φ **engendre** une relation d'équivalence $\mathcal{R}_\Phi \subset X \times X$: la plus petite relation d'équivalence qui vérifie $(x \sim y)$ s'il existe $j \in J$ avec $x \in A_j$ et $y = \varphi_j(x)$.

Un Φ-**mot** ω est un mot écrit avec les lettres φ_j et φ_j^{-1}. C'est un isomorphisme partiel dont le domaine de définition $\mathrm{dom}(\omega)$ (défini de la manière maximale évidente) et l'image $\mathrm{but}(\omega)$ sont des boréliens de X. La **longueur** du Φ-mot $\omega = \varphi_{i_l}^{\varepsilon_l} \dots \varphi_{i_2}^{\varepsilon_2} \varphi_{i_1}^{\varepsilon_1}$ (avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et $\varphi_{i_j} \in \Phi$) est l'entier l. Un mot est *réduit* s'il ne contient pas une lettre suivie immédiatement de son inverse. Le mot vide est défini partout et vaut l'identité. Deux Φ-mots ω_1 et ω_2 **coïncident** en $x \in X$ si x appartient à leurs domaines et $\omega_1(x) = \omega_2(x)$.

La relation $\mathcal{R}_\Phi$ est donc aussi l'ensemble des (x, y) pour lesquels il existe un Φ-mot ω défini en x tel que $\omega(x) = y$. Il est immédiat de s'assurer que c'est une relation (SP) (tout automorphisme dont le graphe est contenu dans $\mathcal{R}_\Phi$ se décompose en une famille dénombrable de Φ-mots).

Un graphage Φ donne naturellement (et "mesurablement") à chaque orbite de $\mathcal{R}_\Phi$ une structure de graphe connexe, son **graphe de Cayley**, et la munit d'une métrique d_Φ : les sommets sont les éléments de la classe et une arête orientée d'appellation φ_j joint x à y si et seulement si $x \in A_j$ et $y = \varphi_j(x)$. Le nombre d'arêtes incidentes à x (noté $v_\Phi(x)$) (resp. le nombre d'arêtes sortant de x) est égal au nombre de bases A_j, B_j (resp. de domaines A_j) le contenant. On note $\Phi[x]$ le graphe de Cayley de x. La métrique d_Φ est la plus grande qui place à distance 1 deux points joints par une arête (s'ils sont distincts). Autrement dit, $d_\Phi(x, y) = n$ si et seulement si n est le minimum des longueurs des Φ-mots de x à y. On dira que Φ est un **graphage de la relation** $\mathcal{R}$ si $\mathcal{R}_\Phi \simeq \mathcal{R}$.

Définition I.2. *Si presque chaque orbite a la structure d'un arbre, on dit que Φ est un* **arborage**. *$\mathcal{R}$ est* **arborable** *si elle admet un arborage.*

Vu la dénombrabilité de l'ensemble des Φ-mots, Φ est un arborage si et seulement si pour tout Φ-mot ω réduit non vide, l'ensemble $\{x \in \mathrm{dom}(\omega) : \omega(x) = x\}$ des points fixes de ω est de mesure nulle.

Ces structures sont très proches de celles considérés par S. Adams. En particulier, un arborage localement fini (chaque $x \in X$ est contenu dans un nombre fini de bases) définit un *treeing* au sens de [Ada90]. Une différence notable entre nos graphages et les *graphings* de Adams réside dans l'existence éventuelle de *redondances* : on peut avoir des générateurs distincts φ_1 et φ_2 de Φ qui coïncident sur un borélien de mesure > 0.

Exemple I.3. Soit Γ un groupe dénombrable engendré par $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ et qui admet une action $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Aut}(X, \mu)$. La relation $\mathcal{R}_\alpha$ des orbites de l'action coïncide avec la relation $\mathcal{R}_\Phi$ donnée par le graphage $\Phi = \big(\varphi_j : X \to X, x \mapsto \alpha(\gamma_j)(x)\big)_{j=1,2,\dots}$. Ainsi, grâce au résultat de Feldman-Moore rappelé ci-dessus, toute relation (SP) admet un graphage.

On dira que l'action de Γ est **libre** si $\mu\{x/\alpha(\gamma)(x) = x\} = 0$, pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$. Dans ce cas, le graphe de Cayley de presque chaque orbite, s'identifie avec le graphe de Cayley de $(\Gamma; (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots))$. Plus précisément, chaque choix d'un élément x de l'orbite fournit un isomorphisme de graphes de Cayley (où $x \leftrightarrow 1$), mais il n'existe pas, en général, d'identification (mesurable) intrinsèque (cf. Remarque I.4). Si Γ est le groupe libre sur $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p, \cdots$, le graphage Φ est alors un arborage.

Remarque I.4. Supposons $\mu(X) = 1$. L'ordre induit sur chaque orbite par l'ordre sur $[0, 1]$ (via un isomorphisme borélien qui identifie $(X, \mathcal{B}, \mu)$ à $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue) permet, lorsque chaque orbite est finie, de construire un domaine fondamental (choix d'un point par orbite) borélien en ne retenant que l'élément minimal de chaque classe. En revanche, lorsque les classes sont infinies, un domaine fondamental est nécessairement non borélien. C'est pourquoi l'étude de l'espace des orbites ne se ramène pas à celle d'une partie borélienne.

La notation $x \overset{\mathcal{R}}{\sim} y$ ou $x\mathcal{R}y$ signifie que x et y sont dans la même orbite de la relation $\mathcal{R}$. La relation (SP) $\mathcal{S}$ est une **sous-relation** de la relation (SP) $\mathcal{R}$ si pour presque tout $x \in X$, on a $\mathcal{S}[x] \subset \mathcal{R}[x]$. Si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont deux relations (SP) sur (X, μ), on notera $\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2$ la relation qu'elles engendrent, i.e. la plus petite relation (SP) sur (X, μ) pour laquelle, pour tout $x \in X$, l'orbite de x contient $\mathcal{R}_1[x] \cup \mathcal{R}_2[x]$. Si $\Phi_1 = (\varphi_j)_{j \in J_1}$ et $\Phi_2 = (\varphi_j)_{j \in J_2}$ sont deux graphages sur (X, μ), on note $\Phi_1 \vee \Phi_2$ le graphage réunion $(\varphi_j)_{j \in J_1 \cup J_2}$. C'est un graphage de $\mathcal{R}_{\Phi_1} \vee \mathcal{R}_{\Phi_2}$. On dira que $\Psi = (\psi_j)_{j \in J}$ est un **sous-graphage** de $\Phi = (\varphi_j)_{j \in J}$ si pour chaque $j \in J$, les générateurs ψ_j et φ_j coïncident en tous points de $\mathrm{dom}(\psi_j)$ (en particulier, $\mathrm{dom}(\psi_j) \subset \mathrm{dom}(\varphi_j)$).

Notation : $\Phi^{\pm 1} := (\varphi_1, \varphi_1^{-1}, \varphi_2, \varphi_2^{-1}, \ldots, \varphi_n, \varphi_n^{-1}, \ldots)$ est la famille des lettres ou des mots de longueur 1.

I-B Définitions des coûts

Définitions I.5. *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un borélien standard de mesure 1, sans atome.*

(1) *Le* **coût du graphage** $\Phi = (\varphi_j : A_j \to B_j)_{j\in J}$ *sur (X, μ) est la quantité (finie ou non) suivante :* $\mathcal{C}_\mu(\Phi) = \sum_{j\in J} \mu(A_j)$.
(2) *Le* **coût de la relation** *(SP1) $\mathcal{R}$ sur (X, μ) est la borne inférieure des coûts des graphages de $\mathcal{R}$:* $\mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}) = \inf\{\mathcal{C}_\mu(\Phi)/\mathcal{R}_\Phi = \mathcal{R}\}$.
(3) *Le* **coût d'un groupe** *dénombrable Γ est la borne inférieure des coûts des relations $\mathcal{R}_\alpha$, où α parcourt la famille des actions* **libres** *de Γ, préservant la mesure, sur des (X, μ) de* **probabilité** *:* $\mathcal{C}(\Gamma) = \inf\{\mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_\alpha)/\alpha$ *action libre de Γ sur (X, μ) avec $\mu(X) = 1$*$\}$.
(4) *Un groupe est dit* **à prix fixe** *si les relations $\mathcal{R}_\alpha$ de toutes ses actions libres α ont le même coût (sur (X, μ) de probabilité).*

Il est immédiat que deux relations (SP1) isomorphes ont même coût. Le coût dépend de la mesure μ. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on omettra la mesure en indice. Notons que le nombre $v_\Phi(x)$ de voisins (la valence de x dans son Φ-graphe de Cayley) est égal, en moyenne, à 2 fois le coût du graphage Φ : $\int_X v_\Phi(x) d\mu(x) = 2 \cdot \mathcal{C}_\mu(\Phi)$.

Remarque I.6. Si l'espace (X, μ) est un espace de mesure finie différente de 1 on appellera encore, par abus, coût du graphage $\Phi = (\varphi_j : A_j \to B_j)_{j\in J}$ sur (X, μ) la quantité $\mathcal{C}_\mu(\Phi) := \sum_{j\in J} \mu(A_j)$.

Remarque I.7. Un groupe dénombrable Γ admet toujours des actions (presque) libres préservant la mesure sur des boréliens standards de probabilité, les **décalages de Bernoulli** : soit $Y = \{0, 1, \cdots, n\}$ un ensemble fini, muni d'une mesure de probabilité ν qui donne à chaque élément une mesure non nulle. Le borélien standard $X = Y^\Gamma$ des applications de Γ dans Y, muni de la tribu et de la mesure produits, admet une action α presque libre de Γ, par $\alpha(\gamma)(f(\cdot)) = f(\gamma^{-1}\cdot)$. Si Γ est infini (resp. si γ est un élément d'ordre infini de Γ) alors cette action (resp. l'action restreinte à γ) est ergodique. On peut aussi voir [Dye59, lemma 2.1] pour un autre exemple.

Le coût d'un groupe de type fini est toujours majoré par le nombre de ses générateurs (exemple I.3).

On se demandera si les bornes inférieures qui interviennent dans les définitions (2) et (3) sont atteintes. Le théorème IV.1 donnera une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphage Φ réalise le coût de la relation qu'il engendre. Pour la définition (3), voir VI.21.

Question I.8 : Existe-t-il des groupes qui ne soient pas à prix fixe ?

I-C Exemples des relations finies

L'exemple des relations d'équivalence (SP1) finies (i.e. à orbites finies) est particulièrement simple à traiter. Cela repose sur l'existence d'un **domaine fondamental** pour la relation, i.e. une partie $D \subset X$ mesurable, qui rencontre presque chaque orbite en un et un seul point (voir remarque I.3). Ces résultats sont essentiellement contenus dans [Lev95]. C'est parce qu'on rencontrera de telles relations qu'on n'a pas pu restreindre notre étude aux seules relations *ergodiques*.

Proposition I.9 [Lev95]. *Soit $\mathcal{R}$ une relation (SP1) sur (X, μ) (avec $\mu(X) = 1$). Supposons que ses orbites sont (presque toutes) finies (il est équivalent de dire que $\mathcal{R}$ possède un domaine fondamental D), alors :*

(1) $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = 1 - \mu(D)$,
(2) *$\mathcal{R}$ admet un arborage,*
(3) *tout arborage est de coût exactement $\mathcal{C}(\mathcal{R})$.*

Preuve. Considérons un graphage Φ de $\mathcal{R}$ et un domaine fondamental D. Pour chaque $x \in D$, appelons $S(x)$ (resp. $V(x)$) le nombre de sommets (resp. la somme des valences des sommets) du Φ-graphe de Cayley de l'orbite de x. On a $\int_D S(x) d\mu(x) = \mu(X)$ et presque toute orbite est finie. Ces fonctions mesurables vérifient l'inégalité des graphes connexes finis : $1/2.V(x) \geq S(x) - 1$, avec égalité si et seulement si le graphe de Cayley $\Phi[x]$ de x est un arbre. Par intégration sur D, on obtient $\mathcal{C}(\Phi) \geq \mu(X) - \mu(D)$, avec égalité si et seulement si presque chaque graphe est un arbre. Inversement, par finitude des orbites, il existe une numérotation mesurable des sommets et il est facile d'exhiber un arborage. Ce joli raisonnement est dû à G. Levitt (non publié sous cette forme). $\square$

Corollaire I.10. *Si Γ est un groupe fini de cardinal $|\Gamma|$, alors il est à prix fixe et $\mathcal{C}(\Gamma) = 1 - \frac{1}{|\Gamma|}$.*

Preuve. Considérons une action libre (SP1) de Γ. Chaque orbite a $|\Gamma|$ éléments ; un domaine fondamental mesure donc $1/|\Gamma|$. $\square$

I-D Exemples des rotations du cercle

Considérons l'action sur $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ du groupe $\mathbf{Z}^2$ engendré par deux translations a et b définies par deux nombres réels l_a, l_b tels que $1, l_a, l_b$ soient rationnellement indépendants. Pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve un borélien A_ε de mesure $\leq \varepsilon$ qui rencontre presque toute a-orbite (i.e. dont le saturé $\bar{A}$ par a est de mesure pleine) (par ergodicité, c'est en fait le cas de tout borélien de mesure > 0). Soit b_ε la restriction de b à A_ε. Le graphage $\Phi_\varepsilon = (a, b_\varepsilon)$ de coût $1 + \varepsilon$ possédera presque les mêmes orbites que $\Phi = (a, b)$, de coût 2. En effet, pour tout $x \in \bar{A}$, il existe un n tel que $a^n(x) \in A_\varepsilon$. Alors $a^{-n} \circ b_\varepsilon \circ a^n(x)$ est défini et égale $b(x)$. En fait (cf. [Dye63]), cette relation est engendrée par un automorphisme de $\mathbf{S}^1$ préservant la mesure de Lebesgue. On verra (partie III) qu'elle est arborable, de coût 1.

I-E Premières propriétés

Proposition I.11. *Si un graphage Φ de coût fini réalise le coût de $\mathcal{R}$, alors Φ est un arborage.*

Soit Φ un graphage sur (X, μ). Soit $m = \varphi_{i_l}^{\varepsilon_l} \cdots \varphi_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdot \varphi_{i_1}^{\varepsilon_1}$ un Φ-mot. Appelons $m_j := \varphi_{i_j}^{\varepsilon_j} \cdots \varphi_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdot \varphi_{i_1}^{\varepsilon_1}$ les sous-mots à droite, et $m_0 = 1$.

Lemme I.12. *Si A est un borélien de mesure > 0, contenu dans le domaine de m, tel que $\forall x \in A\ m(x) = x$, mais tel que les itérés intermédiaires, $m_j(x)$ ($j = 0, \cdots, l-1$) sont deux à deux distincts, alors il existe une partie A' de A, de mesure > 0 dont les itérés intermédiaires $m_j(A')$ sont deux à deux disjoints.*

Preuve du lemme I.12. X étant un borélien standard, prenons $X = [0, 1]$. Par le théorème de Lusin, pour tout $j = 1, \cdots, l$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un borélien U_j contenu dans $m_{j-1}(A)$ de mesure $< \varepsilon$, tel que $\varphi_{i_j}^{\varepsilon_j}$ soit continue sur $m_{j-1}(A) \setminus U_j$. Prenons $\varepsilon < \mu(A)/l$ et soit $\overline{A}$ l'ensemble $\overline{A} = U_1 \cup m_1^{-1}(U_2) \cup \cdots \cup m_{l-1}^{-1}(U_l)$. La mesure $\mu(A \setminus \overline{A})$ est > 0. Considérons un point de densité x de $A \setminus \overline{A}$. Ses itérés étant deux à deux distincts et par continuité, il existe un voisinage A' (de mesure positive par densité) de x dans $A \setminus \overline{A}$ dont les itérés sont deux à deux disjoints. □

Preuve de la proposition I.11. Par contraposition, si Φ n'est pas un arborage, on trouve (par dénombrabilité de l'ensemble des Φ-mots) un mot m et un borélien A satisfaisant les hypothèses du lemme. Supprimer A' dans le domaine de $\varphi_{i_1}^{\varepsilon_1}$ fournit un graphage de coût strictement inférieur qui a les mêmes orbites. □

Rappelons un lemme utile (voir par exemple [Lev95, prop. 1]) qui est immédiat dans le cas ergodique :

Lemme I.14. *Si $\mathcal{R}$ est une relation à orbites infinies, alors il existe une suite décroissante de boréliens Y_n, dont la mesure tend vers 0, qui rencontrent presque chaque orbite.*

Remarque. Le caractère standard de l'espace X intervient dans ces deux lemmes.

II Invariances et induction

II-A Équivalence orbitale

Il est usuel dans la théorie de confondre deux relations (SP1) si elles sont *orbitalement équivalentes* :

Définition II.1. *Deux relations (SP1) $\mathcal{R}_1$ sur (X_1, μ_1) et $\mathcal{R}_2$ sur (X_2, μ_2) sont* **orbitalement équivalentes** *(OE) s'il existe un isomorphisme borélien $f : X_1' \to X_2'$, entre des boréliens $X_1' \subset X_1$ et $X_2' \subset X_2$ saturés de mesures totales, tel que*

(i) *f envoie μ_1 sur une mesure équivalente à μ_2,*
(ii) *pour tout $x \in X_1'$, on a $f(\mathcal{R}_1[x]) = \mathcal{R}_2[f(x)]$.*

La différence avec des relations isomorphes réside dans (i). Ici, l'importance du choix de la mesure invariante dans sa classe fait que le coût n'est pas un invariant d'équivalence orbitale. Cependant, $\mathcal{R}_2$ préserve aussi la mesure $f_*\mu_1$ (tout automorphisme h de X_2 dont le graphe est contenu dans $\mathcal{R}_2$ fournit un automorphisme $f^{-1} \cdot h \cdot f$ de X_1 (l'étendre par l'identité sur $X_1 \setminus X_1'$) dont le graphe est contenu dans $\mathcal{R}_1$, qui préserve donc μ_1). Si $\mathcal{R}_2$ est ergodique, alors $\mathcal{R}_1$ est ergodique et $f_*\mu_1 = \mu_2$. Les relations sont alors isomorphes. On en déduit :

Invariance II.2. *Si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont deux relations (SP1)* **ergodiques** *orbitalement équivalentes sur (X_1, μ_1) et (X_2, μ_2), de probabilité, alors $\mathcal{C}_{\mu_1}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{C}_{\mu_2}(\mathcal{R}_2)$.*

Invariance II.3. *Si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont deux relations (SP1) OE sur (X_1, μ_1) et (X_2, μ_2), de probabilité, et si $\mathcal{R}_2$ est donnée par les orbites d'une action libre d'un groupe Γ_2* **à prix fixe***, alors $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ ont même coût.*

Dans ce cas, on n'a pas besoin de l'hypothèse ergodique. En effet, $\mathcal{C}_{\mu_2}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{C}(\Gamma_2) = \mathcal{C}_{f_*\mu_1}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{C}_{\mu_1}(\mathcal{R}_1)$.

Corollaire II.4. *Si deux groupes à prix fixes ont des actions libres préservant la mesure, orbitalement équivalentes, alors ils ont le même coût.*

II-B Induction

Si on ne s'est pas restreint à des espaces de probabilité, c'est parce qu'on a besoin de la notion de relation induite.

Définition II.5. *La relation (SP) $\mathcal{R}$ sur (X, μ)* **induit** *la relation $\mathcal{R}_{|Y}$ sur $(Y, \mu_{|Y})$ si Y est un borélien de mesure > 0 de X et pour tout $x, y \in Y$, $(x\mathcal{R}_{|Y}y) \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y)$.*

Soit Φ un graphage de $\mathcal{R}$. Si on considère tous les Φ-mots et qu'on restreint l'isomorphisme associé à chacun, de sorte que les domaines (éventuellement vides) et les buts soient contenus dans Y, on obtient un graphage grossier de $\mathcal{R}_{|Y}$. Le lemme II.8 qui vient, décrit une manière d'en trouver un plus malin qui permettra de prouver le résultat que voici. On se place toujours dans le cas où la mesure est préservée, mais on autorise μ à n'être que σ-finie.

Proposition II.6. (induction). *Soit $Y \subset X$ un borélien qui rencontre toutes les orbites de la relation (SP) $\mathcal{R}$ sur (X, μ), alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(1) *$\mathcal{R}$ est arborable si et seulement si $\mathcal{R}_{|Y}$ est arborable.*
(2) *Si $0 < \mu(X) < \infty$, alors en posant $\mu_1 = \frac{\mu}{\mu(X)}$ et $\nu_1 = \frac{\mu_{|Y}}{\mu(Y)}$, on a*

$$\mu(X) \cdot (\mathcal{C}_{\mu_1}(\mathcal{R}) - 1) = \mu(Y) \cdot (\mathcal{C}_{\nu_1}(\mathcal{R}_{|Y}) - 1).$$

Remarque II.7. Si on suppose que $\mathcal{R}$ est standard, mais que μ est seulement quasi-préservée, alors la première partie de la proposition II.6 reste vraie, avec la même preuve.

Lemme II.8. *Soit Φ un graphage de la relation (SP) $\mathcal{R}$ sur (X, μ), soit Y un borélien de X qui rencontre toutes les orbites et soit $\mathcal{R}_{|Y}$ la relation induite. On peut, quitte à découper les domaines de ses générateurs, partitionner Φ en deux sous-graphages disjoints (Φ_v comme "vertical" et Φ_h comme "horizontal") $\Phi = \Phi_v \vee \Phi_h$ qui vérifient :*

(1) *Φ_v est un arborage dont chaque orbite rencontre Y en un et un seul point*
(2) *faire glisser (cf. II.8.1, ci-dessous) Φ_h le long de Φ_v jusque dans Y fournit un graphage Ψ_h de $\mathcal{R}_{|Y}$*
(3.1) *si Ψ' est un autre graphage de $\mathcal{R}_{|Y}$, alors $\Phi' = \Psi' \vee \Phi_v$ est un graphage de $\mathcal{R}$*
(3.2) *si Φ est un arborage de $\mathcal{R}$, alors Ψ_h est un arborage de $\mathcal{R}_{|Y}$*
si Ψ' est un arborage de $\mathcal{R}_{|Y}$, alors Φ' est un arborage de $\mathcal{R}$

Si $\mu(X)$ est finie, alors Φ_v est à orbites finies, et

(4) *$\mathcal{C}_\mu(\Phi_v) = \mu(X) - \mu(Y)$ (cf. Remarque I.6).*
(5) *$\mathcal{C}_\mu(\Phi_h) = \mathcal{C}_{\mu|Y}(\Psi_h)$ (cf. Remarque I.6).*

Preuve du lemme II.8. Soit $Y_0 = Y$ et $Y_i = \{x \in X / d_\Phi(x, Y_0) = i\}$, où $i \in \mathbf{N}$. On rappelle que d_Φ est la métrique sur les orbites donnée par le graphage Φ. Quitte à partitionner domaines et buts des générateurs, puis remplacer certains d'entre eux par leur inverse, on peut supposer que pour chaque générateur $\varphi : A \to B$, domaines et buts sont chacun contenus dans **un** Y_i et de plus le domaine A est *plus haut* que le but : $A \subset Y_i$ et $B \subset Y_j$, avec $i \geq j$. Numérotons les générateurs, et appelons Z_i^φ (pour $i > 0$ et $\varphi \in \Phi$), l'ensemble des $x \in Y_i$ pour lesquels φ est le premier générateur défini en x dont l'image est dans Y_{i-1} (considérer, pour chaque $x \in Y_i$ avec $i > 0$, un mot de longueur i de x à Y pour s'assurer qu'un tel générateur existe). Les Z_i^φ fournissent une partition de $X \setminus Y$:

$$X \setminus Y = \coprod_{i,\varphi} Z_i^\varphi \quad \text{(II.8.a.)}$$

Définition de Φ_v et Φ_h : On *coupe en deux* chaque générateur $\varphi : A \to B$, avec $A \subset Y_i$, en définissant :

$\overline{\delta}_\varphi$ la restriction de φ à Z_i^φ,

δ_φ la restriction de φ à $\mathrm{dom}(\varphi) \setminus Z_i^\varphi$

Appelons Φ_v (resp. Φ_h) la famille des $\overline{\delta}_\varphi$ (resp. δ_φ). Pour chaque $x \in X \setminus Y$, il existe un unique générateur de Φ_v défini en x, et il *descend* vers le Y_i d'indice précédent. Il existe donc un unique Φ_v-mot réduit m_x de x à Y. Les Φ_v-orbites sont des arbres (item 1), qui rencontrent Y en un unique point, leur *racine*.

Dans le cas $\mu(X) < \infty$, la finitude des Φ_v-orbites repose sur l'existence du domaine fondamental Y et on a donc bien l'item (4) : $\mathcal{C}_\mu(\Phi_v) = \sum_{\overline{\delta} \in \Phi_v} \mu(\mathrm{dom}(\overline{\delta})) = \mu(X) - \mu(Y)$, par II.8.a. et I.9.

II.8.1. Glissement de Φ_h le long de Φ_v. Quitte à décomposer domaines et buts des générateurs de Φ_h, on peut supposer que pour chaque $\delta : A \to B$, $\delta \in \Phi_h$, il existe **un** Φ_v-mot $m_{A,\delta}$ (resp. $m_{B,\delta}$) qui pour tout $x \in A$ (resp. $y \in B$), est **le** Φ_v-mot de x (resp. y) à Y. Si A (resp. B) est contenu dans Y, ce mot sera par définition égal à l'identité. On pose $\psi_\delta = (m_{B,\delta}).\delta.(m_{A,\delta})^{-1}$, pour $\delta \in \Phi_h$ et on appelle Ψ^h l'ensemble des ψ_δ. On a fait *glisser* δ en ψ_δ.

Le domaine de ψ_δ est $(m_{A,\delta})^{-1}(A)$, alors l'item (5) est vérifié. Au niveau de chaque Φ-graphe de Cayley, on a choisi une forêt de sous-arbres enracinés qui partitionne l'ensemble des sommets, et on a fait glisser toutes les autres arêtes le long de ces sous-arbres jusqu'aux racines. Les opérations de glissement ne modifiant pas le type topologique des graphes de Cayley, les items (2), (3.1) et (3.2) se vérifient alors immédiatement. □

Preuve de la proposition II.6. Du lemme II.8, on déduit immédiatement la propriété (1).

Si $\mu(X) < \infty$, on a : $\mathcal{C}_{\mu|Y}(\Psi_h) = \mathcal{C}_\mu(\Phi_h) = \mathcal{C}_\mu(\Phi) - \mathcal{C}_\mu(\Phi_v) = \mathcal{C}_\mu(\Phi) - (\mu(X) - \mu(Y))$. Puisque Ψ_h et Φ sont respectivement des graphages de $\mathcal{R}_{|Y}$ et $\mathcal{R}$, on obtient en normalisant les mesures que : $\mu(Y) \cdot \mathcal{C}_{\nu_1}(\mathcal{R}_{|Y}) \leq \mu(X) \cdot \mathcal{C}_{\mu_1}(\mathcal{R}) - (\mu(X) - \mu(Y))$. Inversement, si Ψ' engendre $\mathcal{R}_{|Y}$ alors $\Psi' \vee \Phi_v$ engendre $\mathcal{R}$ et on a : $\mu(X) \cdot \mathcal{C}_{\mu_1}(\mathcal{R}) \leq \mu(Y) \cdot \mathcal{C}_{\nu_1}(\Psi') + (\mu(X) - \mu(Y))$. D'où le résultat. □

II-C Équivalence orbitale stable

Définition II.9. *Deux relations (SP1) sont* **stablement orbitalement équivalentes** *(SOE) si elles sont orbitalement équivalentes en restriction cha-*

cune à un borélien qui rencontre presque toutes les orbites : il existe $Y_1 \subset X_1$ (resp. $Y_2 \subset X_2$) qui rencontrent presque toutes les orbites de $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_2$) tels que les relations induites $\mathcal{R}_{1|Y_1}$ et $\mathcal{R}_{2|Y_2}$ soient orbitalement équivalentes.

Si deux relations (SP1) sont OE, alors elles sont SOE.

Corollaire II.10. *Si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont stablement orbitalement équivalentes, alors $\mathcal{R}_1$ est arborable si et seulement si $\mathcal{R}_2$ est arborable.*

C'est un corollaire immédiat de la proposition d'induction II.6.(1).

Invariance II.11. *Si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont deux relations (SP1) sur (X_1, μ_1) et (X_2, μ_2), ergodiques et stablement orbitalement équivalentes et si $\mathcal{C}(\mathcal{R}_1) = 1$ (resp. $= \infty$), alors $\mathcal{C}(\mathcal{R}_2) = 1$ (resp. $= \infty$)*
Si Γ_1 et Γ_2 sont deux groupes à prix fixes qui ont des actions α_1 et α_2, libres ergodiques et stablement orbitalement équivalentes et si $\mathcal{C}(\Gamma_1) = 1$ (resp. $= \infty$), alors $\mathcal{C}(\Gamma_2) = 1$ (resp. $= \infty$).

Les quatre énoncés contenus dans ce corollaire de la proposition II.6 se démontrent de manière analogue. On ne détaille que celui sur les groupes et le coût égal à 1 : cela repose sur la nullité (obtenue successivement) des expressions suivantes.

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{C}(\Gamma_1) - 1\\
&= \mathcal{C}_{\mu_1}(\mathcal{R}_{\alpha_1}) - \mu_1(X)\\
&= \mu_1(Y_1) \cdot (\mathcal{C}_{\mu_1}(\mathcal{R}_{\alpha_1|Y_1}) - 1)\\
&= f_*\mu_1(Y_2) \cdot (\mathcal{C}_{f_*\mu_1}(\mathcal{R}_{\alpha_2|Y_2}) - 1)\\
&= \mu_2(Y_2) \cdot (\mathcal{C}_{\mu_2}(\mathcal{R}_{\alpha_2|Y_2}) - 1) \text{ (proportionnalité de } f_*\mu_1 \text{ et } \mu_2)\\
&= \mathcal{C}_{\mu_2}(\mathcal{R}_{\alpha_2}) - 1\\
&= \mathcal{C}(\Gamma_2) - 1.
\end{aligned}$$

Évidemment, la notion la mieux adaptée à notre problème est celle qu'on appellera **équivalence orbitale stable isométrique** où $f : Y_1 \to Y_2$ envoie $\mu_{1|Y_1}$ sur $\mu_{2|Y_2}$ (au lieu d'une mesure seulement équivalente). La proposition II.6 donne alors :

Corollaire II.12. *La quantité $\mu(X) \cdot (\mathcal{C}_{\mu_1}(\mathcal{R}) - 1)$ est un invariant d'équivalence orbitale stable isométrique (où $\mu_1 = \frac{\mu}{\mu(X)}$).*

C'est en ce sens qu'on peut dire qu'on a un invariant de l'*espace mesuré des orbites*. Lorsque les orbites sont ou bien toutes finies ou bien toutes infinies et que la quantité $\mu(X) \cdot (1 - \mathcal{C}_{\mu_1}(\mathcal{R}))$ est positive ou nulle, elle correspond alors à la *mesure de l'espace des orbites* de [Lev95].

Exemple II.14. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement mesuré sur une variété V compacte. Soit X une sous-variété de V, transverse à $\mathcal{F}$, qui rencontre toutes les feuilles. Supposons que la mesure μ déposée sur X soit finie et sans atomes, alors le pseudogroupe d'holonomie de $\mathcal{F}$ sur (X, μ) définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ préservant μ. Le choix d'une autre transversale totale Y conduit (par équivalence de Kakutani) à une relation $\mathcal{S}$ isométriquement SOE à $\mathcal{R}$.

Exemple II.15. Soient Γ et Λ deux réseaux d'un groupe de Lie G. Fixons une mesure de Haar μ sur G (elles sont toutes proportionnelles). L'action $\overline{\alpha}$ de Γ sur G par multiplication à gauche ($\overline{\alpha}(\gamma)(g) = \gamma g$) et l'action $\overline{\beta}$ de Λ par multiplication à droite ($\overline{\beta}(\lambda)(g) = g\lambda^{-1}$) ont des domaines fondamentaux X (resp. Y) de μ-mesure finie, elles commutent entre elles et elles préservent la mesure μ. On en déduit donc une action α de Γ sur $(G/\Lambda, \mu) \simeq (Y, \mu)$ et une action β de Λ sur $(\Gamma\backslash G, \mu) \simeq (X, \mu)$. *Ces deux relations $\mathcal{R}_\alpha$ et $\mathcal{R}_\beta$ sont stablement isométriquement orbitalement équivalentes* : les images de X par $\overline{\alpha}(\Gamma)$ partitionnent Y en $Y = \coprod_i Y_i = \coprod_i \overline{\alpha}(\gamma_i)(X_i)$, où les X_i sont des boréliens de X. Posons $X' = \cup X_i$. On peut trouver des $X'_i \subset X_i$ qui forment une partition de X', et soit $Y' = \coprod_i \overline{\alpha}(\gamma_i)(X'_i)$. Les espaces (X', μ) et (Y', μ) sont isomorphes. Les relations d'équivalence $\mathcal{R}_X$, $\mathcal{R}_Y$, $\mathcal{R}_{X'}$ et $\mathcal{R}_{Y'}$ induites par l'action $\overline{\alpha} \times \overline{\beta}$ de $\Gamma \times \Lambda$ sur X, Y, X' et Y' vérifient : $\mathcal{R}_\alpha \overset{OE}{\simeq} \mathcal{R}_Y$, $\mathcal{R}_{Y'} \overset{OE}{\simeq} \mathcal{R}_{X'}$ et $\mathcal{R}_X \overset{OE}{\simeq} \mathcal{R}_\beta$. On en déduit que $\mathcal{R}_\alpha \overset{OE}{\simeq} \mathcal{R}_Y \overset{SOE}{\simeq} \mathcal{R}_X \overset{OE}{\simeq} \mathcal{R}_\beta$. On conclut alors, grâce à la proposition d'induction II.6, avec $\mu_\Gamma = \frac{\mu}{\mu(G/\Lambda)}$ et $\mu_\Lambda = \frac{\mu}{\mu(G/\Gamma)}$, que $\mu(G/\Lambda).(\mathcal{C}_{\mu_\Gamma}(\mathcal{R}_\alpha) - 1) = \mu(G/\Gamma).(\mathcal{C}_{\mu_\Lambda}(\mathcal{R}_\beta) - 1)$.

Notons que si G est connexe, les actions α et β sont presque libres si et seulement si $\Gamma \cap \Lambda \cap Z(G) = \{1\}$, où $Z(G)$ est le centre de G.

Corollaire II.16. *Si Γ et Λ sont deux réseaux à prix fixe d'un groupe de Lie G connexe, alors leurs coûts sont reliés par leur covolumes :* $\mu(G/\Lambda) \cdot (\mathcal{C}(\Gamma) - 1) = \mu(G/\Gamma) \cdot (\mathcal{C}(\Lambda) - 1)$.

Si $\Omega = \Gamma \cap \Lambda \cap Z(G)$ est infini, alors on verra en VI.26 (a) que $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Lambda) = 1$.

Si Ω est fini non trivial, on quotiente la situation par Ω, pour se ramener au cas des actions libres et VI.19 (ii) permettra de conclure.

Corollaire II.17. *Puisque le groupe* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ *(resp.* $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$*), des matrices* 2×2 *de déterminant 1 (resp.* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ *quotienté par son centre), contient un groupe libre* $\mathbf{F}_2$ *comme réseau, alors chaque réseau de* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ *(resp.* $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$*) possède une action (SP1) arborable (voir II.10).*

Le centre de $\mathbf{F}_2$ étant trivial, on est dans la situation $\Omega = \{1\}$ où les action α et β sont presque libres.

III Relations hyperfinies

Après l'exemple des relations finies (cf. I-C) traitons le cas, à la frontière du fini et de l'infini, des relations (SP1) (i.e. $\mu(X) = 1$) *hyperfinies*. Dans cette partie, on rappelle quelques résultats connus et on redonne une preuve de certains.

Définition III.1 [Dye59]. *Une relation (SP1) $\mathcal{R}$ est dite* **hyperfinie** *si elle est isomorphe à une limite croissante de relations finies $\mathcal{R}_n$: pour presque tout $x \in X$, $\mathcal{R}_n[x] \subset \mathcal{R}_{n+1}[x]$ et $\cup_n \mathcal{R}_n[x] = \mathcal{R}[x]$.*

Par exemple, les relations finies sont hyperfinies. On sait que si le groupe Γ admet une action libre (SP1) hyperfinie, alors Γ est moyennable (voir VI.4 pour des exemples). Inversement :

Théorème [OW80]. *Si α est une action libre (SP1) d'un groupe moyennable Γ, alors $\mathcal{R}_\alpha$ est hyperfinie.*

Remarque III.2. Il existe une notion de *relation moyennable*, introduite par R. Zimmer, qui étend naturellement celle de groupe moyennable et qui concerne les relations boréliennes munies d'une classe invariante de mesures (voir par exemple [Zim84]). Le théorème principal de [CFW81] assure que les notions de moyennable et d'hyperfinie coïncident exactement. Le théorème de D. Ornstein et B. Weiss, rappelé ci-dessus, en est un cas particulier. C'est ce dont on aura besoin.

Proposition III.3 [Lev95]. *Soit $\mathcal{R}$ une relation (SP1) et X_i la réunion des orbites à i éléments ($i \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$). Posons $d(\mathcal{R}) = 1 - \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{i} \cdot \mu(X_i)$. On a :*

1. *$\mathcal{C}(\mathcal{R}) \geq d(\mathcal{R})$, en particulier si toutes les orbites de $\mathcal{R}$ sont infinies, alors $\mathcal{C}(\mathcal{R}) \geq 1$.*
2. *$\mathcal{R}$ est hyperfinie si et seulement si elle admet un graphage Φ de coût égal à $d(\mathcal{R})$. Dans ce cas, $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = d(\mathcal{R})$ et Φ est un arborage.*
3. *Si $\mathcal{R}$ est hyperfinie, alors tous ses arborages sont de coût égal à $\mathcal{C}(\mathcal{R})$.*

Commentaire. Pour les relations finies, cette proposition se ramène à la proposition I.9. L'item (2) est une version faible du fait connu suivant : une relation (SP1) à orbites infinies est hyperfinie si et seulement si elle est orbitalement équivalente à une action libre de $\mathbf{Z}$. Le théorème IV.1 consistera à montrer l'item (3) sans l'hypothèse d'hyperfinitude. On pourra alors en déduire qu'une relation de coût $d(\mathcal{R})$ est hyperfinie si et seulement si elle est arborable (corollaire IV.2). S. Adams a établi dans [Ada90] qu'une relation (SP1) arborée est hyperfinie si et seulement si l'arbre associé à (presque) chaque orbite a au plus deux bouts. La preuve de la proposition III.3 donnée dans [Lev95] utilise ce résultat, tandis que nous pouvons nous en passer, grâce aux outils (dont nous avons besoin pour la suite) que nous avons déjà définis. Enfin, on peut reformuler le théorème de [OW80] :

Corollaire III.4. *Les groupes moyennables infinis sont à prix fixe, de coût égal à 1 et toutes leurs actions sont arborables.*

Preuve de la proposition III.3.
-1- Soit Y_i un domaine fondamental ($\mu(Y_i) = 1/i \cdot \mu(X_i)$) pour la relation $\mathcal{R}_{|X_i}$ induite sur X_i pour $i < \infty$ et soit $Y_\infty^\varepsilon \subset X_\infty$ un borélien de mesure $< \varepsilon$ qui rencontre toutes les orbites de $\mathcal{R}_{|X_\infty}$. La réunion X^ε des Y_i et de Y_∞^ε a une mesure qui tend vers $1 - d(\mathcal{R})$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Le coût de la relation induite sur X^ε est relié à celui de $\mathcal{R}$ par la proposition d'induction II.6 :
$\mathcal{C}(\mathcal{R}) - 1 = \mu(X^\varepsilon) \cdot (\mathcal{C}_{\nu_1}(\mathcal{R}_{|X^\varepsilon}) - 1) \geq -\mu(X^\varepsilon)$, d'où le résultat lorsque $\varepsilon \to 0$.
-2- Si Φ est un graphage de $\mathcal{R}$ tel que $\mathcal{C}(\Phi) = d(\mathcal{R})$ alors par -1- $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = d(\mathcal{R})$ et, par la proposition I.11, Φ est un arborage. Pour montrer que $\mathcal{R}$ est hyperfinie, il suffit de considérer le cas où toutes ses orbites sont infinies ($X_\infty = X$, $\mathcal{C}(\Phi) = d(\mathcal{R}) = 1$). Soit Y_n une suite de boréliens donnée par le lemme I.14. En induisant $\mathcal{R}$ sur Y_n, le lemme II.8 décompose Φ en $\Phi_v^n \vee \Phi_h^n$, où Φ_v^n est un arborage à orbites finies, de domaine fondamental Y_n. En jouant sur la numérotation des générateurs (preuve du lemme II.8), on peut supposer que l'arborage Φ_v^n est un sous-graphage de Φ_v^{n+1}. La réunion croissante Φ_v^∞ des Φ_v^n engendre une relation hyperfinie à orbites infinies. C'est donc un sous-graphage de Φ, qui a un coût ≥ 1, donc ses générateurs ont même domaine (mod 0) que ceux de Φ et il engendre une relation isomorphe à $\mathcal{R}$.

Inversement, supposons $\mathcal{R}$ hyperfinie. Soit D_n une suite décroissante de domaines fondamentaux pour les relations finies approximantes $\mathcal{R}_n$. Elle vérifie $\lim_{n\to\infty} \mu(D_n) = 1 - d(\mathcal{R})$. Soit Φ_1 un arborage de $\mathcal{R}_1$, puis, pour chaque n, soit Φ_n un arborage de la relation finie $\mathcal{R}_{n|D_{n-1}}$ induite de $\mathcal{R}_n$ sur D_{n-1}. La proposition I.9 entraîne $\mathcal{C}(\Phi_n) = \mu(D_{n-1}) - \mu(D_n)$. Le graphage réunion des Φ_n est un arborage de $\mathcal{R}$, de coût $\sum_n (\mu(D_{n-1}) - \mu(D_n)) = 1 - (1 - d(\mathcal{R}))$. Considérons maintenant un arborage $\Psi = (\psi_j)_{j\in J}$ de $\mathcal{R}$. Posons $\Psi_n = (\psi_j^n)_{j\in J}$ où ψ_j^n est la restriction de ψ_j dont le graphe est l'intersection du graphe de ψ_j avec $\mathcal{R}_n$. Le graphage Ψ_n est un arborage qui engendre une sous-relation (finie) de $\mathcal{R}_n$, alors on peut trouver un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\Phi_n}$ contenant D_n et par la proposition I.9, $\mathcal{C}(\Psi_n) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_{\Psi_n}) \leq \mu(X) - \mu(D_n)$. Mais Ψ est la réunion croissante des Ψ_n on a donc : $\mathcal{C}(\Psi) = \lim_n \mathcal{C}(\Psi_n) \leq \lim_n \mu(X) - \mu(D_n) = d(\mathcal{R})$. □

Voici enfin un lemme qui sera utile en plusieurs occasions. Il assure que pour le calcul de $\mathcal{C}(\mathcal{R})$, on peut se restreindre aux graphages qui contiennent tous un sous-arborage hyperfini donné :

Lemme III.5. *Soit $\mathcal{R}_0$ une sous-relation hyperfinie de la relation (SP1) $\mathcal{R}$ et Φ_0 un arborage de $\mathcal{R}_0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut compléter Φ_0 en un graphage Φ de $\mathcal{R}$ de coût inférieur à $\mathcal{C}(\mathcal{R}) + \varepsilon$.*

Preuve du lemme III.5. Considérons une suite décroissante D_n de boréliens qui rencontrent toutes les Φ_0-orbites et dont la mesure tend vers $1 - d(\mathcal{R}_0)$ (voir lemme I.14). La proposition d'induction II.6 assure l'existence d'un graphage Φ_1 de la relation induite $\mathcal{R}_{|D_n}$ de $\mathcal{R}$ sur D_n, qui vérifie : $\mathcal{C}_\mu(\Phi_1) \leq$

$\mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}) - 1 + \mu(D_n) + \varepsilon$. Or, $\mathcal{C}(\Phi_0) = d(\mathcal{R}_0)$ et le graphage $\Phi = \Phi_0 \vee \Phi_1$ engendre $\mathcal{R}$. Le résultat s'en déduit. $\square$

IV Arborabilité, produits amalgamés et HNN-extensions

IV-A Relations arborables

On s'intéresse plus particulièrement d'abord aux relations (SP) qui admettent un arborage. Rappelons qu'un arborage est un graphage Φ qui donne à chaque orbite (en dehors d'un ensemble de mesure 0) une structure d'arbre. Il est équivalent de dire que l'ensemble des points fixés par l'isomorphisme partiel associé à un Φ-mot réduit quelconque est de mesure nulle.

Si, par exemple, $\mathcal{R}$ est donnée par une action libre du groupe libre à n générateurs, le choix d'une base de $\mathbf{F}_n$ fournit un arborage de la relation.

Si $\mathcal{R}$ est une relation (SP1) non hyperfinie à orbites infinies qui admet un arborage Φ, le coût de Φ est strictement supérieur à 1 (voir proposition III.3.(2) ou [Lev95, th. 2]). Qu'en est-il du coût de la relation $\mathcal{R}$ elle-même ? Une chose est sûre, on ne peut pas engendrer la même relation avec un sous-arborage strict de Φ, mais on pourrait envisager l'existence d'autres graphages, complètement étrangers à l'arborage, de moindres coûts. Souvenons-nous, par exemple, qu'il existe des actions libres *moyennables*, par rapport à une classe invariante $[\mu]$ de mesures, du groupe libre $\mathbf{F}_n$ ($n \geq 2$) (voir par exemple [Ver89, 4, ex. 2]). La relation d'équivalence est engendrée par **un** automorphisme de X [CFW81]. Elle admet donc un graphage où tous les sommets sont de valence 2 et un autre où tous les sommets sont de valence $2n$. Cependant, notre étude ne s'appliquera pas puisqu'une telle action ne peut préserver aucune mesure de probabilité dans la classe $[\mu]$.

Le théorème qui vient, annoncé dans [Gab98] est le résultat fondateur de ce papier et répond à la question. Il assure, en particulier, l'existence de relations (SP1) de coût strictement supérieur à 1. Les résultats à venir (IV-B et IV-C) sur les produits amalgamés ou les HNN-extensions en sont, d'une certaine manière, des généralisations. Les preuves sont données en IV-D.

Théorème IV.1. *Si Φ est un arborage de la relation (SP1) $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = \mathcal{C}(\Phi)$.*

On a déjà vu en I.11 la réciproque partielle : si Φ est un graphage de coût fini de la relation (SP1) $\mathcal{R}$ et si $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = \mathcal{C}(\Phi)$, alors Φ est un arborage. Voir la proposition VI.21 pour un complément concernant le coût des groupes.

Corollaire IV.2. *Soit $\mathcal{R}$ une relation (SP1) de coût égal à 1, à orbites infinies. $\mathcal{R}$ est hyperfinie si et seulement si $\mathcal{R}$ est arborable.*

En effet, un arborage de $\mathcal{R}$ sera de coût égal à 1 (théorème IV.1), et la proposition III.3 permet de conclure.

Corollaire IV.3. *Pour tout $c \in [0, \infty]$, il existe une relation arborable de coût c. Pour des $c \geq 1$, on peut les choisir ergodiques ; elles seront alors deux à deux non orbitalement équivalentes.*

En particulier, il existe des relations de coût infini. Elles ne sont donc réalisées par l'action d'aucun groupe de type fini. Voir aussi VI.14 et VI.16.

Preuve du corollaire IV.3. Considérons l'action libre (SP1) α du groupe libre $\mathbf{F}_\infty$ sur une infinité d'éléments $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$, donnée par le décalage de Bernoulli sur $X = \{0, 1\}^{\mathbf{F}_\infty}$ (remarque I.7). Les restrictions φ_i^c des isomorphismes $\alpha(a_i)$ de X à des boréliens A_i^c tels que $\sum_{i\in\mathbf{N}} \mu(A_i^c) = c$ fournissent un arborage de coût c d'une sous-relation $\mathcal{R}^c$ de $\mathcal{R}_\alpha$. Si $c \geq 1$, imposons $A_1^c = X$. Ces relations $\mathcal{R}^c$ sont alors ergodiques (l'élément a_1 agit ergodiquement), elles sont donc deux à deux non orbitalement équivalentes (invariance II.2). □

Théorème IV.4. *Une sous-relation d'une relation arborable est elle-même arborable.*

Ce théorème, analogue au théorème du sous-groupe de Nielsen-Schreier, “tout sous-groupe d'un groupe libre est libre” permettra de montrer la non-arborabilité des actions de certains groupes (voir par exemple VI.14, VI.18 et VI.22). On se placera dans le cas des relations (SP1), mais notons que si la mesure μ n'est plus supposée invariante mais seulement quasi-invariante (le saturé des boréliens de mesure nulle est de mesure nulle) la même preuve donne encore le même énoncé IV.4.

IV-B Produits amalgamés

Soit $\mathcal{R}$ une relation (SP1) sur le borélien standard (X, μ). Considérons deux sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ qui *engendrent* $\mathcal{R}$, c'est-à-dire que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2$ est la plus petite relation d'équivalence contenant $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ (comme parties de $X \times X$). Soit $\mathcal{R}_3$ une sous-relation commune à $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. On veut donner un sens à l'idée que toute la redondance dans la définition de $\mathcal{R}$ à partir de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ est concentrée dans $\mathcal{R}_3$.

Définition IV.5 : suite réduite. *Une suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de points de X est dite réduite si*
• *chaque (x_i, x_{i+1}) appartient à l'un des facteurs $\mathcal{R}_1$ ou $\mathcal{R}_2$,*
• *deux couples successifs (x_{i-1}, x_i) et (x_i, x_{i+1}) appartiennent à des facteurs distincts*
• *si $n > 2$, aucun (x_i, x_{i+1}) n'appartient à $\mathcal{R}_3$*
• *si $n = 2$ alors $x_1 \neq x_2$.*

Définition IV.6 : produit amalgamé. *On dit que $\mathcal{R}$ est le produit amalgamé de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ au-dessus de $\mathcal{R}_3$ et on note*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 *_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2$$

si pour toute suite réduite $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *(en dehors d'un borélien de mesure nulle), on a* $x_1 \neq x_n$.

Autrement dit :
pour presque tout $2p$-uplet cyclique $(x_j)_{j\in\mathbf{Z}/2p\mathbf{Z}}$, tel que

$$x_{2i-1} \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} x_{2i} \overset{\mathcal{R}_2}{\sim} x_{2i+1}, \forall i \in \mathbf{Z}/2p\mathbf{Z}, \text{ il existe } j \in \mathbf{Z}/2p\mathbf{Z} \text{ tel que } x_j \overset{\mathcal{R}_3}{\sim} x_{j+1}.$$

Remarque IV.7. Il est facile de voir, par récurrence en réduisant la longueur du cycle, qu'on peut même trouver un tel $j \neq 2p$.

Cette notion de relation qui se décompose comme le produit amalgamé de sous-relations est évidemment à rapprocher de celles de “groupe qui est produit amalgamé de sous-groupes”. Le *théorème de forme normale* qui caractérise ces groupes (voir, par exemple, [LS77, th. IV.2.6]) est ici adopté comme définition.

Exemple IV.8. Si α est une action libre du produit amalgamé $\Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2$, alors la relation $\mathcal{R}_\alpha$ est naturellement le produit amalgamé des relations $\mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_1}$ et $\mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_2}$ au-dessus de $\mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_3}$.

Définition IV.9 : produit libre. *Dans le cas particulier où $\mathcal{R}$ est le produit amalgamé de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ au-dessus de la relation triviale (pour presque tout x, $\mathcal{R}_3[x] = \{x\}$), on dit alors que $\mathcal{R}$ est le produit libre de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, et on le note*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_2$$

Autrement dit :
tout $2p$-uplet cyclique $(x_j)_{j\in\mathbf{Z}/2p\mathbf{Z}}$, avec $p > 0$, tel que $x_{2i-1} \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} x_{2i} \overset{\mathcal{R}_2}{\sim} x_{2i+1}$, $\forall i \in \mathbf{Z}/2p\mathbf{Z}$, n'est pas réduit : il existe deux points consécutifs égaux.

On dit que deux relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont *en produit libre* ou *indépendantes* si la relation $\mathcal{R}$ qu'elles engendrent est le produit libre $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_2$. Il n'y a aucune redondance entre elles.

Exemple IV.10. Si Φ est un arborage sur X, alors toute partition $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$ décompose $\mathcal{R}_\Phi$ en produit libre $\mathcal{R}_{\Phi_1} * \mathcal{R}_{\Phi_2}$.

Exemple IV.11. Supposons que $\mathcal{R}_3$ est une relation finie et soit D un domaine fondamental. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- la relation $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 *_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2$ est produit amalgamé de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ au-dessus de $\mathcal{R}_3$
- la relation induite $\mathcal{R}_{|D}$ est produit libre des relations induites $\mathcal{R}_{1|D}$ et $\mathcal{R}_{2|D}$
- $\mathcal{R}$ est le produit libre de $\mathcal{R}_1$ avec la relation $\mathcal{R}_2'$ triviale en dehors de D et donnée par $\mathcal{R}_{2|D}$ sur D.

Exemple IV.12. S. Adams et R. Spatzier ont montré que les actions libres α (SP1) ergodiques des groupes (infinis) ayant la propriété (T) de Kazhdan ne sont pas arborables [AS90, th. 1.8]. On peut ajouter que $\mathcal{R}_\alpha$ ne peut pas se décomposer comme produit libre de deux sous-relations ergodiques.

En effet, une décomposition de $\mathcal{R}_\alpha$ en produit libre fournit (avec la terminologie de [AS90]) un cocycle à valeurs dans le groupe $\Gamma_1 * \Gamma_2$, produit libre de deux copies de Γ. Le théorème 1.1 de [AS90] dit alors précisément que le cocycle est cohomologue à un cocycle à valeurs dans l'un des groupes Γ_i. Cela suffit pour conclure.

Remarque IV.14. Étant donnés deux groupes, il existe un groupe abstrait qui en est le produit libre ; mais étant données deux relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, il n'est pas raisonnable de chercher à définir *une* relation qui serait *leur* produit libre. En effet, il existe au moins deux actions (SP1) non orbitalement équivalentes du groupe libre $\mathbf{F}_2$ (voir par exemple [Ver89, p. 89, ex. 3]). Chacune d'elles est produit libre de deux **Z**-actions, lesquelles sont toutes orbitalement équivalentes entre elles par le théorème de [Dye59].

Théorème IV.15. *Soit (X, μ) et $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 *_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2$ une relation (SP1), produit amalgamé de deux relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ qui sont de coûts finis au dessus de la relation* **hyperfinie** *$\mathcal{R}_3$ alors :*

$$\mathcal{C}(\mathcal{R}) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{C}(\mathcal{R}_2) - \mathcal{C}(\mathcal{R}_3).$$

La preuve sera donnée en IV.36. Bien entendu, le coût de la relation hyperfinie $\mathcal{R}_3$ vaut 1 si et seulement si ses orbites sont infinies. Sinon, il est donné par la proposition III.3. Il serait intéressant d'étendre ce théorème au cas des relations de coût infini. Ce théorème admet une réciproque partielle, prouvée en IV.38 :

Théorème IV.16. *Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations (SP1) de coûts finis sur (X, μ), soit $\mathcal{R}$ la relation qu'elles engendrent et soit $\mathcal{R}_3$ une sous-relation* **finie** *de $\mathcal{R}_1$ et de $\mathcal{R}_2$.*
Si $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{C}(\mathcal{R}_2) - \mathcal{C}(\mathcal{R}_3)$, alors $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 *_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2$.

Remarques IV.17. On trouvera en VI.8 des exemples montrant que ces deux théorèmes tombent en défaut sans les hypothèses sur $\mathcal{R}_3$. Si on appelle $n(\Gamma)$ le nombre minimal de générateurs du groupe Γ, le théorème de Grushko assure, pour les produits libres : $n(\Gamma_1 * \Gamma_2) = n(\Gamma_1) + n(\Gamma_2)$. Le théorème IV.15, avec $\mathcal{R}_3$ triviale en fournit un analogue mesurable pour les relations. Spécialisons les théorèmes IV.15 et IV.16 au cas des produits libres :

Cas particulier IV.18. *Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations (SP1) de coûts finis sur (X, μ) et soit $\mathcal{R}$ la relation qu'elles engendrent. On a l'équivalence des deux conditions suivantes :*

– $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_2$ *(i.e. $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont indépendantes)*
– $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{C}(\mathcal{R}_2)$

On peut envisager la quantité $\mathcal{C}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{C}(\mathcal{R}_2) - \mathcal{C}(\mathcal{R})$ comme une “mesure de la dépendance” entre les deux relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.

IV-C HNN-extensions

Si on a parlé de produit amalgamé, il est naturel d’envisager ensuite la notion de HNN-extension. Les données sont alors une relation (SP1) $\mathcal{R}$ sur (X, μ), une sous-relation $\mathcal{R}_1$, un isomorphisme préservant la mesure $f : A \to B$ entre deux boréliens de X et une sous-relation $\mathcal{R}_3$ de $\mathcal{R}_1$, triviale en dehors de B (i.e. $\mathcal{R}_3[x] = \{x\}$, pour $x \in X \setminus B$). Considérons la relation, qu’on va noter $f^{-1}(\mathcal{R}_3)$, triviale en dehors de A et définie sur A par $(x, y) \in f^{-1}(R_3)$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in \mathcal{R}_3$. On suppose que $f^{-1}(\mathcal{R}_3)$ est aussi une sous-relation de $\mathcal{R}_1$ et que $\mathcal{R}$ est engendrée par $\mathcal{R}_1$ et f, i.e. $\mathcal{R}$ est la plus petite relation contenant $\mathcal{R}_1$ et le graphe de f.

La notation $x_{2i} \xrightarrow{f^{\varepsilon_i}} x_{2i+1}$, où $\varepsilon_i = \pm 1$, signifie

$$\begin{aligned} x_{2i} \in A \text{ et } f(x_{2i}) = x_{2i+1}, \ \text{ si } \varepsilon_i = +1, \\ x_{2i} \in B \text{ et } f^{-1}(x_{2i}) = x_{2i+1}, \ \text{ si } \varepsilon_i = -1. \end{aligned}$$

Définition IV.19 : suite réduite. *Considérons une suite $(x_1, x_2, x_3, x_4 \dots, x_{2n-1}, x_{2n})$ $(n \geq 1)$ qui vérifie*

$$x_1 \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} x_2 \xrightarrow{f^{\varepsilon_1}} x_3 \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} \dots \xrightarrow{f^{\varepsilon_{i-1}}} x_{2i-1} \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} x_{2i} \xrightarrow{f^{\varepsilon_i}} x_{2i+1} \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} \dots$$
$$x_{2n-2} \xrightarrow{f^{\varepsilon_{n-1}}} x_{2n-1} \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} x_{2n}$$

Une telle suite est dite réduite si
• *$n \geq 2$ et il n’existe pas de sous-suite*

$$x_{2i-2} \xrightarrow{f} x_{2i-1} \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} x_{2i} \xrightarrow{f^{-1}} x_{2i+1}, \ \textit{avec } x_{2i-1} \overset{\mathcal{R}_3}{\sim} x_{2i}, \ \textit{ni}$$
$$x_{2i-2} \xrightarrow{f^{-1}} x_{2i-1} \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} x_{2i} \xrightarrow{f} x_{2i+1}, \ \textit{avec } x_{2i-1} \overset{f^{-1}(\mathcal{R}_3)}{\sim} x_{2i}$$

• *ou bien $n = 1$ et $x_1 \neq x_2$.*

Définition IV.20 : HNN-extension. *On dit que $\mathcal{R}$ est l’extension HNN de $\mathcal{R}_1$ au-dessus de $\mathcal{R}_3$ via f et on note*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 *_{f, \mathcal{R}_3}$$

si pour toute suite réduite $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ (en dehors d’un borélien de mesure nulle), on a $x_1 \neq x_n$.

Exemple IV.21. *Si le groupe dénombrable Γ est HNN-extension de Γ_1 au-dessus de Γ_3 via les morphismes injectifs $\Gamma_3 \subset \Gamma_1$ et $\Gamma_3 \xrightarrow{h} \Gamma_1$, alors Γ se présente par générateurs et relations comme $\Gamma =< \Gamma_1, t \mid t^{-1}\gamma t = h(\gamma), \gamma \in \Gamma_3 >$. La relation $\mathcal{R}_\alpha$ définie par une action libre préservant la mesure α de Γ se décompose naturellement comme l'extension HNN de $\mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_1}$ au-dessus de $\mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_3}$ via l'isomorphisme f défini sur tout X par l'action de t.*

Exemple IV.22. *Si Φ est un arborage sur X, alors toute partition $\Phi = (\varphi_1) \vee \Phi_2$, qui isole un générateur, décompose $\mathcal{R}_\Phi$ en extension HNN de $\mathcal{R}_{\Phi_2}$ au-dessus de la relation triviale via φ_1.*

On retrouve, comme cas particulier, la notion de *pseudogroupe mesurable engendré par un système fini qui est une HNN-extension* introduite par É. Ghys dans [Ghy95] (voir [Pau98] pour une formulation exactement dans notre contexte). Ces articles contiennent un théorème, analogue au théorème de Stallings sur les groupes ayant une infinité de bouts ([Sta71]), qui illustre notre propos :

Théorème IV.23 [Ghy95]. *Si Φ est un graphage (SP1) ergodique sur X, alors le graphe associé à presque chaque orbite possède 1, 2 ou une infinité de bouts. Si Φ donne à presque chaque orbite la structure d'un graphe avec deux bouts (resp. une infinité), alors la relation $\mathcal{R}_\Phi$ est stablement orbitalement équivalente à une HNN-extension (au-dessus de $\mathcal{R}_3$ triviale) $\mathcal{S} = \mathcal{R}_1 *_f = \mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_{(f)}$, où $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{but}(f) = \emptyset$ et chaque $\mathcal{R}_1$-orbite rencontre $\mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{but}(f)$ en exactement deux points (resp. au moins trois points).*

On obtient alors le corollaire suivant généralisant le résultat de S. Adams [Ada90] qui affirme la même chose pour les arborages.

Corollaire IV.24. *Si un graphage (SP1) ergodique Φ donne à presque chaque orbite la structure d'un graphe avec*

(1) *deux bouts, alors $\mathcal{R}_\Phi$ est hyperfinie.*
(2) *au moins trois bouts, alors $\mathcal{C}(\mathcal{R}_\Phi) > 1$ et $\mathcal{R}_\Phi$ n'est pas hyperfinie.*

Preuve du corollaire IV.24. Considérons, d'après IV.23, la relation (SP1) $\mathcal{S} = \mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_{(f)}$ sur (Y, ν) à laquelle $\mathcal{R}_\Phi$ est SOE. Dans la première situation, $\mathcal{R}_1$ possède un domaine fondamental de mesure $\nu(\mathrm{dom}(f))$, donc un graphage Φ_1 de coût $= 1 - \nu(\mathrm{dom}(f))$ et $\Phi_1 \vee (f)$ est un graphage de $\mathcal{S}$, de coût 1. La proposition III.3.(2) montre que $\mathcal{S}$ est hyperfinie ; donc $\mathcal{R}_\Phi$ aussi.

Dans la deuxième situation, posons $\delta = \nu(\mathrm{dom}(f))$; il existe un borélien A de mesure $\leq 2/3 \cdot \delta$ qui rencontre toute $\mathcal{R}_1$-orbite, donc (proposition III.3) $\mathcal{C}(\mathcal{R}_1) \geq 1 - 2/3 \cdot \delta$. Par ailleurs (f) étant un arborage $(\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{but}(f) = \emptyset)$, on a (théorème IV.15) $\mathcal{C}(\mathcal{S}) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{C}((f)) \geq$

$1-2/3\cdot\delta+\delta>1$. Par l'invariance II.11, $\mathcal{C}(\mathcal{R}_\Phi)>1$ et par la proposition III.3, $\mathcal{R}_\Phi$ n'est pas hyperfinie. □

Les notions pour les groupes, de produit amalgamé et de HNN-extension (introduite respectivement par O. Schreier en 1926 et par G. Higman, B. H. Neumann et H. Neumann en 1949), sont parallèles mais distinctes et sont unifiées par le concept de *structure bipolaire* défini par J. Stallings en 1971 [Sta71] (on peut aussi consulter par exemple [LS77, IV.6]). Dans notre contexte, il est probablement aussi possible d'en produire une définition analogue en terme de structure bipolaire, cependant, ce n'est pas indispensable puisqu'on va voir que produits amalgamés et extensions HNN sont tout à fait ambivalents modulo SOE :

Si $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1 *_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2$, considérons deux copies X_1 et X_2 de X et l'"identité" $f:X_1\to X_2$. Appelons $\mathcal{S}$ la relation sur la réunion disjointe $X_1\coprod X_2$ définie par $\mathcal{R}_1$ sur X_1 et $\mathcal{R}_2$ sur X_2 et $\mathcal{S}_3$ la relation égale à $\mathcal{R}_3$ sur X_1 et triviale sur X_2. La relation $\overline{\mathcal{R}}$ engendrée par $\mathcal{S}$ et f est l'extension HNN de $\mathcal{S}$ au-dessus de $\mathcal{S}_3$ via f. Elle induit $\mathcal{R}$ sur X_1.

Inversement, si $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1 *_{f,\mathcal{R}_3}$ considérons deux copies X_1 et X_2 de X, l'"identité" $\overline{h}:X_1\to X_2$ et l'isomorphisme partiel $\overline{f}:A_1\subset X_1\to B_2\subset X_2$ tel que $\overline{h}^{-1}\circ\overline{f}$ coïncide avec f via l'identification de X_1 avec X. Appelons

- $\overline{\mathcal{R}}_1$ la relation sur $\overline{X}=X_1\coprod X_2$ engendrée par $\mathcal{R}_1$ sur X_1 et $\overline{h}$
- $\overline{\mathcal{R}}_2$ la relation sur $\overline{X}$ engendrée par $\mathcal{R}_3$ sur X_2 et $\overline{f}$
- $\overline{\mathcal{R}}_3$ la relation engendrée par $\mathcal{R}_3$ sur X_2 et $f^{-1}(\mathcal{R}_3)$ sur X_1 (le graphe de $\overline{f}$ n'est pas contenu dans $\overline{\mathcal{R}}_3$) et enfin
- $\overline{\mathcal{R}}$ la relation engendrée par tout cela : $\overline{\mathcal{R}}_1$ et f. Alors $\overline{\mathcal{R}}=\overline{\mathcal{R}}_1 *_{\overline{\mathcal{R}}_3} \overline{\mathcal{R}}_2$ et elle induit $\mathcal{R}$ sur X_1.

Corollaire IV.25. *Si $\mathcal{R}$ est une HNN extension de $\mathcal{R}_1$ de coût fini, au-dessus de $\mathcal{R}_3$ hyperfinie, via $f:A\to B$ alors*

$$\mathcal{C}(\mathcal{R})=\mathcal{C}(\mathcal{R}_1)+\mu(A)-\mathcal{C}(\mathcal{R}_3).$$

Ce corollaire admet évidemment sa réciproque partielle qui se déduit immédiatement de son analogue (théorème IV.16) pour les produits amalgamés. On n'en détaillera pas la preuve.

Corollaire IV.26. *Soit $\mathcal{R}_1$ une relation (SP1) de coût fini sur (X,μ), soit $f:A\to B$ et soit $\mathcal{R}_3$ une sous-relation* **finie** *de $\mathcal{R}_1$, triviale en dehors de B, telle que $f^{-1}(\mathcal{R}_3)$ soit aussi une sous-relation de $\mathcal{R}_1$. Appelons $\mathcal{R}$ la relation engendrée par $\mathcal{R}_1$ et f. Si $\mathcal{C}(\mathcal{R})=\mathcal{C}(\mathcal{R}_1)+\mu(A)-\mathcal{C}(\mathcal{R}_3)$, alors $\mathcal{R}$ est l'extension HNN de $\mathcal{R}_1$ au-dessus de $\mathcal{R}_3$ via f.*

Preuve du corollaire IV.25. On se ramène à un produit amalgamé par la construction ci-dessus. La relation $\overline{\mathcal{R}}_3$, obtenue comme réunion de deux relations hyperfinies de supports disjoints est elle-même hyperfinie. De plus, chacune des relations $\overline{\mathcal{R}}_i$ peut être vue comme produit libre de deux sous-relations. Alors en appelant ν la mesure sur $\overline{X}$ normalisée $\frac{\mu_{X_1}+\mu_{X_2}}{2}$:

$2 \cdot \mathcal{C}_\nu(\overline{\mathcal{R}}_1) = \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_1) + \mathcal{C}_\mu(\overline{h}) = \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_1) + 1$ est fini

$2 \cdot \mathcal{C}_\nu(\overline{\mathcal{R}}_2) = \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_3) + \mathcal{C}_\mu(\overline{f}) = \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_3) + \mu(A)$ est fini

$2 \cdot \mathcal{C}_\nu(\overline{\mathcal{R}}_3) = \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_3) + \mathcal{C}_\mu(f^{-1}(\mathcal{R}_3)) = 2 \cdot \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_3)$.

Le théorème IV.15 entraîne alors

$2 \cdot \mathcal{C}_\nu(\overline{\mathcal{R}}) = \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_1) + \mu(X) + \mu(A) - \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_3)$,

et la proposition d'induction II.6 montre que

$$\mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}) - 1 = 2 \cdot (\mathcal{C}_\nu(\overline{\mathcal{R}}) - 1) = \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_1) - 1 + \mu(A) - \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_3).$$

□

IV-D Preuves

IV.27. Notation pour toutes les preuves qui viennent : soit Φ un graphage de la relation $\mathcal{R}$ sur X et soit Θ un graphage d'une sous-relation $\mathcal{S}$ de $\mathcal{R}$.

Pour chaque x appartenant au domaine d'un générateur θ de Θ, il existe au moins un Φ-mot défini en x qui envoie x sur $\theta(x)$. Quitte à partitionner les domaines des générateurs de Θ, on peut supposer que chaque θ coïncide sur tout son domaine avec un Φ-mot ω_θ. On peut par exemple se donner un ordre sur la famille $\Phi^\pm$ des générateurs de Φ et de leurs inverses et prendre pour ω_θ, le premier dans l'ordre lexicographique parmi les Φ-mots de longueur minimale qui coïncident avec θ.

Définition IV.28 : morphismes simples. *On appelle* **morphisme simple** *entre un graphage Ψ sur le borélien standard (Y,ν) et le graphage Φ sur le borélien standard (X,μ) la donnée d'une application mesurable surjective* $\mathbf{P} : Y \to X$ *et d'une application* $\mathbf{P}_* : \Psi \to \Phi^{\pm 1}$ *qui vérifie :*

- $\mathbf{P}$ *est à fibre dénombrable*
- *si $A \subset Y$ est un borélien sur lequel* $\mathbf{P}$ *est injective, alors* $\nu(A) = \mu(\mathbf{P}(A))$,
- *pour tout $\psi_j \in \Psi$, l'application* $\mathbf{P}$ *est injective sur le domaine* $\mathrm{dom}(\psi_j)$ *de ψ_j,*
- *si $y \in \mathrm{dom}(\psi_j)$, alors $\mathbf{P}_*(\psi_j)$ est défini en $\mathbf{P}(y)$ et $\mathbf{P}_*(\psi_j)(\mathbf{P}(y)) = \mathbf{P}(\psi_j(y))$.*

L'application $\mathbf{P}_*$ peut s'étendre en un morphisme des Ψ-mots dans les Φ-mots, et si $m = \psi_{i_l}^{\varepsilon_l} \cdots \psi_{i_1}^{\varepsilon_1}$ est défini en $y \in Y$, alors $\mathbf{P}_*(m) := \mathbf{P}_*(\psi_{i_l})^{\varepsilon_l} \cdots \mathbf{P}(\psi_{i_1})^{\varepsilon_1}$ est défini en $\mathbf{P}(y)$ et vérifie $\mathbf{P}_*(m)(y) = \mathbf{P}(m(y))$.

Pour comparer les graphages Φ et Θ comme dans IV.27, on dispose déjà de l'induction (partie II). On va se donner une construction générale (déploiement), qui permet de les relier par morphisme simple.

L'idée est la suivante : pour chaque $x \in X$, on dispose d'une application injective évidente P entre les sommets du Θ-graphe de Cayley $\Theta[x]$ de x et *ceux de $\Phi[x]$. Chaque arête est étiquetée par le générateur correspondant et on cherchera à étendre P en un morphisme de graphes étiquetés, en ajoutant des sommets sur les arêtes de $\Theta[x]$ à l'aide des ω_θ. Cela se fait en augmentant l'espace X (par les sommets ajoutés) et en décomposant chaque θ comme le mot ω_θ (voir figure 1). Géométriquement, on peut se représenter cette opération comme ceci :*

-1- *On suspend au sens usuel le graphage Θ par le collage sur X, pour chaque générateur $\theta : A_\theta \to B_\theta$, de "cylindres" $A_\theta \times [0,1]$ en identifiant par projection sur le premier facteur $A_\theta \times \{0\}$ avec A_θ et $A_\theta \times \{1\}$ avec B_θ via θ.*
-2- *Puis on ajoute des transversales aux cylindres de façon à les découper en un nombre de morceaux égal à la longueur de ω_θ (on augmente l'espace).*
-3- *On retient alors le graphage $\overline{\Theta}$ sur l'espace $\overline{X}$ réunion des transversales et de X, dont cela est la suspension au sens usuel.*

L'inconvénient de cette construction est que, même si $\mu(X) = 1$, l'espace "augmenté" n'est peut-être pas de mesure finie. Pour prouver le théorème IV.4, cela sera sans importance. En revanche, pour contrôler le coût, on a dû dans [Gab98] (et on préférera ici) modifier Θ pour le rendre adapté (cf. IV.35) et obtenir ainsi un $\overline{X}$ de mesure finie.

IV.29. Construction du déploiement d'un graphage vis à vis d'un autre. Grâce à IV.27, on se trouve dans la situation où chaque générateur $\theta : A_\theta \to B_\theta$ de Θ, coïncide sur son domaine avec le Φ-mot donné $\omega_\theta = \varphi_{k_{l(\theta)}}^{\varepsilon_{l(\theta)}} \dots \varphi_{k_2}^{\varepsilon_2}\varphi_{k_1}^{\varepsilon_1}$ de longueur $l(\theta) \in \mathbf{N}$, où $\varphi_{k_j} \in \Phi$ et $\varepsilon_j = \pm 1$.

Pour chacun d'eux, considérons l'espace $A_\theta \times \{0, 1, 2, \dots, l(\theta)\}$, muni de la mesure $\overline{\mu}$ produit de la mesure $\mu_{|A}$ par la mesure de comptage sur $\{0, 1, 2, \dots, l(\theta)\}$, et les générateurs pour $j = 1, 2, \dots, l(\theta)$:

$$\begin{aligned} \overline{\theta}_j : A_\theta \times \{j-1\} &\to A_\theta \times \{j\} \\ (x, j-1) &\mapsto (x, j) \end{aligned}$$

L'espace $\overline{X}$ est alors obtenu en prenant la réunion disjointe de X et des $A_\theta \times \{0, 1, 2, \dots, l(\theta)\}$, pour tous les $\theta \in \Theta$, puis en identifiant via les isomorphismes préservant la mesure $\overline{\mu}$ (figure 1) :

$$\begin{gathered} A_\theta \times \{0\} \text{ avec } A_\theta \subset X \text{ via } (x, 0) \mapsto x, \text{ et} \\ A_\theta \times \{l(\theta)\} \text{ avec } B_\theta \subset X \text{ via } (x, l(\theta)) \mapsto \theta(x). \end{gathered}$$

Appelons $\overline{\mu}$ la mesure induite sur $\overline{X}$. Les $\overline{\theta}_j$ deviennent des isomorphismes partiellement définis, sur des boréliens de mesure finie de $\overline{X}$, préservant $\overline{\mu}$. Appelons $\overline{\Theta}$ le graphage sur $\overline{X}$ constitué des $\overline{\theta}_j$. L'espace $\overline{X}$ est donc en fait la réunion disjointe d'une famille dénombrable de copies de boréliens de X, ses *niveaux* : $\overline{X}_0 = X$ et tous les $A_\theta \times \{j\}$ pour $\theta \in \Theta$ et $j \neq 0, l(\theta)$. Définissons une *fonction niveau* $N : \overline{X} \to \{0, 1, 2, \dots\}$, nulle sur $\overline{X}_0$ et telle que les niveaux soient les ensembles de la forme $\{N = cte\}$.

Définition IV.30. *$(\overline{X}, \overline{\mu}, \overline{\Theta})$ est appelé* **déploiement** *de (X, μ, Θ) par rapport à Φ (voir figure 1).*

Remarque IV.31. Même si $\mu(X) = 1$, rien n'assure que $\overline{\mu}(\overline{X})$ soit finie.

Soit $\mathbf{P} : \overline{X} \to X$ l'application définie par

– $\mathbf{P}(x) = x$, pour $x \in \overline{X}_0 = X$,
– $\mathbf{P}(x) = \varphi_{k_j}^{\varepsilon_j} \dots \varphi_{k_2}^{\varepsilon_2}\varphi_{k_1}^{\varepsilon_1}(y)$, pour $x = (y, j) \in A_\theta \times \{j\}$, où $\theta \in \Theta$, avec $\omega_\theta = \varphi_{k_{l(\theta)}}^{\varepsilon_{l(\theta)}} \dots \varphi_{k_2}^{\varepsilon_2}\varphi_{k_1}^{\varepsilon_1}$ et $j = 0, 1, \dots, l(\theta)$,

et soit $\mathbf{P}_*$ l'application de $\overline{\Theta}$ dans $\Phi^{\pm 1}$ qui au nouveau générateur $\overline{\theta}_j$ fait correspondre la lettre $\varphi_{k_j}^{\varepsilon_j}$.

Lemme IV.32.

– *Les applications $\mathbf{P}, \mathbf{P}_*$ définissent un morphisme simple entre les graphages $(\overline{X}, \overline{\mu}, \overline{\Theta})$ et (X, μ, Φ).*
– *La relation induite de $\mathcal{R}_{\overline{\Theta}}$ sur $\{N = 0\}$ est égale via $\mathbf{P}$ à la relation $\mathcal{R}_\Theta$.*

Preuve du lemme IV.32. Le premier item est facile à vérifier. Il est clair que pour tout $x \in A_\theta \subset \overline{X}_0$, on a l'égalité $\overline{\theta}_{l(\theta)} \dots \overline{\theta}_2\overline{\theta}_1(x) = \theta(x) \in \overline{X}_0$. Ainsi, un Θ-mot de x à y coïncide sur son domaine avec le $\overline{\Theta}$-mot obtenu en remplaçant chaque $\theta^{\pm 1}$ par $(\overline{\theta}_{l(\theta)} \dots \overline{\theta}_2\overline{\theta}_1)^{\pm 1}$. Inversement, un $\overline{\Theta}$-mot réduit de $x \in \{N = 0\}$ à $y \in \{N = 0\}$, se décompose en un certain nombre de blocs $(\overline{\theta}_{l(\theta)} \dots \overline{\theta}_2\overline{\theta}_1)^{\pm 1}$ (car chaque $z \notin \{N = 0\}$ appartient à exactement un domaine et un but pour $\overline{\Theta}$), et donc coïncide sur son domaine avec un Θ-mot. □

IV.33. Preuve du théorème IV.4. On va montrer que si Φ est un arborage alors $\mathcal{R}_\Theta$ est arborable. On dispose du graphage (qui n'est a priori pas un arborage) $\overline{\Theta}$ sur $\overline{X}$, qui induit sur X la même relation $\mathcal{S}$ que Θ. On va utiliser le fait que Φ est un arborage pour arranger $(\overline{X}, \overline{\Theta})$ et se ramener à un $(\overline{X}^a, \overline{\Theta}^a)$ où $\overline{\Theta}^a$ est un arborage induisant encore $\mathcal{S}$ sur X. La proposition d'induction permettra alors de conclure.

Soit Π^a de $\overline{X}$ dans $\overline{X}$ l'application qui à $x \in \overline{X}$ fait correspondre le point $\Pi^a(x) \in \overline{X}$, qui appartient à la $\mathbf{P}$-fibre de x et à la $\mathcal{R}_{\overline{\Theta}}$ classe de x, et qui est de niveau minimal pour ces propriétés. Π^a est injective (comme $\mathbf{P}$) sur les niveaux (en particulier sur $\overline{X}_0 = \{N = 0\}$ et sur les domaines des $\overline{\theta} \in \overline{\Theta}$) et en restriction aux niveaux, elle préserve la mesure ; appelons $\overline{X}^a$ son image.

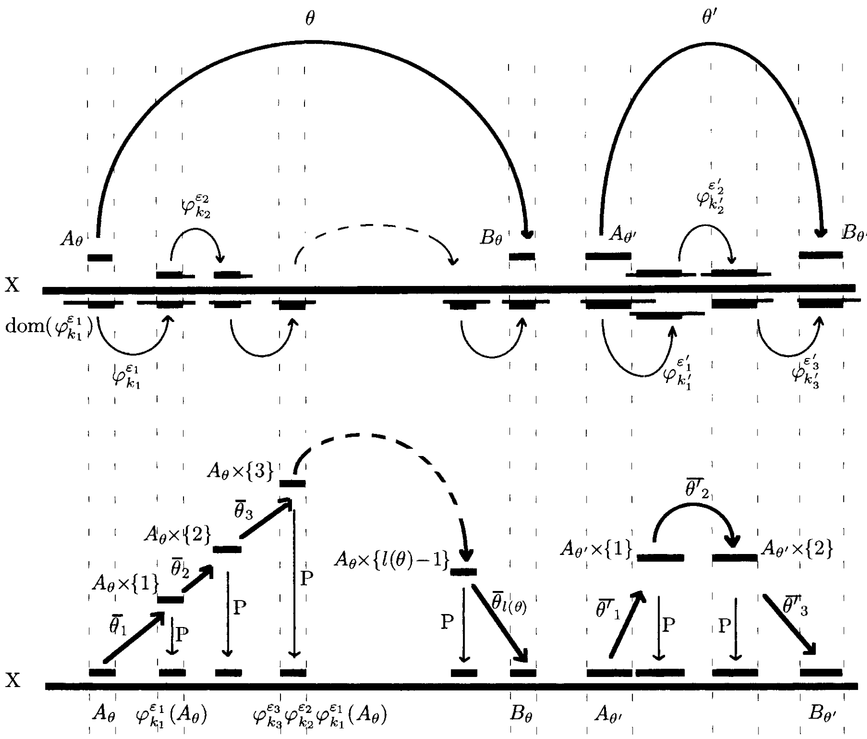

Fig. 1

Chaque $\overline{\theta} \in \overline{\Theta}$ fournit un isomorphisme sur $\overline{X}^a$ partiellement défini $\overline{\theta}^a$: $\Big(\Pi^a\big(\mathrm{dom}(\overline{\theta})\big) \to \Pi^a\big(\mathrm{but}(\overline{\theta})\big)\Big)$, donné par $\overline{\theta}^a(x) = \Pi^a \cdot \overline{\theta} \cdot (\Pi^a_{|\mathrm{dom}(\overline{\theta})})^{-1}(x)$. Soit $\overline{\Theta}^a = (\overline{\theta}^a)_{\overline{\theta}\in\overline{\Theta}}$ le graphage qu'ils constituent sur $\overline{X}^a$ et $\mathbf{P}^a : \overline{X} \to X$ l'application qui vérifie $\mathbf{P} = \mathbf{P}^a \circ \Pi^a$. Soit $\mathbf{P}^a_* : \overline{\Theta}^a \to \Phi^{\pm 1}$ définie par $\mathbf{P}^a_*(\overline{\theta}^a) = \mathbf{P}(\overline{\theta})$. Les application $\mathbf{P}^a$ et $\mathbf{P}^a_*$ définissent un morphisme simple de $(\overline{X}^a, \overline{\mu}_{|\overline{X}^a}, \overline{\Theta}^a)$ sur (X, μ, Φ). De plus, les relations $\mathcal{R}_{\overline{\Theta}^a}$ et $\mathcal{R}_{\overline{\Theta}}$ induisent la même relation sur $\overline{X}^a$ d'une part et sur $\{N = 0\} \subset \overline{X}^a \subset \overline{X}$ d'autre part.

On peut remarquer que si Θ engendre la même relation que Φ, alors $\overline{X}^a$ est égal à $X = \{N = 0\}$ et chaque générateur $\overline{\theta}^a_i$ est une restriction d'un générateur de Φ. Avec l'hypothèse que Φ est un **arborage**, *on va restreindre les domaines des générateurs $\overline{\theta}^a$ pour faire de $\overline{\Theta}^a$ un arborage sans modifier la relation.*

Si $\overline{w}^a$ est un $\overline{\Theta}^a$-mot qui fixe un ensemble V (i.e. $\overline{w}^a(x) = x, \forall x \in V$) de mesure > 0, alors $\mathbf{P}^a_*(\overline{w}^a)$ fixe l'ensemble $\mathbf{P}^a(V)$, de même mesure. Puisque que Φ est un arborage, on en déduit que $\mathbf{P}^a_*(\overline{w}^a)$ est un Φ-mot non réduit et donc qu'il existe dans $\overline{w}^a$ deux lettres consécutives dont les images par

$\mathbf{P}_*$ sont inverses l'une de l'autre ; on écrit $\overline{w}^a = \overline{w}_2^a(\overline{\theta}_2^a)^{\varepsilon_2}(\overline{\theta}_1^a)^{-\varepsilon_1}\overline{w}_1^a$ avec $\mathbf{P}_*^a\big((\overline{\theta}_2^a)^{\varepsilon_2}\big) = \mathbf{P}_*^a\big((\overline{\theta}_1^a)^{\varepsilon_1}\big)$.

L'intersection U des domaines de $(\overline{\theta}_1^a)^{\varepsilon_1}$ et $(\overline{\theta}_2^a)^{\varepsilon_2}$ contient l'ensemble $(\overline{\theta}_1^a)^{-\varepsilon_1}\overline{w}_1^a(V)$, de mesure > 0. Pour tout $x \in U$, on a :

$$\mathbf{P}^a\big((\overline{\theta}_2^a)^{\varepsilon_2}(x)\big) = \mathbf{P}_*^a\big((\overline{\theta}_2^a)^{\varepsilon_2}\big)\big(\mathbf{P}^a(x)\big) = \mathbf{P}_*^a\big((\overline{\theta}_1^a)^{\varepsilon_1}\big)\big(\mathbf{P}^a(x)\big) = \mathbf{P}^a\big((\overline{\theta}_1^a)^{\varepsilon_1}(x)\big),$$

et donc les points $(\overline{\theta}_1^a)^{\varepsilon_1}(x)$ et $(\overline{\theta}_2^a)^{\varepsilon_2}(x)$ sont dans la même $\overline{\Theta}^a$-orbite et dans la même $\mathbf{P}^a$-fibre. Ces deux points de $\overline{X}^a \subset \overline{X}$ sont donc dans la même $\overline{\Theta}$-orbite et dans la même $\mathbf{P}$-fibre : ils sont confondus par définition de $\overline{X}^a$. Pour simplifier les notations, on peut supposer, quitte à remplacer des générateurs par leur inverse, que $\mathbf{P}_*$ envoie $\overline{\Theta}^a$ dans Φ (au lieu de $\Phi^{\pm 1}$). Dans ce cas, $\varepsilon_1.\varepsilon_2 = 1$ et $\forall x \in D \subset \mathrm{dom}(\overline{\theta}_1^a) \cap \mathrm{dom}(\overline{\theta}_2^a)$, on a $\overline{\theta}_1^a(x) = \overline{\theta}_2^a(x)$: on dit que $\overline{\theta}_1^a$ *double* $\overline{\theta}_2^a$ sur D. On supprime tous les doubles. Numérotons les générateurs de $\overline{\Theta}^a$. Le graphage $\overline{\Theta}_s^a$ obtenu en remplaçant chaque $\overline{\theta}_i^a$ par sa restriction à la partie de son domaine où il ne double aucun générateur de numéro $k < i$, a les mêmes orbites que $\overline{\Theta}^a$. Par restriction, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_*$ fournissent un morphisme simple de $(\overline{X}^a, \overline{\Theta}_s^a)$ sur (X, Φ). L'argument ci-dessus montre que si un $\overline{\Theta}_s^a$-mot fixe un ensemble de mesure > 0, il est nécessairement non réduit (il contient un double trivial) : le graphage $\overline{\Theta}_s^a$ est donc un arborage. Il induit $\mathcal{R}_\Theta$ sur $\{N = 0\}$. Cette relation est donc arborable par la proposition d'induction II.6 (dont la partie sur les arborages s'applique aussi si le gros espace n'est que σ-fini). Cela termine la preuve du théorème IV.4. □

IV.34. On va maintenant se placer dans la situation où Φ et Θ engendrent la même relation, i.e. $\mathcal{R} = \mathcal{S}$. *Comme on l'a remarqué, il est possible que le $\overline{X}$ produit par le déploiement soit de mesure infinie. On va commencer par remédier à cela.*

Proposition IV.35. *Soit $\mathcal{R}$ une relation de coût fini. Soit $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots)$ un graphage de coût fini de $\mathcal{R}$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un graphage Θ de $\mathcal{R}$ dont le coût approche $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ à moins de ε et dont un déploiement $(\overline{X}, \overline{\mu}, \overline{\Theta})$ par rapport à Φ n'a qu'un nombre fini de niveaux (il est donc de mesure finie). De plus, $\forall x, y \in \overline{X}$, $(x\mathcal{R}_{\overline{\Theta}}y)$ si et seulement si $(\mathbf{P}(x)\mathcal{R}\mathbf{P}(y))$, et les orbites pour Φ, Θ et $\overline{\Theta}$ sont uniformément quasi-isométriques (voir ci-dessous).*

Comme dans [Gab98], on appelle Θ un graphage **adapté**.

Preuve de la proposition IV.35. Soit Λ un graphage de $\mathcal{R}$, vérifiant : $\mathcal{C}(\Lambda) \leq \mathcal{C}(\mathcal{R}) + \frac{\varepsilon}{3}$. L'ensemble U_m des points où $\lambda \in \Lambda$ coïncide avec un Φ-mot m donné est mesurable et quitte à remplacer λ par la famille de ses restrictions à des $V_m \subset U_m$ disjoints, chaque λ coïncide sur son domaine tout entier avec **un** Φ-mot, sans modification du coût. Fixons r un indice tel que $\sum_{i>r} \mathcal{C}(\{\varphi_i\}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Maintenant, en numérotant la famille dénombrable des Λ-mots et pour chaque $\varphi_i \in \Phi$, avec $i = 1, 2, \ldots, r$, les boréliens W_n^i où φ_i ne coïncide pas avec un des n premiers Λ-mots vérifient :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(W_n^i) = 0.$$

Il existe donc un n_0 pour lequel $\mu(W_{n_0}^i) < \frac{\varepsilon}{3.r}$. Appelons Θ_0 la famille finie des Λ-générateurs utiles pour écrire les n_0 premiers Λ-mots et appelons

$$\Theta := \Theta_0 \vee (\varphi_{i|W_{n_0}^i})_{i=1,2,\ldots,r} \vee (\varphi_i)_{i>r}.$$

On a :

$$\mathcal{C}(\Theta) = \underbrace{\mathcal{C}(\Theta_0)}_{\leq \mathcal{C}(\mathcal{R})+\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\mathcal{C}((\varphi_{i|W_{n_0}^i})_{i\leq r})}_{\leq r.\frac{\varepsilon}{3.r}} + \underbrace{\mathcal{C}((\varphi_i)_{i>r})}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} \leq \mathcal{C}(\mathcal{R}) + \varepsilon.$$

Le graphage Θ vérifie les propriétés suivantes : Θ a les mêmes orbites que Φ, les $\theta \in \Theta_0$ (en nombre fini), coïncident chacun sur son domaine tout entier avec **un** Φ-mot ω_θ (de longueur majorée par, disons, L_1) et chaque $\theta \in \Theta \setminus \Theta_0$ coïncide sur son domaine tout entier avec **un générateur** φ_θ de Φ. On en conclut que le déploiement $(\overline{X}, \overline{\mu}, \overline{\Theta})$ construit avec ces choix de ω_θ possède un nombre de niveaux majoré par L_1 fois le cardinal de Θ_0.

De plus, le domaine de chaque $\varphi \in \Phi$ se décompose en un nombre fini de pièces sur lesquelles il coïncide avec **un** Θ-mot, de longueur majorée par un certain L_2 (le maximum des longueurs des n_0 premiers mots de Λ). Ainsi, les orbites de Φ et Θ sont alors uniformément quasi-isométriques, pour les métriques d_Φ et d_Θ. Précisément, il existe des *constantes de quasi-isométrie* (C, D) telles que pour (presque) tout $x_1, x_2 \in X$:

$$(1/C).d_\Phi(x_1, x_2) - D \leq d_\Theta(x_1, x_2) \leq C.d_\Phi(x_1, x_2) + D\,.$$

Soient maintenant $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{X}$. Si w est un $\overline{\Theta}$-mot de $\overline{x}$ à $\overline{y}$, son image $\mathbf{P}_*(w)$ est un Φ-mot de $\mathbf{P}(\overline{x})$ à $\mathbf{P}(\overline{y})$. Supposons à l'inverse qu'on ait un Φ-mot ω de $\mathbf{P}(\overline{x})$ à $\mathbf{P}(\overline{y})$ (soit $l_\Phi(\omega)$ sa longueur), on a alors un Θ-mot m et un $\overline{\Theta}$-mot $\overline{m}$ de $\mathbf{P}(\overline{x})$ à $\mathbf{P}(\overline{y})$, de longueurs inférieures à $L_2 \cdot l_\Phi(\omega)$ et $L_1 \cdot L_2 \cdot l_\Phi(\omega)$ respectivement (voir figure 2). Par construction, il existe $\overline{\gamma}_x$ (resp. $\overline{\gamma}_y$) un $\overline{\Theta}$-mot de $\overline{x}$ (resp. $\overline{y}$) à $\overline{X}_0$, de longueurs $\leq L_1$. On en déduit pareillement l'existence de Φ-mots puis de $\overline{\Theta}$-mots $\overline{m}_x$ et $\overline{m}_y$ (de longueurs $\leq L_1 \cdot L_2 \cdot L_1$) de $\mathbf{P}(x)$ à $\overline{\gamma}_x(\overline{x})$ (resp. $\mathbf{P}(y)$ à $\overline{\gamma}_y(\overline{y})$). Le $\overline{\Theta}$-mot $\overline{\gamma}_y^{-1} \cdot \overline{m}_y \cdot \overline{m} \cdot \overline{m}_x^{-1} \cdot \overline{\gamma}_x$, de longueur $\leq L_1 \cdot L_2 \cdot l_\Phi(\omega) + 2 \cdot (L_1 \cdot L_2 \cdot L_1) + 2 \cdot L_1$, relie $\overline{x}$ à $\overline{y}$. On a donc montré :

$$d_\Phi(\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y)) \leq d_{\overline{\Theta}}(x, y) \leq L_1 \cdot L_2 \cdot d_\Phi(\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y)) + 2 \cdot L_1 \cdot (L_2 \cdot L_1 + 1).$$

□

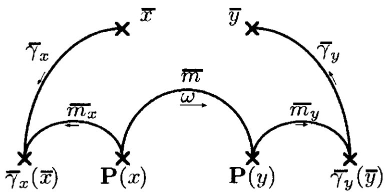

Fig. 2

IV.36. Preuve du théorème IV.15.

Preuve. On suppose que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 *_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2$, avec $\mathcal{R}_3$ hyperfinie. Soit Φ_3 un arborage de $\mathcal{R}_3$; il vérifie $\mathcal{C}(\Phi_3) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_3)$ (proposition III.3). Le lemme III.5 assure que quelque soit $\varepsilon > 0$, on peut compléter Φ_3 en un graphage $\Phi_1 \vee \Phi_3$ de $\mathcal{R}_1$ (resp. $\Phi_2 \vee \Phi_3$ de $\mathcal{R}_2$) de coût inférieur à $\mathcal{C}(\mathcal{R}_1)+\varepsilon$ (resp. $\mathcal{C}(\mathcal{R}_2) + \varepsilon$). Le graphage $\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \Phi_3$ engendre $\mathcal{R}$ pour un coût $\leq \mathcal{C}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{C}(\mathcal{R}_2) + 2 \cdot \varepsilon - \mathcal{C}(\Phi_3)$, et donc

$$\mathcal{C}(\mathcal{R}_1 *_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2) \leq \mathcal{C}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{C}(\mathcal{R}_2) - \mathcal{C}(\mathcal{R}_3).$$

L'inégalité inverse demande plus d'effort. Les relations étant supposées de coûts finis, soit $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$ un graphage de coût fini de $\mathcal{R}$ où Φ_1 (resp. Φ_2) est un graphage de $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_2$). Pour $\varepsilon > 0$, soit Θ un graphage de $\mathcal{R}$, de coût inférieur à $\mathcal{C}(\mathcal{R}) + \varepsilon$ adapté à Φ, donné par la proposition IV.35.

On reprend alors les notations de la partie IV.29 sur les déploiements.

Les fibres de **P** sont de cardinal uniformément majoré et $\mu(\overline{X}) < \infty$. Les points $x \in \overline{X}$ des niveaux ≥ 1 appartiennent chacun à exactement deux bases (domaine ou but) pour le graphage $\overline{\Theta}$; on en déduit que $\int_X (v_\Theta - 2) d\mu = \int_{\overline{X}} (v_{\overline{\Theta}} - 2) d\overline{\mu}$ et donc $\mathcal{C}_\mu(\Theta) = \mathcal{C}_{\overline{\mu}}(\overline{\Theta}) - \overline{\mu}(\overline{X}) + \mu(X)$, où $v_\Theta(x)$ est la valence de x dans son Θ-graphe de Cayley.

Qualifions de *rouge* (resp. *vert*) tout ce qui concerne Φ_1 (resp. Φ_2). Le graphage $\overline{\Theta}$ se décompose naturellement en deux familles disjointes de générateurs : $\overline{\Theta} = \overline{\Theta}_1 \vee \overline{\Theta}_2$, selon la couleur (rouge ou verte) de $\mathbf{P}_*(\overline{\theta})$. La relation engendrée par $\overline{\Theta}_1$ (resp. $\overline{\Theta}_2$) induit sur $\{N = 0\}$ une sous-relation de $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_2$) via **P**, a priori plus petite. Appelons $\overline{\mathcal{R}}_3$ la relation (SP) $\mathbf{P}^{-1}(\mathcal{R}_3)$ sur $\overline{X}$ définie par :

$$x \overline{\mathcal{R}}_3 y \Leftrightarrow \mathbf{P}(x) \mathcal{R}_3 \mathbf{P}(y)$$

et de même posons

$$\overline{\mathcal{R}}_1 = \mathbf{P}^{-1}(\mathcal{R}_1),\ \overline{\mathcal{R}}_2 = \mathbf{P}^{-1}(\mathcal{R}_2),\ \overline{\mathcal{R}} = \mathbf{P}^{-1}(\mathcal{R}).$$

La relation $\overline{\mathcal{R}}$ est encore un produit amalgamé : $\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}}_1 *_{\overline{\mathcal{R}}_3} \overline{\mathcal{R}}_2$ (immédiat) et $\overline{\mathcal{R}}_3$ est hyperfinie comme $\mathcal{R}_3$ (les fibres de **P** sont finies).

On va ajouter des générateurs $\overline{\Sigma} = \overline{\Sigma}_1 \vee \overline{\Sigma}_2$ de sorte que

- $\overline{\Theta}_1 \vee \overline{\Sigma}_1$ engendre $\overline{\mathcal{R}}_1$, donc induise $\mathcal{R}_1$ sur $\{N = 0\}$,
- $\overline{\Theta}_2 \vee \overline{\Sigma}_2$ engendre $\overline{\mathcal{R}}_2$, donc induise $\mathcal{R}_2$ sur $\{N = 0\}$,
  (donc $\mathcal{C}_{\overline{\mu}}(\overline{\Theta}_i \vee \overline{\Sigma}_i) \geq \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_i) - \mu(X) + \overline{\mu}(\overline{X})$ (proposition II.6)),
- $\mathcal{C}_{\overline{\mu}}(\overline{\Sigma}) \leq \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_3) + \overline{\mu}(\overline{X}) - \mu(X)$.

On en déduira que :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\overline{\mu}}(\Theta) - \mu(X) &= \mathcal{C}_{\overline{\mu}}(\overline{\Theta}) - \overline{\mu}(\overline{X})\\ &= \underbrace{\mathcal{C}_{\overline{\mu}}(\overline{\Theta}_1) + \mathcal{C}_{\overline{\mu}}(\overline{\Sigma}_1)}_{\geq \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_1) - \mu(X) + \overline{\mu}(\overline{X})} + \underbrace{\mathcal{C}_{\overline{\mu}}(\overline{\Theta}_2) + \mathcal{C}_{\overline{\mu}}(\overline{\Sigma}_2)}_{\geq \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_2) - \mu(X) + \overline{\mu}(\overline{X})}\\ &\quad - \mathcal{C}_{\overline{\mu}}(\overline{\Sigma}) - \overline{\mu}(\overline{X})\\ &\geq \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_1) + \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_2) - \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_3) - \mu(X)\end{aligned}$$

et donc avec des ε tendant vers 0, que

$$\mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}) \geq \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_1) + \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_2) - \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_3).$$

IV.37. Construction de $\overline{\Sigma} = \overline{\Sigma}_1 \vee \overline{\Sigma}_2$.

Remarque. Dans le cas particulier du produit libre, où la relation $\mathcal{R}_3$ est triviale, $\overline{\mathcal{R}}_3$ est la relation “avoir même image par **P**”. Ce qu’on va faire alors, revient à considérer successivement les points de la même **P**-fibres qui sont reliés par un chemin rouge. S’il n’existe pas de chemin vert entre eux, on en ajoute un. Puis on recommence en échangeant rouge et vert. Puis on recommence...

Soit $\overline{\mathcal{R}}_3^n$ une suite croissante de relations **finies** qui exhauste $\overline{\mathcal{R}}_3$. On va construire $\overline{\Sigma}_1$ et $\overline{\Sigma}_2$ comme réunion croissante de $\overline{\Sigma}_1^n$ et $\overline{\Sigma}_2^n$, par récurrence.
Partons de $\overline{\Sigma}_1^0 = \emptyset$ et $\overline{\Sigma}_2^0 = \emptyset$.
Supposons $\overline{\Sigma}_1^n$ et $\overline{\Sigma}_2^n$ construits et vérifiant les trois propriétés $\mathcal{P}(n)$:

(1) $\overline{\Sigma}_1^n \vee \overline{\Sigma}_2^n$ engendre une sous-relation de $\overline{\mathcal{R}}_3^n$,
(2) $\overline{\Sigma}_1^n \vee \overline{\Sigma}_2^n$ est un arborage,
(3) si x et y sont équivalents pour la relation engendrée par $\overline{\Sigma}_1^n \vee \overline{\Sigma}_2^n$, alors x et y sont à la fois $(\Theta_1 \vee \overline{\Sigma}_1^n)$-équivalents et $(\Theta_2 \vee \overline{\Sigma}_2^n)$-équivalents.

Observons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie et que rouge et vert jouent des rôles symétriques.
Passons au rang $n+1$. Considérons les relations finies suivantes sur $\overline{X}$:
•$\mathcal{S}^n = \overline{\mathcal{R}}_3^{n+1} \cap \mathcal{R}_{\overline{\Theta}_1 \vee \overline{\Sigma}_1^n}$, i.e.
$x \mathcal{S}^n y \Leftrightarrow x \overline{\mathcal{R}}_3^{n+1} y$ et il existe un $(\overline{\Theta} \vee \overline{\Sigma}^n)$-mot rouge de x à y.

$\bullet\mathcal{T}^n = \overline{\mathcal{R}}_3^{n+1} \cap \mathcal{R}_{\overline{\Theta}_1 \vee \overline{\Sigma}_1^n} \cap \mathcal{R}_{\overline{\Theta}_2 \vee \overline{\Sigma}_2^n}$, i.e.
$x\mathcal{S}^n y \Leftrightarrow x\overline{\mathcal{R}}_3^{n+1} y$ et il existe un $(\overline{\Theta} \vee \overline{\Sigma}^n)$-mot rouge et un $(\overline{\Theta} \vee \overline{\Sigma}^n)$-mot vert de x à y.
Les relations $\mathcal{T}^n \subset \mathcal{S}^n \subset \overline{\mathcal{R}}_3^{n+1}$ sont finies. Considérons un domaine fondamental D^n de la relation $\mathcal{T}^n$ et donnons-nous un arborage $\overline{\Sigma}_2'$ de la relation induite de $\mathcal{S}^n$ sur D^n.
Posons $\overline{\Sigma}_1^{n+1} = \overline{\Sigma}_1^n$ et $\overline{\Sigma}_2^{n+1} = \overline{\Sigma}_2^n \vee \overline{\Sigma}_2'$.

Ainsi, si $x\mathcal{S}^n y$ alors $x\mathcal{T}^{n+1}y$, c'est-à-dire que si x et y sont deux points $\overline{\mathcal{R}}_3^n$-équivalents et rouge-équivalents, alors à l'étape $n+1$, on est sûr qu'ils sont aussi vert-équivalents. On peut définir Σ_2' "concrètement", en définissant un générateur $\overline{\sigma}_2'$ de la façon suivante : prenons sur $\overline{X}$ l'ordre induit de celui de $[0,1]$ (c'est un borélien standard). Chaque $\mathcal{T}^n$-classe a un représentant minimal, leur ensemble forme D^n. Chaque $\mathcal{S}^n$-classe est réunion d'un nombre fini de $\mathcal{T}^n$-classes, donc contient un nombre fini de représentants $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Si x_i est un représentant, non maximal parmi les représentants qu'on trouve dans sa $\mathcal{S}^n$-classe, alors le nouveau générateur $\overline{\sigma}_2'$ envoie x_i sur son successeur.
Vérifions les proprétés $\mathcal{P}(n+1)$.
$\mathcal{P}(n+1)(1)$: $\overline{\Sigma}_1^{n+1} \vee \overline{\Sigma}_2^{n+1}$ engendre visiblement une sous-relation de $\overline{\mathcal{R}}_3^{n+1}$.
$\mathcal{P}(n+1)(3)$: soit $\overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_1^{n+1} \vee \overline{\Sigma}_2^{n+1}$ et $x \in \mathrm{dom}(\overline{\sigma})$.

- Si $\overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_2'$, alors $x\mathcal{S}^n\overline{\sigma}(x)$ donc x et $\overline{\sigma}(x)$ sont rouge-équivalents au rang n, donc aussi $n+1$. Ils sont maintenant vert-équivalents par $\overline{\sigma}$.
- Si $\overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_1^n \vee \overline{\Sigma}_2^n$, alors x et $\overline{\sigma}(x)$ sont rouge-équivalents et vert-équivalents pour $(\overline{\Theta} \vee \Sigma_1^n \vee \Sigma_2^n)$ donc aussi au rang suivant $n+1$.

$\mathcal{P}(n+1)(2)$: par $\mathcal{P}(n)(1)$ et $\mathcal{P}(n)(3)$, la relation engendrée par $\overline{\Sigma}_1^n \vee \overline{\Sigma}_2^n$ est une sous-relation de $\mathcal{T}^n$, on peut donc en trouver un domaine fondamental qui contient D^n. Alors, puisque $\overline{\Sigma}_2'$ est un arborage sur D^n, la propriété $\mathcal{P}(n)(2)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)(2)$.

Ce qu'on vient de décrire est en fait le passage du rang n au rang $n+1$ lorsque n est pair. Si n est impair, on fait la même chose en échangeant les rôles du rouge et du vert.

On pose enfin $\overline{\Sigma}_1 = \vee_{n\to\infty} \nearrow \overline{\Sigma}_1^n$ et $\overline{\Sigma}_2 = \vee_{n\to\infty} \nearrow \overline{\Sigma}_2^n$. Ces deux graphages réunion croissante sont des arborages (un cycle dans une orbite apparaîtrait à une étape finie). Ils vérifient en fait $\mathcal{P}(\infty)(1)(2)(3)$. En appelant $\overline{\mu_1}$ la mesure μ normalisée, la proposition III.3 entraîne :

$$\mathcal{C}_{\overline{\mu_1}}(\overline{\mathcal{R}}_3) \overset{(i)}{=} d_{\overline{\mu_1}}(\overline{\mathcal{R}}_3) \overset{(ii)}{\geq} d_{\overline{\mu_1}}(\mathcal{R}_{\overline{\Sigma}}) \overset{(iii)}{=} \mathcal{C}_{\mu_1}(\overline{\Sigma})$$

(i) voir III.3.(2)
(ii) puisque $\mathcal{R}_{\overline{\Sigma}}$ est une sous-relation de $\overline{\mathcal{R}}_3$
(iii) par III.3.3

et donc par la proposition d'induction II.6 :

$$\mathcal{C}_{\overline{\mu}}(\overline{\Sigma}) \leq \mathcal{C}_{\mu}(\mathcal{R}_3) + \overline{\mu}(\overline{X}) - \mu(X).$$

Il ne reste qu'à s'assurer que la relation engendrée par $\overline{\Theta}_1 \vee \overline{\Sigma}_1$ engendre $\overline{\mathcal{R}}_1$ (et l'affirmation symétrique pour le vert).

Soient $x, y \in \overline{X}$ tels que $\mathbf{P}(y) \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} \mathbf{P}(x)$; il existe au moins un $\overline{\Theta}$-mot de x à y (proposition IV.35, "De plus,..."). Considérons $m = m_{2p+1} \cdot m_{2p} \cdots m_3 \cdot m_2 \cdot m_1$ un $(\overline{\Theta} \vee \overline{\Sigma})$-mot de x à y, tel que
- m_{2i+1} soit un $(\overline{\Theta}_1 \vee \overline{\Sigma}_1)$-mot (éventuellement $m_1 = 1$ ou $m_{2p+1} = 1$),
- m_{2i} soit un $(\overline{\Theta}_2 \vee \overline{\Sigma}_2)$-mot,
- p soit minimal pour ces propriétés (p est le nombre minimum de $(\overline{\Theta} \vee \overline{\Sigma})$-mots verts qui interviennent dans un $(\overline{\Theta} \vee \overline{\Sigma})$-mot de x à y).

Posons $x_1 = m_1(x), \cdots, x_{j+1} = m_{j+1}(x_j), \cdots x_{2p} = m_{2p}(x_{2p-1})$. On a :

$$\mathbf{P}(x) \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} \mathbf{P}(x_1) \overset{\mathcal{R}_2}{\sim} \mathbf{P}(x_2) \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} \cdots \overset{\mathcal{R}_2}{\sim} \mathbf{P}(x_{2i}) \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} \mathbf{P}(x_{2i+1}) \overset{\mathcal{R}_2}{\sim} \cdots \overset{\mathcal{R}_2}{\sim} \mathbf{P}(x_{2p}) \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} \mathbf{P}(y).$$

En effet, en décomposant m_{2i+1} (resp. m_{2i}) en $\overline{\Theta}_1$- ou $\overline{\Sigma}_1$-lettres (resp. $\overline{\Theta}_2$- ou $\overline{\Sigma}_2$-lettres), on trouve par projection par $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_*$ une suite de points entre x_{2i} et x_{2i+1} (resp. entre x_{2i-1} et x_{2i}) qui sont $\mathcal{R}_1$- ou $\mathcal{R}_3$-équivalents (resp. $\mathcal{R}_2$- ou $\mathcal{R}_3$-équivalents).

Supposons $p > 0$. Par l'hypothèse $\mathbf{P}(y) \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} \mathbf{P}(x)$ et par la propriété des produits amalgamés, la suite $(\mathbf{P}(x_1), \mathbf{P}(x_2), \cdots, \mathbf{P}(x_{2p}))$ n'est pas réduite : il existe $j \in \mathbf{Z}/2p\mathbf{Z}$ (et par la remarque IV.7, on peut supposer que $j \neq 2p$) tel que $\mathbf{P}(x_j) \overset{\mathcal{R}_3}{\sim} \mathbf{P}(x_{j+1})$. Alors, il existe un n tel que
- $x_j \overset{\overline{\mathcal{R}}_3^n}{\sim} x_{j+1}$
- x_j et x_{j+1} sont dans la même orbite pour un $(\overline{\Theta} \vee \overline{\Sigma}_1^n \vee \overline{\Sigma}_2^n)$-mot unicolore (de la couleur du mot m_{j+1}) (les $\overline{\Sigma}$-lettres utiles pour définir m_{j+1} sont construites à une étape finie).

Alors, au moins à partir du rang $n+2$ de la récurrence, x_j et x_{j+1} sont à la fois rouge- et vert-équivalents. Il existe donc un $(\overline{\Theta} \vee \overline{\Sigma})$-mot de chacune des deux couleurs de x_j à x_{j+1}. Cela contredit la minimalité de p, on a donc $p = 0$. On procède symétriquement pour le vert. Cela termine la preuve du théorème IV.15 des produits amalgamés. □

IV.38. Preuve du théorème IV.16.
Commençons par établir la contraposée dans le cas particulier où $\mathcal{R}_3$ est triviale : supposons que $\mathcal{R}$ est engendrée par deux sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ qui ne sont pas en produit libre. Montrons que $\mathcal{C}(\mathcal{R}) < \mathcal{C}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{C}(\mathcal{R}_2)$.

(1) Donnons-nous un graphage auxiliaire Φ_1 de $\mathcal{R}_1$ (resp. Φ_2 de $\mathcal{R}_2$). On trouve :

- un $(\Phi_1\vee\Phi_2)$-mot m qui se décompose sous la forme $m = m_{l_0}\cdots m_2\cdot m_1$, où les m_{2i+1} sont des Φ_1-mots et les m_{2i} des Φ_2-mots et
- un borélien A de mesure > 0 contenu dans le domaine de m, tels que les itérés successifs $m_j\cdots m_2\cdot m_1(A)$ sont deux à deux disjoints ($j < l_0$) et $m(A) = A$.

En effet, il existe des suites cycliques réduites non triviales $(x_j)_{j\in\mathbf{Z}/2p\mathbf{Z}}$, avec $p > 0$, telles que $x_j \neq x_{j+1}$ et $x_{2i-1} \overset{\mathcal{R}_1}{\sim} x_{2i} \overset{\mathcal{R}_2}{\sim} x_{2i+1}$, $\forall i \in \mathbf{Z}/2p\mathbf{Z}$. Appelons longueur colorée le nombre $2p$ associé à une telle suite. Pour $x \in X$, soit $L(x) \in \mathbf{N}$ le minimum des longueurs colorées des suites cycliques réduites non triviales contenant x ($L(x) = \infty$ si x n'appartient à aucune telle suite). Soit l_0 le premier entier l (l'hypothèse entraîne que $2 \leq l_0 < \infty$ et l_0 pair) tel que le borélien $\{L = l\}$ soit de mesure > 0. Quitte à se donner un bon ordre sur les $(\Phi_1\vee\Phi_2)$-mots, on trouve pour chaque $x \in \{L = l_0\}$ un premier mot de longueur colorée l_0, qui réalise un tel cycle à partir de x. Par dénombrabilité de l'ensemble des mots et minimalité de l_0, on trouve m et $A' \subset \mathrm{dom}(m)$ de mesure > 0 tel que pour tout $x \in A'$, les itérés successifs $m_j\cdot m_2\cdot m_1(x)$ sont deux à deux distincts et $m(x) = x$. Le lemme I.12 donne alors A.

(2) Appelons ψ_j la restriction de m_j à $m_{j-1}\cdots m_2\cdot m_1(A)$, pour $j = 1,\cdots, l_0$. Soit Ψ_1 (resp. Ψ_2) l'arborage constitué des ψ_j d'ordre impair (resp. d'ordre pair). Ils engendrent une sous-relation de $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_2$), à orbites finies et $\mu(\mathrm{dom}(\psi_j)) = \mu(A)$.

(3) Complétons Ψ_1 en un graphage $\overline{\Psi}_1$ de $\mathcal{R}_1$ de coût inférieur à $\mathcal{C}(\mathcal{R}_1)+\eta$ et Ψ_2 en un graphage $\overline{\Psi}_2$ de $\mathcal{R}_2$ de coût inférieur à $\mathcal{C}(\mathcal{R}_2)+\eta$, avec $\eta < 1/2\cdot\mu(A)$ (lemme III.5). Dans le graphage $\overline{\Psi}_1\vee\overline{\Psi}_2$ de $\mathcal{R}$, on peut supprimer le générateur ψ_1 sans modifier les orbites. Donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\mathcal{R}) &\leq \mathcal{C}(\overline{\Psi}_1\vee\overline{\Psi}_2)-\mu(A)\\ &\leq \mathcal{C}(\mathcal{R}_1)+\mathcal{C}(\mathcal{R}_2)+2\cdot\eta-\mu(A) < \mathcal{C}(\mathcal{R}_1)+\mathcal{C}(\mathcal{R}_2).\end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas général, avec $\mathcal{R}_3$ finie.

Soit D un domaine fondamental pour $\mathcal{R}_3$. La relation $\mathcal{R}$ n'est pas le produit amalgamé $\mathcal{R}_1 *_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2$ si et seulement si les relations induites $\mathcal{R}_{1|D}$ et $\mathcal{R}_{2|D}$ ne sont pas en produit libre (exemple IV.11). Appliquons ce qui précède pour les relations induites. Alors la proposition d'induction II.6 (en utilisant $\mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_3) = 1-\mu(D)$) permet de montrer que $\mathcal{C}(\mathcal{R}) < \mathcal{C}(\mathcal{R}_1)+\mathcal{C}(\mathcal{R}_2)-\mathcal{C}(\mathcal{R}_3)$.

IV.39. Preuve du théorème IV.1.
Soit Φ un arborage. Sous l'hypothèse supplémentaire que le cardinal de Φ est fini, c'est précisément l'énoncé du théorème principal de [Gab98], et la partie laissée en suspens (graphage adapté) vient d'être détaillée (proposition IV.35). Plus généralement, c'est un corollaire du théorème IV.15. En effet :

(1) Si $\Phi = (\varphi_1)$ n'a qu'un seul générateur qui constitue un arborage, $\mathcal{R}_\Phi$ est hyperfinie et la proposition III.2.(3) montre que $\mathcal{C}(\mathcal{R}_\Phi) = \mathcal{C}(\Phi)$.
(2) Si Φ possède n générateurs, une partition $\Phi = (\varphi_1) \vee (\varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ décompose la relation $\mathcal{R}_\Phi$ en produit libre et le théorème IV.15 assure que $\mathcal{C}(\mathcal{R}_\Phi) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_{(\varphi_1)}) + \mathcal{C}(\mathcal{R}_{(\varphi_2,\cdots,\varphi_n)})$. Une récurrence permet de conclure dans ce cas.
(3) Si le cardinal de Φ est infini (par exemple $\mathcal{C}(\Phi) = \infty$), appelons $\Phi_q = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q)$ l'arborage constitué des q premiers générateurs. Soit Ψ un autre graphage de $\mathcal{R}_\Phi$, montrons que $\mathcal{C}(\Psi) \geq \mathcal{C}(\Phi)$. Pour q fixé, *les $\varphi_i \in \Phi_q$ s'expriment à l'aide d'une partie finie de Ψ, à peu de choses près* : il existe une sous-famille finie $\Psi_{r_q} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{r_q})$ de Ψ et des mesurables $D_1, D_2, \ldots, D_q$, de mesures $< 1/2^q$ tels que les points x et $\varphi_i(x)$ soient Ψ_{r_q}-équivalents, pour tout $i = 1, \ldots, q$ et pour tout $x \in \mathrm{dom}(\varphi_i) \setminus D_i$. Par ailleurs, les générateurs de Ψ_{r_q} sont des Φ_p-mot pour un certain $p \geq q$ assez grand. Le graphage Λ, constitué de Ψ_{r_q}, des restrictions de φ_i à D_i (pour $i = 1, \ldots, q$), et de $\Phi_p \setminus \Phi_q$ engendre $\mathcal{R}_{\Phi_p}$, donc : $\mathcal{C}(\Psi_{r_q}) + q/2^q + \mathcal{C}(\Phi_p \setminus \Phi_q) \geq \mathcal{C}(\Lambda) \geq \mathcal{C}(\mathcal{R}_{\Phi_p}) = \mathcal{C}(\Phi_p) = \mathcal{C}(\Phi_p \setminus \Phi_q) + \mathcal{C}(\Phi_q)$, où le paragraphe (2) ci-dessus donne la première égalité.

On en déduit $\mathcal{C}(\Psi) \geq \mathcal{C}(\Psi_{r_q}) \geq \mathcal{C}(\Phi_q) - q/2^q$, quantité qui tend vers $\mathcal{C}(\Phi)$ lorsque q tend vers l'infini.

V Petits coûts et relations décomposables

Une relation (SP1) $\mathcal{R}$ sur (X, μ) est dite *décomposable* s'il existe deux relations (SP1) à orbites infinies $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sur (X_1, μ_1) et (X_2, μ_2) respectivement, telles que $\mathcal{R}$ soit stablement orbitalement équivalente à la relation sur $(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$, notée $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, définie par $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ si et seulement si $x_1 \mathcal{R}_1 y_1$ et $x_2 \mathcal{R}_2 y_2$.

Proposition V.1. *Si $\mathcal{R}$ est ergodique et décomposable, alors $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = 1$.*

On retrouve ainsi un résultat de S. Adams :

Théorème V.2 [Ada88, th. 4.1]. *Une relation (SP1) ergodique arborable décomposable $\mathcal{R}$ est nécessairement hyperfinie.*

Preuve de la proposition V.1. Supposons que $\mathcal{R}$ se décompose. Soit $\Phi = (\varphi_i : A_i \to B_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sur X_1 (resp. $\Psi = (\psi_j : C_j \to D_j)_{j\in\mathbf{N}}$ sur X_2) un graphage de relation $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_2$) et fixons $\varepsilon > 0$. Donnons-nous $\Sigma = (\sigma_k : E_k \to F_k)_{k\in K}$ un graphage de coût 1 d'une sous-relation $\mathcal{S}_1$ à orbites infinies de $\mathcal{R}_1$ et une suite décroissante $(H_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de boréliens de X_1, qui rencontrent chacun toutes les orbites de $\mathcal{S}_1$ et telle que $\sum_{j\in\mathbf{N}} \mu_1(H_j) \leq \varepsilon/2$. Le graphage $\Theta_1 = (\sigma_k \times id)_{k\in K} \vee (id_{|H_j} \times \psi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ sur $X_1 \times X_2$, où

- $\sigma_k \times id$ est défini sur $E_k \times X_2$ et envoie (x_1, x_2) sur $(\sigma_k(x_1), x_2)$ et
- $id_{|H_j} \times \psi_j$ est défini sur $H_j \times C_j$ et envoie (x_1, x_2) sur $(x_1, \psi_j(x_2))$,

engendre la relation $\mathcal{S} \times \mathcal{R}_2$, pour un coût inférieur à $1 + \varepsilon/2$. En effet si $(x_1, x_2)\mathcal{S} \times \mathcal{R}_2(y_1, y_2)$, alors il existe un Ψ-mot m de x_2 à y_2. Soit j_0 le maximum des indices des Ψ-lettres qui composent ce mot. Il existe un point $u_1 \in H_{j_0}$ qui est Σ-équivalent à x_1 et le $(id_{|H_j} \times \psi_j)_{j\in\mathbf{N}}$-mot correspondant à m est défini en (u_1, x_2). Il est alors immédiat que $(x_1, x_2)\overset{\Theta}{\sim}(u_1, x_2)\overset{\Theta}{\sim}(u_1, y_2)\overset{\Theta}{\sim}(y_1, y_2)$.

De manière comparable, on se donne une suite décroissante $(L_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de boréliens de X_2, qui rencontrent chacun toutes les orbites de $\mathcal{R}_2$ et telle que $\sum_{i\in\mathbf{N}} \mu_2(L_i) \leq \varepsilon/2$. On obtient alors un graphage de $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ de coût inférieur à $1 + \varepsilon$, par l'adjonction à Θ du graphage $(\varphi_i \times id_{|L_i})_{i\in\mathbf{N}}$. On en déduit en variant ε que $\mathcal{C}(\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2) = 1$, et l'invariance II.11 permet de conclure que $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = 1$. □

Preuve du théorème V.2. Par V.1, on a $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = 1$ et le corollaire IV.2 assure que l'arborabilité entraîne alors l'hyperfinitude. □

Avec des idées analogues, on montre le lemme suivant :

Lemme V.3. *Soit $\mathcal{R}$ une relation (SP1) et Φ un graphage de $\mathcal{R}$. Soit $\psi : A \to B$ un isomorphisme partiel de X et $\mathcal{T}$ la relation sur A définie par*

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= (\psi^{-1} \cdot \mathcal{R}_{|B} \cdot \psi) \cap \mathcal{R}_{|A} \\ &= \{(x, y) \in A \times A \ : \ x \overset{\mathcal{R}}{\sim} y \text{ et } \psi(x) \overset{\mathcal{R}}{\sim} \psi(y)\}\,.\end{aligned}$$

Supposons que $\mathcal{T}$ soit à orbites infinies. Alors, $\forall\varepsilon > 0$, la relation $\mathcal{R}_{\Phi\vee\{\psi\}}$ engendrée par $\Phi \vee \{\psi\}$ est aussi engendrée par le graphage $\Phi \vee \{\psi_{|\varepsilon}\}$ de coût $\leq \mathcal{C}(\Phi) + \varepsilon$, où $\psi_{|\varepsilon}$ est la restriction de ψ à un borélien de mesure $\leq \varepsilon$ qui rencontre presque toutes les $\mathcal{T}$-orbites.

Preuve du lemme V.3. En effet, soit $A_\varepsilon \subset A$ un borélien (quelconque) de mesure $\leq \varepsilon$ qui rencontre presque toutes les $\mathcal{T}$-orbites (voir lemme I.14). Tout $x \in A$ est $\mathcal{T}$-équivalent à un $y \in A_\varepsilon$ et, par définition de $\mathcal{T}$, les points $\psi(x)$ et $\psi(y)$ sont $\mathcal{R}$-équivalents. Alors, on a $x \overset{\Phi}{\sim} y \overset{\psi_{|\varepsilon}}{\sim} \psi(y) \overset{\Phi}{\sim} \psi(x)$, ce qui montre qu'il existe des $\Phi \vee \{\psi_{|\varepsilon}\}$-mots qui remplacent ψ sur $A \setminus A_\varepsilon$. □

VI En théorie des groupes

À tout groupe dénombrable Γ, on associe un nombre, $\mathcal{C}(\Gamma)$ et dans cette partie, on étudie les propriétés de cette application, en particulier, comportement par produit libre, extensions... L'invariant est *dynamique* dans la mesure où sa définition est liée aux *actions* du groupe. On introduit aussi la notion d'arborabilité pour un groupe dénombrable. C'est un autre invariant dynamique.

Toutes les actions considérées sont mesurables, libres, préservant la mesure, sur un espace de probabilité (X, μ) isomorphe à l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue. On renvoie à la partie I pour les définitions de **graphage**, **arborage**, **coût** d'un graphage, d'une action, d'un groupe et de groupe **à prix fixe**.

VI-A Définitions et premières propriétés

Définition VI.1. *Un groupe Γ est dit* **arborable** *(resp.* **anti-arborable***) si toutes ses actions libres sont arborables (resp. non arborables).*

Question VI.2. Existe-t-il des groupes dont certaines actions seraient arborables et d'autres non ?

Voici quelques premières propriétés ou bien déjà connues, ou bien immédiates. Notons $|\Gamma|$ le cardinal du groupe Γ.

Propriétés VI.3.

(1) *[Lev95] Si Γ est un groupe fini alors Γ est arborable à prix fixe et $\mathcal{C}(\Gamma) = 1 - \frac{1}{|\Gamma|}$.*
(2) *[OW80] Si Γ est infini moyennable alors Γ est arborable à prix fixe et $\mathcal{C}(\Gamma) = 1$.*
(3) *[Lev95] Si Γ est infini alors $\mathcal{C}(\Gamma) \geq 1$.*
(4) *Si Γ est engendré par r éléments alors $\mathcal{C}(\Gamma) \leq r$.*
(5) *Si Γ_1 et Γ_2 sont arborables alors $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ est arborable.*
(6) *[AS90] les groupes infinis possédant la propriété (T) de Kazhdan sont anti-arborables.*
(7) *Chaque réseau de* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ *possède une action arborable, il n'est donc pas anti-arborable.*

Remarques VI.4. Sans rappeler la définition de *groupe moyennable*, mentionnons seulement que parmi les groupes moyennables, on trouve les groupes finis, les groupes abéliens et mêmes les groupes résolubles. En revanche, les groupes libres non monogènes sont des prototypes de groupes non moyennables. Si un groupe discret est moyennable, ses sous-groupes et ses quotients sont moyennables. (2) Par le théorème de Ornstein-Weiss, toute action libre d'un groupe moyennable est orbitalement équivalente à une **Z**-action, elle est hyperfinie (voir III.1) La proposition (3) est une généralisation de (1), avec $1/\infty = 0$. (6) C'est par exemple le cas de tous les réseaux de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$, $n \geq 3$. On obtient en VI.30 une nouvelle preuve de l'anti-arborabilité des réseaux dans les groupes de Lie de rang supérieur. Il existe aussi des groupes hyperboliques au sens de M. Gromov qui ne sont pas arborables : considérer, par exemple, les réseaux cocompacts du groupe $\mathrm{Sp}(n, 1)$ des isométries de l'espace hyperbolique quaternionique. On renvoie enfin à l'exemple IV.12 pour un complément. Pour (7), voir II.17.

Proposition VI.5. *Si Γ_1 et Γ_2 sont deux groupes à prix fixes qui admettent des actions libres α_1 et α_2* **orbitalement équivalentes**, *alors $\mathcal{C}(\Gamma_1) = \mathcal{C}(\Gamma_2)$.*

Proposition VI.6. *Si Γ_1 et Γ_2 sont deux groupes*

(1) *à prix fixes qui admettent des actions libres α_1 et α_2* **stablement orbitalement équivalentes** *alors $\mathcal{C}(\Gamma_1) = 1$ (resp. est fini, resp. $= \infty$) si et seulement si $\mathcal{C}(\Gamma_2) = 1$ (resp. est fini, resp. $= \infty$).*
(2) *qui sont respectivement arborables et anti-arborables, alors leurs actions libres ne sont jamais stablement orbitalement équivalentes entre elles.*

Pour VI.5, voir l'invariance II.3.
Pour VI.6. (1), voir l'invariance II.11.
(2) est une conséquence immédiate du corollaire II.10.

VI-B Produits

Théorème VI.7. *Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes à prix fixes de coûts finis, et soit Γ_3 un groupe* **moyennable**.

1 - *Le produit libre $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ est à prix fixe et $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma_1) + \mathcal{C}(\Gamma_2)$.*
2 - *Si $\Gamma \simeq \Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2$ est un produit amalgamé de Γ_1 et Γ_2 au-dessus de Γ_3, alors Γ est à prix fixe et $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma_1) + \mathcal{C}(\Gamma_2) - \mathcal{C}(\Gamma_3)$.*
3 - *Si $\Gamma \simeq \Gamma_1 *_{\Gamma_3}$ est une HNN-extension de Γ_1 au-dessus de Γ_3, alors Γ est à prix fixe et $\mathcal{C}(\Gamma_1 *_{\Gamma_3}) = \mathcal{C}(\Gamma_1) + 1 - \mathcal{C}(\Gamma_3)$.*

Cette proposition admet la réciproque partielle (où $\Lambda \overset{i}{\hookrightarrow} \Gamma$ signifie que i est un homomorphisme de groupes injectif) :

Théorème VI.7'. *Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes à prix fixes, de coûts finis, et soit Γ_3 un groupe* **fini**.

1'- *supposons $\Gamma_1 \overset{i_1}{\hookrightarrow} \Gamma$ et $\Gamma_2 \overset{i_2}{\hookrightarrow} \Gamma$. Si Γ est engendré par les images $i_1(\Gamma_1)$ et $i_2(\Gamma_2)$ et si $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma_1) + \mathcal{C}(\Gamma_2)$, alors Γ est le produit libre $\Gamma = i_1(\Gamma_1) * i_2(\Gamma_2)$.*
2'- *supposons $\Gamma_1 \overset{i_1}{\hookrightarrow} \Gamma$, $\Gamma_2 \overset{i_2}{\hookrightarrow} \Gamma$ et $\Gamma_3 \overset{i_3}{\hookrightarrow} i_1(\Gamma_1) \cap i_2(\Gamma_2)$. Si Γ est engendré par $i_1(\Gamma_1)$ et $i_2(\Gamma_2)$ et si $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma_1) + \mathcal{C}(\Gamma_2) - \mathcal{C}(\Gamma_3)$ alors Γ est le produit amalgamé $\Gamma \simeq \Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2$, avec les injections données.*

3'- *supposons* $\Gamma_1 \overset{i_1}{\hookrightarrow} \Gamma$ *et* $\Gamma_3 \overset{i_3}{\hookrightarrow} i_1(\Gamma_1)$. *Si* Γ *est engendré par* $i_1(\Gamma_1)$ *et un élément* t *tel que* $t^{-1} i_3(\Gamma_3) t \hookrightarrow i_1(\Gamma_1)$, *et si* $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma_1)+1-\mathcal{C}(\Gamma_3)$, *alors* Γ *est l'HNN-extension* $\Gamma \simeq \Gamma_1 *_{\Gamma_3}$, *avec les injections données.*

Remarque VI.8. L'item (1) est bien sûr un cas particulier du (2), avec $\Gamma_3 \simeq \{1\}$, mais vu son importance, on a préféré le dégager clairement. L'item (2) ne serait pas vérifié avec Γ_3 non moyennable : considérer, par exemple, un produit amalgamé du type $\mathbf{F}_2 *_{\mathbf{F}_5} \mathbf{F}_2$. Notons que, dans (1') (resp. (2'), (3')), la majoration $\leq$ du coût de Γ est toujours vérifiée. Ces énoncés caractérisent les produits libres (resp. amalgamés au-dessus de groupes finis) par l'inégalité inverse ; ils seraient faux, en général, avec Γ_3 infini (même moyennable) : le groupe $\mathrm{SL}(3, \mathbf{Z})$, des matrices 3×3 à coefficients entiers, de déterminant 1, agit sur $\mathbf{R}^3$ avec une base (e_1, e_2, e_3). Les groupes $\Gamma_1 = \mathrm{Fix}(e_1)$ et $\Gamma_2 = \mathrm{Fix}(e_2)$ sont à prix fixe de coût 1 (ils vérifient le critère VI.24.(1) ci-dessous), leur réunion engendre $\mathrm{SL}(3, \mathbf{Z})$ et leur intersection Γ_3 est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$. On a bien l'égalité sur les coûts, mais $\mathrm{SL}(3, \mathbf{Z})$ est indécomposable.

Preuve des théorèmes VI.7 et VI.7'. Considérons une action libre α de $\Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2$ sur (X, μ), avec $\mu(X) = 1$. La relation engendrée se décompose comme produit amalgamé des actions restreintes : $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_1} *_{\mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_3}} \mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_2}$ (exemple IV.8). Le théorème IV.15 donne le coût de $\mathcal{R}_\alpha$ en fonction des coûts des actions restreintes, $\mathcal{C}(\mathcal{R}_{\alpha|\Gamma_j}) = \mathcal{C}(\Gamma_j)$. Cela montre (2) et (1) (Γ_3 trivial). Il suffit d'appliquer le théorème IV.16 pour obtenir (1') et (2'). En effet, si les groupes ne sont pas en produit amalgamé, alors les actions restreintes non plus et par contraposition, $\mathcal{C}(\Gamma) \leq \mathcal{C}(\mathcal{R}_\alpha) < \mathcal{C}(\Gamma_1) + \mathcal{C}(\Gamma_2) - \mathcal{C}(\Gamma_3)$. Les extensions HNN se traitent de la même manière avec l'exemple IV.21 et les corollaires IV.25 et IV.26. □

Plus généralement, sans l'hypothèse de prix fixe, pour une action libre α de Γ, qui approche $\mathcal{C}(\Gamma)$ à moins de $\varepsilon > 0$, le théorème IV.15 (resp. corollaire IV.25) donne $\mathcal{C}(\mathcal{R}_\alpha)$ en fonction des coûts des actions $\alpha_{|\Gamma_j}$ restreintes, lesquels majorent le coût des groupes Γ_j, avec égalité dans le cas de Γ_3. En faisant tendre ε vers 0, on obtient donc :

Théorème VI.7". *Si les actions libres de* Γ_1 *et* Γ_2 *sont toutes de coût fini (par exemple, s'ils sont de type fini) et si* Γ_3 *est* **moyennable** *alors*

1" - $\mathcal{C}(\Gamma_1 * \Gamma_2) \geq \mathcal{C}(\Gamma_1) + \mathcal{C}(\Gamma_2)$.
2" - $\mathcal{C}(\Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2) \geq \mathcal{C}(\Gamma_1) + \mathcal{C}(\Gamma_2) - \mathcal{C}(\Gamma_3)$.
3" - $\mathcal{C}(\Gamma_1 *_{\Gamma_3}) \geq \mathcal{C}(\Gamma_1) + 1 - \mathcal{C}(\Gamma_3)$.

Proposition VI.9.

- $\mathcal{C}(\mathbf{F}_n) = n$, *pour le groupe libre* $\mathbf{F}_n$ *de rang* n.
- $\mathcal{C}(\mathbf{F}_\infty) = \infty$, *pour le groupe libre sur une infinité dénombrable de générateurs.*

- $\mathcal{C}(\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})) = 1 + \dfrac{1}{12}$.
- $\mathcal{C}(\pi_1(\Sigma_g)) = 2g-1$, *pour le groupe fondamental de la surface compacte de genre* $g > 1$.

Ces groupes sont à prix fixe et, de plus, $\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_\infty$ *et* $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ *sont arborables. Le groupe* $\pi_1(\Sigma_g)$ *n'est pas anti-arborable.*

Preuve de la proposition VI.9. Le groupe libre $\mathbf{F}_n$ (resp. $\mathbf{F}_\infty$) est clairement arborable et on peut directement calculer son coût grâce au théorème IV.1, et établir qu'il est à prix fixe. On applique le théorème VI.7, avec $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} *_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $\pi_1(\Sigma_g) \simeq \mathbf{F}_g *_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_g$, pour montrer que ces groupes sont à prix fixes et calculer leurs coûts. En ce qui concerne l'arborabilité de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$, c'est une conséquence de la proposition VI.10 à venir, voyons-le directement (avec la même preuve) : soient $a, b, c \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ des générateurs des sous-groupes cycliques $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ de la décomposition. Considérons une action libre α de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ et D_a un domaine fondamental de l'action restreinte $\alpha_{|\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$. L'action restreinte $\alpha_{|\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}}$ (resp. $\alpha_{|\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}}$) induit sur D_a une action dont chaque orbite a 2 (resp. 3) points. Soit $D_b \subset D_a$ (resp. $D_c \subset D_a$) un domaine fondamental. Appelons φ_1 la restriction de $\alpha(a)$ à D_a, φ_2 la restriction de $\alpha(b)$ à D_b et φ_3 la restriction de $\alpha(c)$ à $D_c \coprod \alpha(c)(D_c)$. Le graphage $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ engendre $\mathcal{R}_\alpha$, et la structure de produit amalgamé montre que c'est un arborage (alternativement, puisque $\mathcal{C}(\Phi) = 1/2 + 1/4 + 2/6$ réalise le $\mathcal{C}(\mathcal{R}_\alpha) = 1 + 1/12$, on peut invoquer la proposition I.11). Le groupe $\pi_1(\Sigma_g)$, $g \geq 2$, réseau de $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$, admet des actions arborables (cf. II.17). □

Supposons que Γ se décompose comme graphe de groupes [Ser77], d'ensemble de sommets S et d'ensemble d'arêtes A, de groupes de sommets Γ_s (pour $s \in S$) et de groupes d'arêtes Γ_a (pour $a \in A$). Numérotons les arêtes et appelons A_n la famille des n premières arêtes et S_n la famille de leurs sommets, de sorte que le graphe $\mathcal{G}_n$ constitué des arêtes de A_n et des sommets de S_n soit connexe. Appelons Γ^n le groupe fondamental du graphe de groupes correspondant. Modulo le choix d'un arbre maximal compatible dans chaque $\mathcal{G}_n$, les groupes de sommets et d'arêtes s'injectent dans Γ, et on passe de Γ^n à Γ^{n+1} par extension HNN ou produit amalgamé.

Proposition VI.10.
(1) *Si S et A sont finis et si les groupes de sommets Γ_s (pour $s \in S$) sont* **à prix fixe de coûts finis** *et les groupes d'arêtes Γ_a (pour $a \in A$) sont* **moyennables**, *alors Γ est à prix fixe et* $\mathcal{C}(\Gamma) = 1 + \sum_{s\in S}(\mathcal{C}(\Gamma_s) - 1) + \sum_{a\in A} \frac{1}{|\Gamma_a|}$, *avec* $\frac{1}{\infty} = 0$.
(2) *Sous les hypothèses de (1), sauf l'hypothèse de prix fixe, on a encore l'inégalité*

$$\mathcal{C}(\Gamma) \geq 1 + \sum_{s\in S}(\mathcal{C}(\Gamma_s) - 1) + \sum_{a\in A} \frac{1}{|\Gamma_a|}\,.$$

(3) *Si les groupes de sommets Γ_s sont* **arborables** *à prix fixe de coûts finis et les groupes d'arêtes Γ_a sont* **finis** *alors Γ est arborable à prix fixe et, de plus, on peut alors calculer le coût de Γ même si le graphe est infini :* $\mathcal{C}(\Gamma) = \lim_{n\geq 1} \mathcal{C}(\Gamma^n)$.

Remarques VI.11. On verra en VI.21 que les groupes arborables sont toujours à prix fixe.

L'énoncé (1) de cette proposition permet, en particulier, de retrouver le théorème d'accessibilité de Linnell [Lin83] : si Γ est engendré par r éléments, si les groupes de sommets sont infinis et les groupes d'arêtes sont de cardinal majoré par N, alors le nombre d'arêtes est uniformément majoré, indépendamment de la décomposition de Γ en graphe de groupes : $\#A \leq N \cdot (\mathcal{C}(\Gamma) - 1) \leq N \cdot (r - 1)$.

Le produit amalgamé $(A \bigoplus B) *_B (B \bigoplus C)$ où A, B, C sont tous isomorphes à $\mathbf{Z}$ est de coût 1 et il contient le groupe libre à deux générateurs engendré par A et C (il est donc non moyennable). Cela fournit un exemple de produit amalgamé de groupes arborables au-dessus de $\mathbf{Z}$ qui est anti-arborable (voir VI.22).

Preuve de la proposition VI.10. Clairement, (1) et (2) se montrent par récurrence sur n, à l'aide des théorèmes VI.7 ou VI.7". Pour le (3), considérons une action libre (SP1) α de Γ. Soit $s \in S_1$ et Φ_0 un arborage de l'action (α restreinte) de Γ_s, qui est à prix fixe, alors (théorème IV.1) $\mathcal{C}(\Phi_0) = 1 + \mathcal{C}(\Gamma_s) - 1$. Par récurrence, supposons qu'on a construit des graphages $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ de sorte que $\Phi_0 \vee \Phi_1 \vee \cdots \Phi_n$ soit un arborage de coût égal à $1 + \sum_{s\in S_n} (\mathcal{C}(\Gamma_s) - 1) + \sum_{a\in A_n} \frac{1}{|\Gamma_a|}$. Considérons la $n + 1$-ième arête a_{n+1}, appelons s_1 et s_2 ses extrémités, avec $s_1 \in S_n$, et D_{n+1} un domaine fondamental pour l'action (α restreinte) de $\Gamma_{a_{n+1}}$ (on a $\mu(D_{n+1}) = 1/|\Gamma_{a_{n+1}}|$). Deux cas se présentent :

(1) $s_2 \in S_n$ et Γ^{n+1} est une extension HNN de Γ^n (voir exemple IV.21) qui s'obtient en ajoutant un générateur t à Γ^n. Appelons alors Φ_{n+1} le graphage simplement constitué de la restriction de $\alpha(t^{-1})$ à D_{n+1}.

(2) $s_2 \notin S_n$ et Γ^{n+1} est un produit amalgamé : $\Gamma^n *_{\Gamma_{a_{n+1}}} \Gamma_{s_2}$. Soit $\mathcal{S}$ la relation donnée par l'action de $\Gamma_{s_2} \hookrightarrow \Gamma$ restreinte au domaine D_{n+1} et triviale en dehors de D_{n+1}. Puisque Γ_{s_2} est arborable à prix fixe, la proposition d'induction II.6 montre que $\mathcal{S}$ est arborable, de coût $\mathcal{C}(\Gamma_{s_2}) - 1 + 1/|\Gamma_{a_{n+1}}| \geq 0$. Appelons alors Φ_{n+1} un arborage de $\mathcal{S}$. Il réalise le coût de $\mathcal{S}$ (théorème IV.1). De plus, l'action de Γ^n et $\mathcal{S}$ sont en produit libre (exemple IV.11).

Dans les deux cas, $\Phi_0 \vee \Phi_1 \vee \cdots \Phi_n \vee \Phi_{n+1}$ est un arborage de la relation donnée par l'action de Γ^{n+1}, de coût $1 + \sum_{s\in S_{n+1}} (\mathcal{C}(\Gamma_s) - 1) + \sum_{a\in A_{n+1}} \frac{1}{|\Gamma_a|}$. Le *graphage réunion* $\Phi = \Phi_0 \vee \Phi_1 \vee \cdots \Phi_n \vee \cdots$ est un arborage de l'action de Γ, de coût $\lim_{n\geq 1} \mathcal{C}(\Gamma^n)$. Par le théorème IV.1, $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_\alpha)$, ce qui permet de conclure. □

Proposition VI.12. *Si Γ est un groupe de type fini qui a une infinité de bouts, alors $\mathcal{C}(\Gamma) > 1$.*

Preuve. On peut utiliser le théorème de Stallings [Sta71] disant qu'il se décompose non trivialement comme produit amalgamé ou HNN-extension au-dessus d'un groupe fini et conclure à l'aide du théorème VI.7". En effet, avec les notations de VI.7" le cas HNN-extension se traite immédiatement ($\mathcal{C}(\Gamma_3) = 1 - 1/|\Gamma_3|$). Appelons a_i le cardinal du groupe Γ_i, alors $\mathcal{C}(\Gamma) \geq 1 - 1/a_1 - 1/a_2 + 1/a_3$, où $1/\infty = 0$. Les quantités a_1/a_3 et a_2/a_3 sont infinies ou entières ≥ 2 et elles ne peuvent pas être toutes les deux égales à 2 (un tel groupe n'aurait que deux bouts), alors $1 - 1/a_1 - 1/a_2 + 1/a_3 > 1$. □

La proposition VI.10 permet aussi de montrer que tous les coûts sont permis. C'est assez facile avec des groupes qui ne sont pas de type fini. On en donne la preuve en VI.14. Mais on peut même réaliser tous les coûts $\in [1, \infty[$ avec des groupes de type fini (*finiment engendrés*). C'est l'objet de la proposition VI.16. Cela donne une nouvelle preuve de l'existence d'une quantité non dénombrable de groupes de type fini non isomorphes.

Proposition VI.14. *Pour tout $c \in [1, \infty]$, il existe un groupe Γ_c et un groupe Λ_c, à prix fixes, de coût égaux à c, qui sont respectivement arborable et anti-arborable.*

Preuve. Soit $c \in [1, 2]$, et $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i}$ la décomposition dyadique de $c - 1$ (i.e. $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$).
Soit $A_i \simeq \mathbf{Z}/2^i\mathbf{Z}$ et $B_i \simeq \mathbf{Z}/2^{i-\varepsilon_i}\mathbf{Z}$. Observons que B_i s'injecte dans A_i et A_{i+1} et que $\frac{1}{|B_i|} - \frac{1}{|A_{i+1}|} = \frac{1}{2^{i-\varepsilon_i}} - \frac{1}{2^i} = \frac{\varepsilon_i}{2^i} + \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}}$. Appelons alors Γ le groupe fondamental du graphe de groupes :

Par exemple, pour $c = 1$, il est isomorphe au groupe $(\exp(2i\pi \frac{p}{2^k}))_{p,k\in\mathbf{Z}}$ des racines n-ièmes de l'unité, avec n puissance de 2.

La proposition VI.10.(3) (graphes de groupes) montre que Γ_c est arborable, de coût
$\mathcal{C}(\Gamma_c) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{2^i} - 1) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-\varepsilon_i}} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i} = c$.
Pour $c > 2$, il suffit de prendre le produit libre d'un certain $\Gamma_{c'}$ avec un groupe libre.
Cas anti-arborable :
Pour $c = 1$, on peut prendre $\Lambda_1 = \mathbf{F}_2 \times \mathbf{Z}$.
Pour $c > 1$, soit $n \in \mathbf{N}$ assez grand pour que $d := c - \frac{1}{2^n} > 1$. On peut alors prendre pour Λ_c un produit amalgamé de la forme $\Lambda_c = (\mathbf{F}_2 \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}) *_{\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}} *\Gamma_d$. Il contient le sous-groupe anti-arborable $\mathbf{F}_2 \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$. Par la proposition VI.23, à venir, $\mathcal{C}(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}) = 1$. Mais ce groupe n'étant pas moyennable, le corollaire VI.22 permettra de conclure à son anti-arborabilité. □

Remarques-Questions VI.15. Ce choix de Λ_c répond bien à l'énoncé, mais existe-t-il de tels groupes virtuellement librement indécomposables ? Les groupes de présentation finie sont-ils de coûts rationnels ?

Proposition VI.16. *Pour tout $c \in [1, \infty[$, il existe un groupe* **de type fini**, *à prix fixe, de coût c.*

Preuve de la proposition. Soit $c \in [1, 1 + \frac{1}{8}]$. On va construire un groupe Γ de type fini, à prix fixe et de coût c, en s'inspirant fortement de l'exemple inventé par M. Dunwoody de groupes non accessibles [Dun93]. On commencera par produire un groupe J à prix fixe, de coût c, comme groupe fondamental d'un graphe de groupes $\mathcal{G}$ (peut-être infini) :

$$\mathcal{G} = \overset{G_1}{\bullet}\underset{K_1}{\text{———}}\overset{G_2}{\bullet}\underset{K_2}{\text{———}}\overset{G_3}{\bullet}\underset{K_3}{\text{———}}\overset{G_4}{\bullet}\text{—}\cdots\cdots\underset{K_{n-1}}{\text{———}}\overset{G_n}{\bullet}\underset{K_n}{\text{———}}\cdots\cdots$$

où

(1) les G_n sont des groupes finis
(2) les K_n contiennent chacun un sous-groupe H_n d'indice 2
(3) G_n (pour $n \geq 2$) est engendré par K_{n-1} et H_n
(4) dans J, on a une suite strictement croissante de plongements $H_1 \overset{e_1}{\hookrightarrow} H_2 \overset{e_2}{\hookrightarrow} H_3 \overset{e_3}{\hookrightarrow} \cdots H_n \overset{e_n}{\hookrightarrow} H_{n+1} \overset{e_{n+1}}{\hookrightarrow} \cdots$

Ainsi, la réunion H_ω des H_n est un groupe moyennable (comme réunion dénombrable de groupes finis) et J est engendré par G_1 et H_ω.
Si le graphe de groupes est fini, alors J est de type fini et $\Gamma = J$ convient.
Sinon, on plongera H_ω dans un groupe H, qui sera **de type fini** et de coût 1 (en fait, H sera même résoluble). On prendra alors pour Γ le produit amalgamé

$$\Gamma = J *_{H_\omega} H$$

qui sera de type fini, car engendré par H (contenant H_ω) et G_1, et qui sera de coût égal à $\mathcal{C}(J) + \mathcal{C}(H) - \mathcal{C}(H_\omega) = \mathcal{C}(J) + 1 - 1 = c$, par le théorème VI.7.(2).

Construction de J. Soit $(p(n))_{n\geq 1}$ l'unique suite strictement croissante (peut-être finie) d'entiers, avec $p(1) \geq 1$, telle que $c = 1+1/4\cdot\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-p(n)}$. Soient $(A_i)_{i\in\mathbf{Z}}$, $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois familles de groupes tous isomorphes à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Posons alors

(1) $H_n = \bigoplus_{i=1}^{p(n)} A_i$
(2) $K_n = B_n \bigoplus H_n$
(3) $G_n = (B_{n-1} \bigoplus C_n) \rtimes H_n$, où ce produit semi-direct est défini par :
   - l'élément générateur de $A_{p(n)} \subset H_n$ agit sur $(B_{n-1} \bigoplus C_n)$ en permutant les facteurs, i. e. par l'unique isomorphisme f_n de $(B_{n-1} \bigoplus C_n)$ qui envoie B_{n-1} sur C_n,

– les autres facteurs A_i de H_n agissent trivialement (i. e. commutent avec $(B_{n-1} \bigoplus C_n)$).

Définissons alors les plongements $K_{n-1} \overset{g_n}{\hookrightarrow} G_n \overset{h_n}{\hookleftarrow} K_n$ qui articuleront le graphe de groupes J.

- Le plongement g_n de K_{n-1} dans G_n est défini naturellement, vu les notations, sur les facteurs B_{n-1} et H_{n-1}. Et puisque $p(n) > p(n-1)$, les sous-groupes B_{n-1} et H_{n-1} de G_n commutent entre eux et g_n donne bien un plongement de K_{n-1}.
- Le plongement h_n de K_n dans G_n est donné, lui, naturellement sur H_n et on le définit en envoyant l'élément générateur de B_n sur l'élément s_n de $(B_{n-1} \bigoplus C_n)$, qui est la somme des éléments générateurs de B_{n-1} et C_n. Puisque s_n est central dans G_n, l'application h_n s'étend bien en un plongement de K_n.

G_n est clairement engendré par $g_n(B_{n-1})$ et $h_n(H_n)$. Les groupes H_n se plongent comme annoncé $H_n \hookrightarrow H_{n+1} = H_n \bigoplus_{i=p(n)+1}^{p(n+1)} A_i$ et leur réunion $H_\omega = \bigoplus_{i\geq 1} A_i$ se plonge elle-même dans le groupe $H = (\bigoplus_{i=-\infty}^{i=+\infty} A_i) \rtimes \mathbf{Z}$, où le générateur t de $\mathbf{Z}$ agit en décalant les facteurs A_i d'un cran, en envoyant isomorphiquement A_i sur A_{i+1}. Le groupe H est de type fini, engendré par A_1 et t. On peut remarquer qu'il est résoluble.

Calcul du coût de J
Il suffit d'appliquer la proposition sur les graphes de groupes VI.10 :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(J) &= \lim_{n\to\infty} 1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{|K_i|} - \frac{1}{|G_i|}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{p(n)+1}} - \frac{1}{2^{p(n)+2}}\right) = 1 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-p(n)} = c.\end{aligned}$$

On a montré que tous les coûts compris entre 1 et $1 + \frac{1}{8}$ sont obtenus par des groupes de type fini. Puisque G_1 contient un sous-groupes $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \bigoplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, il est facile de produire des produits amalgamés de Γ et $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \bigoplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \bigoplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ au-dessus de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \bigoplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ pour en déduire le même résultat pour tous les coûts finis ≥ 1. □

Questions VI.17. Quel est le coût des groupes qui sont localement libres (i. e. dont tous les sous-groupes de type fini sont libres) mais non libres ? Sont-ils arborables ?

VI-C Sous-groupes

Proposition VI.18. *Si Γ contient un sous groupe Γ_1 anti-arborable, alors Γ est lui-même anti-arborable.*

Preuve. Par contraposition, considérons une action libre arborable de Γ. Sa restriction à Γ_1 est aussi arborable (théorème IV.4) et libre. $\square$

Théorème VI.19. (i) *Soit Γ un groupe dénombrable et Λ un sous-groupe d'indice fini $[\Gamma : \Lambda]$, alors $\mathcal{C}(\Lambda) - 1 = [\Gamma : \Lambda] \cdot (\mathcal{C}(\Gamma) - 1)$. Si Γ est à prix fixe (resp. arborable, resp. anti-arborable) alors Λ vérifie les mêmes propriétés.*
(ii) *Si Λ est un sous groupe normal fini de Γ, alors $1 - \mathcal{C}(\Gamma) = \frac{1}{|\Lambda|} \cdot (1 - \mathcal{C}(\Gamma/\Lambda))$. De plus Γ est à prix fixe si et seulement si Γ/Λ est à prix fixe.*

Rappelons que deux nombres réels r et s sont *commensurables* s'ils sont multiples entiers d'un même nombre réel et que deux groupes sont *commensurables* s'ils admettent des sous-groupes d'indices finis qui sont isomorphes.

Corollaire VI.20. *Si Γ et Λ sont deux groupes commensurables alors $\mathcal{C}(\Gamma) - 1$ et $\mathcal{C}(\Lambda) - 1$ sont commensurables.*

Preuve du théorème VI.19. (i) Considérons une action libre (SP1) quelconque α de Λ sur X ($\mu(X) = 1$). Un procédé classique de suspension fournit une action libre $\overline{\beta}$ de Γ sur un certain $\overline{X}$: l'action $\tilde{\beta}$ de Γ par multiplication à gauche sur le deuxième facteur de $\tilde{X} = X \times \Gamma$ et l'action $\tilde{\alpha}$ de Λ définie par

$$\tilde{\alpha}(\lambda)(x, \gamma) = (\alpha(\lambda)(x), \gamma \cdot \lambda^{-1})$$

commutent entre elles. L'action $\tilde{\beta}$ induit une action libre $\overline{\beta}$ sur $\overline{X} = \tilde{X}/\tilde{\alpha}$. Du point de vue mesurable, $\overline{X}$ est isomorphe à $X \times \Gamma/\Lambda$, avec la mesure produit $\overline{\mu}$ (on a $\overline{\mu}(\overline{X}) = [\Gamma : \Lambda] \cdot \mu(X)$). L'application $\pi : \tilde{X} \to \overline{X}$ est injective sur $X \times \{1\}$ et $\mathcal{R}_{\overline{\beta}}$ induit sur $\pi(X \times \{1\}) \simeq X$ une relation isomorphe à $\mathcal{R}_{\alpha}$. En effet, si $\overline{\beta}(\gamma)(\pi(x, 1)) = \pi(y, 1)$ alors $\gamma \in \Lambda$. Et pour tout $\lambda \in \Lambda$ on a l'équivalence :
$\big(\overline{\beta}(\lambda)(\pi(x, 1)) = \pi(y, 1)\big) \Leftrightarrow \big(\overline{\alpha}(\lambda^{-1})(x) = y\big)$. La proposition d'induction II.6, avec $\overline{\mu}_1 = \mu/\mu(\overline{X})$, entraîne :

$$(1) \quad [\Gamma : \Lambda] \cdot (\mathcal{C}(\Gamma) - 1) \leq [\Gamma : \Lambda] \cdot (\mathcal{C}_{\overline{\mu}_1}(\mathcal{R}_{\overline{\beta}}) - 1) = \mathcal{C}_{\mu}(\mathcal{R}_{\alpha}) - \mu(X),$$

et donc

$$(2) \qquad [\Gamma : \Lambda] \cdot (\mathcal{C}(\Gamma) - 1) \leq \mathcal{C}(\Lambda) - 1.$$

Si Γ est à prix fixe, on a égalité dans (1), donc toutes les $\mathcal{R}_{\alpha}$ ont le même coût ; Λ est à prix fixe. Si Γ est arborable, alors $\mathcal{R}_{\overline{\beta}}$ est arborable et, par induction (cf. II.6.(1)), $\mathcal{R}_{\alpha}$ aussi. Inversement, si $\mathcal{R}_{\alpha}$ est arborable, alors $\mathcal{R}_{\overline{\beta}}$ aussi et par contraposition, Γ anti-arborable entraîne Λ anti-arborable.

Inversement, soit α une action libre de Γ sur (X, μ), avec $\mu(X) = 1$, et soit $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_i, \cdots)$ un graphage de $\mathcal{R}_{\alpha}$ tel que chaque $\varphi_i : A_i \to B_i$ coïncide sur son domaine avec l'action d'un élément $\gamma_i \in \Gamma$ (on peut toujours subdiviser un graphage pour obtenir un tel Φ). Considérons l'espace $\overline{X} = X \times \Gamma/\Lambda$ (avec la mesure produit $\overline{\mu}$) et le graphage $\overline{\Phi} = (\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots, \overline{\varphi}_i, \cdots)$, où

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_i : A_i \times \Gamma/\Lambda &\to B_i \times \Gamma/\Lambda \\ (x, \gamma\cdot\Lambda) &\mapsto (\varphi_i(x), \gamma_i \cdot \gamma \cdot \Lambda) \end{aligned}$$

Ce graphage vérifie $\mathcal{C}_{\overline{\mu}}(\overline{\Phi}) = [\Gamma : \Lambda] \cdot \mathcal{C}_{\mu}(\Phi)$ et il induit sur le niveau $X_1 = X \times \{1\cdot\Lambda\}$ une relation $\mathcal{S}$ isomorphe à la relation donnée par l'action restreinte $\alpha_{|\Lambda}$ sur X. On a une correspondance entre les Φ-mots et les $\overline{\Phi}$-mots, et à tout mot est associé un élément du groupe Γ. Si $x \overset{\mathcal{R}_{\alpha|\Lambda}}{\sim} y$, alors un Φ-mot de x à y est associé (liberté de l'action) à un élément du sous-groupe Λ donc le $\overline{\Phi}$-mot $\overline{m}$ correspondant à m envoie $(x, 1\cdot\Lambda)$ sur $(y, 1\cdot\Lambda)$. Dans l'autre sens, si un $\overline{\Phi}$-mot fixe la coordonnée $\{1\cdot\Lambda\}$, alors il est associé à un élément de Λ. On en déduit, par la proposition d'induction II.6, que :

$$\mathcal{C}(\Lambda) - 1 \leq \mathcal{C}_{\mu}(\mathcal{R}_{\alpha|\Lambda}) - 1 \leq \mathcal{C}_{\overline{\mu}}(\overline{\Phi}) - \overline{\mu}(\overline{X}) = [\Gamma : \Lambda] \cdot (\mathcal{C}(\Phi) - 1).$$

Et donc l'inégalité inverse de (2).

Notons que l'action de Γ qu'on a construite sur $\overline{X}$ n'est pas générale ; ainsi, on ne peut établir si les propriétés (prix fixe, arborabilité) du sous-groupe Λ *passent* à Γ.

(ii) Par restriction à un domaine fondamental de l'action de Λ (fini et normal), on transforme n'importe quelle action presque libre de Γ en une action presque libre de Γ/Λ. La construction *inverse* permet de passer d'une action quelconque de Γ/Λ à une action de Γ. L'item (ii) s'en déduit par la proposition II.6 d'induction. □

VI-D Petits coûts et réseaux des groupes de Lie

Proposition VI.21. *Si Φ est un arborage d'une action libre α de Γ, alors il réalise le coût de Γ, i.e. $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Gamma)$. En conséquence, tout groupe arborable est à prix fixe. Pour tout groupe dénombrable Γ, il existe une action libre, qui réalise le coût de Γ.*

Comme annoncé dans l'introduction, le coût d'un groupe est donc le minimum des coûts de ses actions libres.

Preuve. Soient α_1 et α_2 deux actions libres de Γ, respectivement sur (X_1, μ_1) et (X_2, μ_2). Soit $\Phi_1 = (\varphi_i : A_i \to B_i)_{i\in I}$ un graphage de α_1 tel que chaque φ_i coïncide sur son domaine avec un certain $\gamma_i \in \Gamma$ (ce qu'on peut toujours supposer quitte à découper les domaines A_i), alors l'action produit $\alpha_1 \times \alpha_2$ sur $(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$ admet le graphage *produit* Ψ^1 constitué des $\psi_i : A_i \times X_2 \to B_i \times X_2, (x_1, x_2) \mapsto (\gamma_i(x_1), \gamma_i(x_2))$. On en déduit : $\mathcal{C}_{\mu_1\times\mu_2}(\mathcal{R}_{\alpha_1\times\alpha_2}) \leq \mathcal{C}_{\mu_1}(\mathcal{R}_{\alpha_1})$. Si Φ_1 est un arborage, alors Ψ^1 est

un arborage, quelque soit α_2. On a donc : $\mathcal{C}_{\mu_2}(\mathcal{R}_{\alpha_2}) \geq \mathcal{C}_{\mu_1\times\mu_2}(\mathcal{R}_{\alpha_1\times\alpha_2}) =^* \mathcal{C}_{\mu_1\times\mu_2}(\Psi^1) = \mathcal{C}_{\mu_1}(\Phi) =^* \mathcal{C}_{\mu_1}(\mathcal{R}_{\alpha_1})$.
$*$ (Puisque les arborages réalisent le coût des relations qu'ils engendrent (théorème IV.1).)

Considérons maintenant une suite (α_n) d'actions de Γ sur (X_n, μ_n) et (Φ_n) une suite de graphages correspondants, dont les coûts tendent vers $\mathcal{C}(\Gamma)$. Alors l'action produit (infini) $\alpha = \alpha_1 \times \alpha_2 \times \cdots \times \alpha_n \times \cdots$ de Γ sur $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times \cdots, \mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n \times \cdots)$ est engendrée par des graphages produits Ψ^n comme ci-dessus, où la seule restriction sur les domaines porte sur la n-ième coordonnée, et dont les coûts tendent vers $\mathcal{C}(\Gamma)$, qui est donc la valeur de $\mathcal{C}_{\mu_1\times\mu_2\times\cdots\times\mu_n\times\cdots}(\mathcal{R}_\alpha)$. $\square$

Ce résultat admet le corollaire suivant qui permet d'augmenter considérablement la liste des groupes anti-arborables.

Corollaire VI.22. *Tout groupe non moyennable de coût égal à 1 est anti-arborable.*

Remarque et applications. On ne suppose pas que Γ soit à prix fixe. Les groupes de la forme $\mathbf{F}_p *_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_q$ où les morphismes injectifs $\mathbf{Z} \overset{i_1}{\hookrightarrow} \mathbf{F}_p$ et $\mathbf{Z} \overset{i_2}{\hookrightarrow} \mathbf{F}_p$ envoient l'élément 1 de $\mathbf{Z}$ sur un élément non primitif de la forme $i_1(1) = u^r$ et $i_2(1) = v^s$, avec $r, s \geq 2$ et $r.s > 4$, sont à prix fixe de coût $p+q-1$ et anti-arborables. En effet, ils contiennent le sous-groupe $\mathbf{Z} *_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}$ engendré par u et v de coût 1, qui est non moyennable puisqu'il se surjecte sur $\mathbf{Z}/r\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/s\mathbf{Z}$. Ce groupe est anti-arborable par le corollaire VI.22 et la proposition VI.18 permet de conclure.

Preuve. Si Γ est un groupe de coût égal à 1 qui admet une action libre arborable, soit Φ un arborage de cette action. La proposition VI.21 ci-dessus assure que $\mathcal{C}(\Phi) = 1$ et la proposition III.3 entraîne alors que $\mathcal{R}_\alpha$ est hyperfinie. Donc Γ est moyennable. $\square$

Proposition VI.23. *Si Γ_1 possède un élément d'ordre infini γ_1 et si Γ_2 est un groupe infini, alors $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ est à prix fixe et $\mathcal{C}(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = 1$.*

Preuve (voir l'exemple des rotations du cercle I-D). Considérons une action libre α de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ sur (X, μ), soit $\gamma_2, \gamma_3, \cdots, \gamma_j, \cdots$ un système générateur de Γ_1, soit $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ un système générateur de Γ_2. Soit $\varepsilon > 0$ et A_n un borélien de mesure $\leq \varepsilon/2^n$ qui rencontre toutes les orbites de l'élément γ_1. Le graphage $\Psi = (\varphi_1, \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n, \cdots)$, où $\varphi_1 : X \to X$ coïncide avec $\alpha(\gamma_1)$ et ψ_n est défini par la restriction de $\alpha(\lambda_n)$ à A_n, engendre la relation d'équivalence donnée par l'action de $< \gamma_1 > \times \Gamma_2$, pour un coût $\leq 1 + \varepsilon$. En effet, pour chaque générateur λ_n de Γ_2 et pour tout $x \in X$, on trouve $n_x \in \mathbf{Z}$ tel que $\gamma_1^{n_x}(x) \in A_n$ et le Ψ-mot $\varphi_1^{-n_x}\psi_n\varphi_1^{n_x}$ est défini en x

et coïncide avec $\alpha(\lambda_n)$. Soit ensuite B_j un borélien de mesure $\leq \varepsilon/2^j$ qui rencontre toutes les orbites du groupe Γ_2 et φ_j la restriction de $\alpha(\gamma_j)$ à B_j. Comme ci-dessus, le graphage $\Psi \vee (\varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n, \cdots)$ engendre $\mathcal{R}_\alpha$ pour un coût $\leq 1 + 2 \cdot \varepsilon$. □

De la même façon, on montre :

Critères VI.24.

(1) (Générateurs commutant) si Γ est engendré par $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$, des éléments d'ordre infini tels que γ_j commute avec γ_{j+1}, pour tout j, alors Γ est à prix fixe, de $\mathcal{C}(\Gamma) = 1$, ou bien
(2) (Sous-groupe normal) si Λ est un sous-groupe distingué infini à prix fixe de Γ, alors $\mathcal{C}(\Gamma) \leq \mathcal{C}(\Lambda)$.

Alex Furman m'a suggéré, avec la même preuve, les énoncés plus généraux suivant :
(3) si Γ est une réunion croissante de groupes infinis Γ_n où Γ_1 est à prix fixe de coût 1, par exemple moyennable, et si Γ_{n+1} est engendré par Γ_n et des éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma^{-1}\Gamma_n\gamma \cap \Gamma_n$ soit infini alors Γ est à prix fixe de coût 1.
(4) si Γ est une réunion croissante de groupes infinis Γ_n où Γ_1 est à prix fixe et si Γ_{n+1} est engendré par Γ_n et des éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma^{-1}\Gamma_n\gamma \cap \Gamma_n$ soit infini alors Γ est de coût $\leq \inf \mathcal{C}(\Gamma_n)$.

Ces énoncés reposent tous essentiellement sur le lemme V.3. Si Γ est engendré par un sous-groupe Γ_1 à prix fixe de coût 1 et par un élément γ tel que $\gamma^{-1}\Gamma_1\gamma \cap \Gamma_1$ soit infini, alors Γ est à prix fixe de coût 1. Et on peut en déduire le critère (1) par récurrence et le critère (3) dans le cas du coût 1 par le lemme VI.25 ci-dessous, qui semble intéressant en lui-même.

Plus généralement, supposons que Λ soit une réunion croissante de groupes infinis Λ_n où Λ_1 est à prix fixe et Λ_{n+1} est engendré par Λ_n et **un** élément $\lambda_{n+1} \in \Lambda$ tel que $\lambda_{n+1}^{-1}\Lambda_n\lambda_{n+1} \cap \Lambda_n$ soit infini. Soit α une action libre (SP1) du groupe Λ et Φ_n un graphage de l'action $\alpha_{|\Lambda_n}$ restreinte à Λ_n. Alors pour tout $\varepsilon_n > 0$ on peut, par le lemme V.3, compléter Φ_n en un graphage de $\alpha_{|\Lambda_{n+1}}$, de coût inférieur à $\mathcal{C}(\Phi_n) + \varepsilon_n$. Les critères s'en déduisent. Pour (3) ou (4), on peut être amené à appliquer ce qui précède successivement à chaque Γ_n.

Lemme VI.25 : continuité croissante. *Si $\mathcal{R}_n$ est une suite croissante de relations à orbites infinies de coûts 1, alors $\mathcal{R} = \cup_n \mathcal{R}_n$ est aussi de coût 1.*

En particulier, un groupe, qui est une limite croissante de groupes à prix fixes de coûts 1, est lui même à prix fixe de coût 1.

L'exemple VI.27 ci-dessous montrera que ce n'est pas le cas pour les suites décroissantes de coût 1.

Preuve du lemme VI.25. Soit Φ_0 un arborage de coût 1 (hyperfini) d'une sous-relation de $\mathcal{R}_1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on peut compléter Φ_0 en un graphage

$\Phi_0 \vee \Phi_n$ de $\mathcal{R}_n$, avec $\mathcal{C}(\Phi_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$ (lemme III.5). Le graphage $\Phi_0 \vee \Phi_1 \vee \cdots \vee \Phi_n \cdots$ engendre la relation $\mathcal{R}$ pour un coût inférieur à $1 + \varepsilon \sum_{n \in \mathbf{N}^*} 1/2^n$. $\square$

VI.26. Applications des critères (1) et (2)
-(a)- Sous-groupe normal ou centre infini *Si* Γ *possède un sous-groupe normal à prix fixe de coût 1 (par exemple un sous-groupe moyennable infini) alors* Γ *est à prix fixe et* $\mathcal{C}(\Gamma) = 1$*. En particulier, les groupes qui possèdent un centre infini sont à prix fixe, de coût 1.*
-(b)- $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$*,* $n \geq 3$ *vérifie le critère (1). Il est engendré par les transvections* $T_{i,j}$ *(obtenues à partir de l'identité en ajoutant un* 1 *à la place* (i, j)*). Deux transvections, dont les 1 marginaux sont soit sur la même ligne soit sur la même colonne, commutent entre elles. On en conclut que* $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$*,* $n \geq 3$ *est à prix fixe de coût 1. Il en est donc de même de tous ses sous-groupes d'indices finis (théorème VI.19).*
-(c)- Réseaux arithmétiques *Plus généralement, on peut montrer que les réseaux arithmétiques des groupes algébriques semi-simples de* $\mathbf{Q}$*-rang* ≥ 2 *admettent un sous-groupe d'indice fini qui vérifie le critère (1).*

VI.27. Exemple de non continuité décroissante. $\mathrm{SL}(3, \mathbf{Z})$ *possède une suite décroissante* Γ_n *de sous-groupes d'indices finis (ils sont donc à prix fixes, de coûts 1) dont l'intersection est isomorphe à* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$*, de coût* $1 + \frac{1}{12}$*.*

Nicolas Bergeron m'a signalé l'exemple concret suivant :

$$\text{prendre}\, \Gamma = \begin{pmatrix} SL(2, \mathbf{Z}) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}) \text{ et } \Gamma_n = f_n^{-1}\left(\begin{pmatrix} SL(2, \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}\right),$$

où $f_n : \mathrm{SL}(3, \mathbf{Z}) \to \mathrm{SL}(3, \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})$ est le morphisme de réduction modulo 2^n.

VI.28. Application du critère (3)
-(a)-*Dave Witte m'a montré (communication personnelle) que si* Γ *est un réseau dans un groupe de Lie connexe, semi-simple, de rang réel* ≥ 2 *et si* Γ *est non cocompact, ou* Γ *réductible, alors* Γ *vérifie le critère 3. Ces groupes sont donc tous à prix fixe, de coût 1.*
-(b)-*Le groupe remarquable F de Thompson de présentation* $\langle x_0, x_1, x_2, \cdots | x_i^{-1} x_j x_i = x_{j+1},\ i < j \rangle$ *est à prix fixe de coût 1 : le sous-groupe engendré par* $x_0 x_1^{-1}, x_2, x_3, \cdots$ *est de coût 1 par le critère (1) ; l'identité* $x_0^{-1} x_2 x_0 = x_3$ *(et* $x_1^{-1} x_2 x_1 = x_3$*) montre qu'on peut lui appliquer le critère (3).*

Donnons une idée sur les arguments de D. Witte. Il suffit de montrer que Γ a un sous-groupe d'indice fini qui vérifie le critère (3).

- Si le centre de G est infini, alors Γ contient un sous-groupe d'indice fini du centre.
- Sinon, G est essentiellement linéaire alors Γ possède un sous-groupe d'indice fini sans torsion.
- Si Γ est réductible, alors Γ est commensurable à un produit direct.
- Sinon, par le théorème d'arithméticité de Margulis, on peut essentiellement supposer que G est un $\mathbf{Q}$-groupe algébrique et $G(\mathbf{Z}) = G \cap \mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ est commensurable à Γ. On remplace Γ par $G(\mathbf{Z})$. Puisque G/Γ n'est pas cocompact, G contient un $\mathbf{Q}$-sous-groupe parabolique maximal P. Soit U le radical unipotent de P et appelons Γ_1 le groupe infini $U(\mathbf{Z})$. Ce groupe est moyennable. Puisque P normalise U, on peut prendre $\Gamma_2 = P(\mathbf{Z})$. Fixons $\gamma \in \Gamma$ et posons $M = P \cap \gamma^{-1} P \gamma$. Il suffit de montrer que $M(\mathbf{Z})$ est infini, car alors on pourra prendre $\Gamma_3 = \Gamma$.
  Si M n'est pas réductif, son radical unipotent contient une infinité de points entiers.
  Si M est réductif, les deux groupes paraboliques P et $\gamma^{-1} P \gamma$ sont opposés et la théorie générale montre qu'à indice fini près, M se décompose en un tore $\mathbf{Q}$-déployé de dimension 1 et un groupe L de $\mathbf{R}$-rang ≥ 1 (car $\mathbf{R}$-rang$(G) \geq 2$) sans caractères sur $\mathbf{Q}$, grâce à la maximalité de P. Alors L n'est pas compact et $L(\mathbf{Z})$ y apparaît comme réseau, donc infini.

Une discussion avec Étienne Ghys m'a permis de relire la preuve de Dave Witte dans un cas particulier :

Exemple VI.29. *Soit d un nombre entier positif sans facteur carré. Soit $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ et $\mathcal{O}$, l'anneau des points entiers de K. Le groupe $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$ se plonge comme réseau dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Il est à prix fixe, de coût 1.*

Preuve. On va montrer qu'il vérifie le critère (3). Le groupe Γ est le groupe des points entiers $G_{\mathbf{Z}}$ pour une certaine structure $\mathbf{Q}$-algébrique sur $\mathrm{SL}(2, K)$. Par ailleurs, le groupe $\mathrm{SL}(2, K)$ agit projectivement sur $K \cup \{\infty\}$ par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [p : q] = [ap + bq : cp + dq]$, où $\infty = [a : 0]$, $a \neq 0$.
Soit $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in K^*, b \in K \right\} = \mathrm{Fix}(\infty)$. Posons $\Gamma_2 = P \cap \Gamma$, c'est un groupe moyennable.
Considérons ensuite un $\gamma \in \Gamma$ quelconque. Le groupe $\gamma^{-1} P \gamma$ fixe le point $\gamma^{-1}(\infty)$.
Si $\gamma^{-1}(\infty) = \infty$, alors $\gamma^{-1} \Gamma_2 \gamma \cap \Gamma_2 = \Gamma_2$ est infini.
Si $\gamma(\infty) \neq \infty$ alors, puisque $\mathrm{SL}(2, K)$ agit transitivement sur les paires de points de $K \cup \{\infty\}$, il existe un $h \in \mathrm{SL}(2, K)$ tel que $h(\infty) = \infty$ et $h\gamma(0) = \infty$. Dans cette situation, $D = h^{-1}(\gamma^{-1} P \gamma \cap P) h$ est le sous-groupe des matrices diagonales de $\mathrm{SL}(2, K)$ et son intersection avec Γ est le groupe $D \cap \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in \mathcal{O}^{\times} \right\}$, qui est infini par le théorème de

Dirichlet. Cependant, ce qui nous intéresse, c'est l'ensemble $\gamma^{-1}\Gamma_2\gamma \cap \Gamma_2$ des éléments de $\gamma^{-1}P\gamma \cap P$ qui sont dans Γ. On doit en quelque sorte *déconjuguer* la situation par h. Or, le morphisme $x \mapsto hxh^{-1}$ est un morphisme défini sur $\mathbf{Q}$ entre les groupes $\mathbf{Q}$-algébriques D et hDh^{-1} ; donc le théorème de Borel [Bor69] assure que l'image du groupe arithmétique $D \cap \Gamma$ est arithmétique, c'est-à-dire qu'à un sous-groupe d'indice fini près, c'est l'ensemble des points entiers $hDh^{-1} \cap \Gamma = \gamma^{-1}\Gamma_2\gamma \cap \Gamma_2$. Cela assure que ce dernier est infini. □

On a déjà vu (Corollaire II.16) que si Γ et Λ sont deux réseaux à prix fixe d'un même groupe de Lie G connexe, alors leurs coûts sont reliés par leurs covolumes : $\mathrm{Vol}(G/\Lambda) \cdot (\mathcal{C}(\Gamma) - 1) = \mathrm{Vol}(G/\Gamma) \cdot (\mathcal{C}(\Lambda) - 1)$.
Si l'hypothèse de prix fixe porte seulement sur Γ, alors on a l'inégalité $\geq$, mais si Γ est de plus de coût 1, alors tous les autres réseaux de G sont de coût 1.

Corollaire VI.30. *Tous les réseaux des groupes de Lie G connexes semi-simples de* $\mathbf{R}$*-rang* ≥ 2 *sont de coût 1. Étant non moyennables, ils sont tous anti-arborables.*

Il suffit de trouver dans le groupe G un réseau vérifiant le critère (3) : en général, invoquer l'existence d'un réseau non cocompact (Borel) puis l'énoncé VI.28.(a) de D. Witte. On peut alternativement montrer l'existence d'un réseau de $\mathbf{Q}$-rang ≥ 2, puis VI.26.(c). On utilise ensuite VI.22 pour l'anti-arborabilité. C'est avec le théorème VI.19 le seul exemple où l'on a pu calculer le coût d'un groupe sans établir en même temps qu'il était à prix fixe. Cet énoncé est surtout intéressant en ceci qu'il montre que la théorie du coût est en quelque sorte *orthogonale* à celle des actions libres de réseaux dans les groupes de rang supérieur ([Zim84], [Fur98],...).

Remarque VI.31 : liens avec la caractéristique d'Euler. La caractéristique d'Euler χ est un invariant défini pour un certain nombre de groupes. Elle vaut $\frac{1}{|\Gamma|}$ pour les groupes finis et 0 pour $\mathbf{Z}$. On renvoie au livre de K. Brown [Bro82] pour les définitions. Si Γ est de *type homologique fini* (THF) et Λ est un sous-groupe d'indice fini, alors $\chi(\Lambda)\cdot[\Gamma : \Lambda] = \chi(\Gamma)$. Si $\Gamma = \Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2$ est le produit amalgamé de trois groupes (THF) et si Γ est virtuellement sans torsion, alors $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma_1) + \chi(\Gamma_2) - \chi(\Gamma_3)$. Ces formules, comparables au théorème VI.19 et au théorème VI.7, expliquent que pour un certain nombre de groupes on ait l'égalité : $1 - \mathcal{C}(\Gamma) = \chi(\Gamma)$. Signalons aussi un résultat de J. Cheeger et M. Gromov [CG86] qui assure qu'un groupe moyennable Γ possédant un $K(\Gamma, 1)$ fini a une caractéristique d'Euler nulle. En revanche, si Γ est virtuellement sans torsion et si $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ est le produit direct de deux groupes de (THF), alors $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma_1) \cdot \chi(\Gamma_2)$, alors que $\mathcal{C}(\Gamma) = 1$ (prop. VI.23).

Corollaire VI.32. *Si* Γ *et* Λ *sont deux groupes (THF) tels que* $\chi(\Gamma)\cdot(1-\mathcal{C}(\Lambda)) \neq \chi(\Lambda)\cdot(1-\mathcal{C}(\Gamma))$*, alors ils ne sont pas commensurables.*

Exemple VI.33. Les groupes $\Gamma = (\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_4) * (\mathbf{F}_3 \times \mathbf{F}_5)$ et $\Lambda = (\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_5) * (\mathbf{F}_3 \times \mathbf{F}_4)$ ne sont pas commensurables.

VI-E Groupes de D. McDuff

En 1969, D. McDuff a montré l'existence d'une infinité non dénombrable de facteurs de type II_1 non isomorphes, chacun associé à un groupe dénombrable $H_\alpha(G)$. On va dire très peu de choses sur le sujet ; on va seulement rappeler la présentation donnée de ces groupes et montrer qu'ils sont tous de coût 1.

Soit Γ un groupe dénombrable non trivial et $\tilde{\Gamma} = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$ où chaque $\Gamma_j \simeq \Gamma$. On appelle $L_0(\Gamma)$ le groupe engendré par $\tilde{\Gamma}$ et des éléments d'ordre infini $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$, on appelle $L_1(\Gamma)$ le groupe engendré par le produit semi-direct $\Pi \ltimes \tilde{\Gamma}$, où Π est le groupe des permutations de $\mathbf{N}^*$ qui fixent tous les entiers sauf un nombre fini d'entre eux, avec son action naturelle sur $\tilde{\Gamma}$, et par des éléments d'ordre infini $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$, et dans les deux cas, on ajoute pour seules relations le fait que chaque λ_i commute avec les $\gamma_j \in \Gamma_j$ pour $j \geq i$.

$$L_0(\Gamma) =< (\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}, \tilde{\Gamma} > /(\gamma_j^{-1}\lambda_i\gamma_j = \lambda_i,\ i \leq j,\ \gamma_j \in \Gamma_j)$$
$$L_1(\Gamma) =< (\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}, \Pi \ltimes \tilde{\Gamma} > /(\gamma_j^{-1}\lambda_i\gamma_j = \lambda_i,\ i \leq j,\ \gamma_j \in \Gamma_j)$$

Les deux groupes $L_0(\Gamma)$ et $L_1(\Gamma)$ vérifient le critère (3), ils sont donc à prix fixe de coût 1 : on traite les deux groupes simultanément. On prend $\Lambda_1 =< \lambda_1 >$. Puisque chaque $\gamma_j \in \Gamma_j$ commute avec λ_1, l'ensemble J_1 des éléments ω pour lesquels $\omega^{-1}\Lambda_1\omega \cap \Lambda_1$ est infini contient tous les γ_j. On prend alors $\Lambda_2 =< \lambda_1, \tilde{\Gamma} >$. Pour chaque λ_i, le groupe $\lambda_i^{-1}\Lambda_2\lambda_i \cap \Lambda_2$ contient tous les Γ_j pour $j \geq i$; l'ensemble J_2 des ω pour lesquels $\omega^{-1}\Lambda_2\omega \cap \Lambda_2$ est infini contient donc tous les λ_i. De plus, pour $L_1(\Gamma)$, le groupe Π normalise $\tilde{\Gamma}$; il est contenu dans J_2. Dans les deux situations, Λ_2 et J_2 engendrent $L_0(\Gamma)$ et $L_1(\Gamma)$.

À chaque suite infinie $\alpha = (\alpha_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ de 0 et de 1, D. McDuff associe ainsi une suite croissante (en spécifiant un plongement $\Omega \hookrightarrow L_*(\Omega)$) de groupes $L_{\alpha_n}L_{\alpha_{n-1}}\cdots L_{\alpha_2}L_{\alpha_1}(\tilde{\Gamma})$ et pose $H_\alpha(\Gamma) = \cup_{n\to\infty}L_{\alpha_n}L_{\alpha_{n-1}}\cdots L_{\alpha_2}L_{\alpha_1}(\tilde{\Gamma})$. On obtient, grâce au lemme de continuité croissante VI.25, la proposition :

Proposition VI.34. *Les groupes $H_\alpha(\Gamma)$ sont à prix fixe et de coût 1.*

VII Mercuriale de groupes

Pour un certain nombre de groupes on donne la liste de leurs coûts. Lorsqu'on peut, on précise si ces groupes sont arborables ($\mathcal{A}$), ou anti-arborables ($\overline{\mathcal{A}}$), s'ils sont à prix fixe (P.F.), et dans la dernière colonne, on renvoie aux paragraphes de ce papier qui permettent de justifier les données.

Mercuriale				
Groupes	**Coûts**	**Arbo-rabilité**	**Prix Fixe**	**Report**
Γ *fini*	$1 - \frac{1}{\lvert\Gamma\rvert}$	$\mathcal{A}$	P.F.	I.10
Γ *moyennable infini*	1	$\mathcal{A}$	P.F.	III.4
$\mathbf{F}_n$	n	$\mathcal{A}$	P.F.	VI.9
$\mathbf{F}_\infty$	∞	$\mathcal{A}$	P.F.	VI.9
$\pi_1(\Sigma_g)$	$2g-1$	non $\overline{\mathcal{A}}$	P.F.	VI.9
$\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$	$1+\frac{1}{12}$	$\mathcal{A}$	P.F.	VI.9
$\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})$, $n \geq 3$	1	$\overline{\mathcal{A}}$	P.F.	VI.26.(b)
$\mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_q$ *avec* $p.q > 1$ (7)	1	$\overline{\mathcal{A}}$	P.F.	VI.23,18
$\mathbf{F}_n * (\mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_q)$ *avec* $p.q > 1$	$1+n$	$\overline{\mathcal{A}}$	P.F.	VI.7, 18
$\Gamma_1 * \Gamma_2$ (1)	$\mathcal{C}(\Gamma_1)+\mathcal{C}(\Gamma_2)$	(2)		VI.7
$\Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2$ (3)	$\mathcal{C}(\Gamma_1)+\mathcal{C}(\Gamma_2)-\mathcal{C}(\Gamma_3)$	(4)		VI.7
Γ *réseau de* $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$	$1+\frac{1}{12}\cdot\frac{\mathrm{Vol}(G/\Gamma)}{\mathrm{Vol}(G/\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}))}$	non $\overline{\mathcal{A}}$	(5)	II.16,17
Γ *réseau de* $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$, $n \geq 3$	1	$\overline{\mathcal{A}}$	(5)	VI.26, 22
Γ *réseau d'un groupe de Lie connexe semi-simple de* $\mathbf{R}$*-rang* ≥ 2	1	$\overline{\mathcal{A}}$	(6)	VI.30, VI.22
Λ *d'indice fini* dans Γ	$1+[\Gamma:\Lambda](\mathcal{C}(\Gamma)-1)$	Comme Γ	Comme Γ	VI.19
Γ non moyennable, de centre infini	1	$\overline{\mathcal{A}}$	P.F.	VI.26 (a)

(1) Avec Γ_1, Γ_2 à prix fixes et coûts finis.
(2) Si Γ_1 et Γ_2 sont arborables (resp. à prix fixe), alors $\Gamma_1 * \Gamma_2$ est arborable (resp. à prix fixe).
(3) Avec Γ_1, Γ_2 à prix fixes et coûts finis et avec Γ_3 moyennable.
(4) Si Γ_1 et Γ_2 sont arborables et Γ_3 fini, alors $\Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2$. est arborable. Faux en général avec $\Gamma_3 \simeq \mathbf{Z}$ (voir remarque VI.11). Si Γ_1 est anti-arborable alors $\Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2$ est anti-arborable
(5) Les sous-groupes d'indice fini des $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})$ sont à prix fixe (VI.19).
(6) Les réseaux non cocompacts sont à prix fixe (voir VI.28 (a)).
(7) Et plus généralement, voir VI.23.

Mercuriale *n.f.* (*du lat. mercurialis* “membre du collège des marchands”, *Mercure* étant le dieu du commerce). Tableau officiel hebdomadaire portant les prix courants des denrées vendues sur un marché public ; le cours officiel de ces denrées (Petit ROBERT 1, dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française, Éditions Les Dictionnaires LE ROBERT, 1989).
Liste de prix établie par l'administration municipale, qui relève les prix des denrées sur les marchés de la ville.

Mercuriale *n.f.* Market price list, market prices (of cereals, *groups (?)*, etc) (Harrap's shorter French and English dictionnary,1982).

Signalons aussi que dans certaines régions françaises, les mercuriales désignent le marché du mercredi.

Bibliographie

[Ada88] S. Adams: Indecomposability of treed equivalence relations, Israel J. Math. **64** (3), 362–380 (1988)

[Ada90] S. Adams: Trees and amenable equivalence relations, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **10**, 1–14 (1990)

[AS90] S. Adams, R. Spatzier: Kazhdan groups, cocycles and trees, Amer. J. Math. **112** (2), 271–287 (1990)

[BG81] S. Bezuglyĭ, V. Golodets: Hyperfinite and II_1 actions for nonamenable groups, J. Funct. Anal. **40** (1), 30–44 (1981)

[Bor69] A. Borel. Introduction aux groupes arithmétiques, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles **1341** (Hermann, Paris) (1969)

[Bro82] K. Brown: Cohomology of groups, Graduate Texts in Mathematics **87** (Springer-Verlag, New York-Berlin) (1982)

[CFW81] A. Connes, J. Feldman, B. Weiss: An amenable equivalence relation is generated by a single transformation, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **1** (4), 431–450 (1981)

[CG86] J. Cheeger, M. Gromov: L^2-cohomology and group cohomology, Topology **25** (2), 189–215 (1986)

[CW80] A. Connes, B. Weiss: Property T and asymptotically invariant sequences, Israel J. Math. **37** (3), 209–210 (1980)

[Dun93] M. Dunwoody: An inaccessible group in "geometric group theory", Vol. 1, London Math. Soc. (Sussex 1991), Lecture Notes **181**, 75–78 (1993)

[Dye59] H. Dye: On the groups of measure preserving transformations, I, Amer. J. Maths **81**, 119–159 (1959)

[Dye63] H. Dye: On the groups of measure preserving transformations, II, Amer. J. Maths **85**, 551–576 (1963)

[FM77] J. Feldman, C. Moore: Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras I, II, Trans. Amer. Math. Soc. **234**, 289–324 et 325–359 (1977)

[Fur98] A. Furman: Orbit equivalence rigidity, Prépublication

[Ghy95] É. Ghys: Topologie des feuilles génériques, Ann. of Math. **141** (2), 387–422 (1995)

[Gab98] D. Gaboriau: Mercuriale de groupes et de relations, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326**, 219–222 (1998)

[JKL] S. Jackson, A. Kechris, A. Louveau: Countable Borel equivalence relations, En préparation

[Lev95] G. Levitt: On the cost of generating an equivalence relation, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **15**, 1173–1181 (1995)

[Lin83] P. Linnell: On accessibility of groups, J. Pure Appl. Algebra **30** (1), 39–46 (1983)

[LS77] R. Lyndon, P. Schupp: Combinatorial group theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89 (1977) (Springer-Verlag, Berlin)

[McD69] D. McDuff: Uncountably many II_1 factors, Ann. of Math. **90** (2), 372–377 (1969)

[OW80] D. Ornstein, B. Weiss: Ergodic theory of amenable group actions I. The Rohlin lemma, Bull. A.M.S. **2**, 161–164 (1980)

[Pau98] F. Paulin: Analyse harmonique des relations d'équivalence mesurées, discrètes Markov Processes and Related Fields (à paraître)
[Ser77] J.-P. Serre: Arbres, amalgames, SL_2, Astérisque **46** (S.M.F., Paris) (1977)
[Sta65] J. Stallings: A topological proof of Grushko's theorem on free products, Math. Z. **90**, 1–8 (1965)
[Sta71] J. Stallings: Group theory and three-dimensional manifolds, Yale Mathematical Monographs (Yale University Press, New Haven-London) **4** (1971)
[Ver89] A.M. Vershik: Trajectory Theory, chap. 5 in Dynamical Systems II, Ya.G. Sinai, ed. (Translated from the Russian) (EMS) Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Springer-Verlag, Berlin) **2**, 77–92 (1989)
[Wei81] B. Weiss: Orbit equivalence of nonsingular actions, in: Ergodic theory (Sem., Les Plans-sur-Bex, 1980) Monograph. Enseign. Math. (Univ. Genève, Genève) **29**, 77–107 (1981)
[Zim84] R. Zimmer: Ergodic theory and semisimple groups, Monographs in Mathematics (Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, Mass.) **81** (1984)