

Université Claude Bernard (Lyon I)

Habilitation à diriger des recherches

Numéro d'ordre : 16-2002

Arbres, groupes, quotients

Damien GABORIAU

Document de synthèse

présenté le

8 avril 2002

à l'École normale supérieure de Lyon

Composition du jury

Marc BURGER

Alain CONNES (Rapporteur)

Thierry FACK

Étienne GHYS

François LEDRAPPIER

Gilbert LEVITT

Alain LOUVEAU

Sorin POPA (Rapporteur)

Alain VALETTE (Rapporteur)

Arbres, groupes, quotients

Avril 2002

Damien GABORIAU¹
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
UMR CNRS 5669.
École Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 07 – France

¹Centre national de la recherche scientifique

Introduction

“Arbres, groupes, quotients”. Ces trois mots, constituent plus une évocation qu’une synthèse des questions qui m’ont (pré)occupé depuis que je pratique les mathématiques. Pour faire encore plus compact et de manière un peu provocatrice, ce rapport aurait pu s’intituler “ \mathbf{F}_n ”, symbole qu’on adoptera pour le groupe libre à n générateurs.

Les arbres sont omniprésents dans mon activité. La raison essentielle est, probablement, qu’ils comptent parmi les objets géométriques les plus simples. Ils sont de très petite dimension de sorte qu’ils se prêtent bien à l’illusion de la visualisation. Si un chemin entre deux points n’est pas le plus court possible, on en a une manifestation radicale : il existe un endroit où le chemin revient sur ses pas. Tout aussi radicale est la suppression d’un point non extrémal : l’espace s’en trouve disconnecté. Ces propriétés élémentaires (qui d’ailleurs n’en font qu’une) sont à la base de plusieurs résultats présentés dans ce mémoire. Les arbres représentent aussi un tremplin pour l’étude de problèmes sur les graphes ou en dimension supérieure. D’ailleurs, les succès remportés dans l’étude des groupes hyperboliques et plus généralement des espaces hyperboliques au sens de Gromov reposent en grande partie sur leur ressemblance avec des arbres.

Les groupes apparaissent dans tous les domaines des mathématiques. Tout d’abord comme ensembles de symétries (théorie de Galois, programme d’Erlangen de Klein), puis comme invariants, par exemple en homotopie (groupe fondamental de Poincaré), homologie et cohomologie, K-théorie,... Ils méritent aussi d’être étudiés pour eux-mêmes. Les groupes sont avant tout des acteurs : qu’on leur donne une scène et ils se mettent à agir. On a des théories de nature très différentes selon qu’on considère des groupes finis, des groupes dénombrables discrets ou des groupes munis de structures supplémentaires (groupes algébriques, groupes de Lie, groupes topologiques). Mon activité concerne essentiellement les groupes infinis discrets (dénombrables). S’il n’y a qu’un nombre dénombrable de groupes de présentation finie, les groupes de type fini, en revanche, existent en quantité non dénombrable. Une classification complète, dans tous les sens raisonnables du terme, est une tâche impossible. Devant un tel amas d’objets, on est friand de propriétés permettant de les organiser en catégories, au sens presque sociologique. Parmi ces propriétés, on trouve la moyennabilité, la propriété (T) de Kazhdan, ainsi que la capacité à admettre de jolies actions sur de jolis espaces. On trouve aussi la commensurabilité et ses deux généralisations, l’une topologique (la quasi-isométrie), l’autre liée à la théorie de la mesure (l’équivalence mesurable). La première a été largement étudiée et on présente quelques progrès réalisés dans la compréhension de la seconde.

Un quotient se présente dès qu’on a sur un espace \mathcal{X} une relation d’équivalence \mathcal{E} : c’est l’espace \mathcal{X}/\mathcal{E} des classes de la relation d’équivalence. Selon le type de structure qu’on impose à \mathcal{X} et à \mathcal{E} , on est confronté à des problèmes de natures très différentes, pour ce qui est de la structure du quotient. Il peut s’agir de questions d’algèbre (groupes, anneaux, corps, algèbres,...), de géométrie (géométrie algébrique, analytique, riemannienne, différentielle, C^0, \dots), de systèmes dynamiques (itérations d’une transformation, actions de groupes, actions de groupoïdes, feuilletages, dans des cadres holomorphe, analytique, C^∞, C^2, C^1 , topologique, mesurable,...),...

Dans un certain nombre de situations, l’espace quotient hérite d’une jolie structure. C’est le cas, notamment, en géométrie classique lorsqu’on s’intéresse à la théorie des revêtements. Un autre exemple frappant est, en géométrie algébrique, un théorème de Rosenlicht qui affirme que pour une action algébrique d’un groupe algébrique G , il existe un ouvert dense G -invariant sur lequel le quotient existe au sens algébrique. C’est-à-dire que l’espace quotient a essentiellement (on pourrait dire génériquement) une jolie structure. Le lieu singulier requiert alors une attention particulière. On s’intéressera à une infime partie de ce panorama, et souvent dans des contextes où, au contraire, l’espace quotient n’a apparemment aucune bonne structure. Ici, on se concentre plutôt sur le comportement “générique”. C’est dans ces domaines qu’interviennent la géométrie et la théorie de la mesure non commutatives. On regardera, par exemple, des actions de groupes à orbites denses sur des arbres réels, des feuilletages transversalement mesurés ergodiques, des actions ergodiques

de groupes discrets. Un (petit) dénominateur commun étant l'action engendrée par une rotation d'angle irrationnel sur le cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} . On tente néanmoins de comprendre un peu mieux ces espaces quotients sauvages.

On trouvera dans ce mémoire une présentation de quelques résultats et problèmes sur lesquels j'ai travaillé ces dernières années, concernant notamment :

- les groupes dénombrables agissant sur des arbres réels ;
- des systèmes dynamiques de dimension 1 qui leurs sont intimement reliés ;
- les automorphismes du groupe libre ;
- les généralisations des arbres que sont les immeubles de Tits ;
- quelques invariants de relations d'équivalence mesurées (coût, nombres de Betti ℓ^2 , dimension géométrique, dimension approximative) ;
- quelques invariants dans la classification des groupes discrets dénombrables à équivalence mesurable près (suite des nombres de Betti ℓ^2 , dimension ergodique, dimension approximative) ;
- les graphes aléatoires, la percolation invariante ;
- les algèbres de von Neumann de type II.

Avertissement au lecteur.

Le style de ce rapport est plutôt informel, bien souvent proche de l'expression orale. J'espère par là lui donner un caractère plus vivant. On ne trouvera dans ces notes pratiquement pas de démonstrations, parfois une idée de construction et quelques exemples que je me suis imaginé raconter à un non-spécialiste.

Sommaire

I	Actions géométriques	5
1	Actions de groupes sur les arbres	5
1.1	Introduction : Arbres réels	5
1.2	Théorème de Rips I. Actions libres sur les arbres réels	5
1.3	Théorème de Rips II. Actions stables	8
1.4	Systèmes d'isométries de \mathbb{R}	8
2	Automorphismes du groupe libre	11
2.1	L'espace de Culler-Vogtmann CV_n	11
2.2	Les actions dans le compactifié \overline{CV}_n	11
2.3	Un automorphisme du groupe libre	12
3	Immeubles de Tits	15
II	Relations d'équivalence mesurables	19
4	Actions mesurables	19
5	Coût des relations d'équivalence et des groupes	21
5.1	Coût des groupes et actions libres	23
5.2	Arborabilité	23
5.3	Groupes de coût = 1	24
5.4	Groupes de coût > 1	25
6	Nombres de Betti ℓ^2 des relations d'équivalence	27
6.1	Applications	30
6.2	Groupe fondamental	31
6.3	Dimension géométrique	32
6.4	Dimension géométrique approximative	32
7	Application à la théorie des groupes	33
7.1	Équivalence mesurable vs quasi-isométrie	33
7.2	Résultats d'annulations de nombres de Betti ℓ^2 des groupes	35
8	Liens avec la théorie des graphes aléatoires	37
8.1	D'un graphage à un graphe aléatoire	37
8.2	D'un graphe aléatoire à un graphage	37
8.3	Arborabilité	38

8.4	Percolation de Bernoulli	39
8.5	De la percolation aux graphages	40
9	Liens avec la théorie des ensembles, relations d'équivalence boréliennes	41
10	Liens avec la théorie des algèbres de von Neumann	43
10.1	Introduction	43
10.2	Des invariants pour les facteurs ?	44
III	Travaux et publications	47
IV	Bibliographie	49

Partie I

Actions géométriques

1 Actions de groupes sur les arbres

1.1 Introduction : Arbres réels

On sait bien qu'un groupe Γ de type fini est un groupe libre si et seulement s'il agit librement sur un arbre simplicial. En effet le quotient est alors un graphe, dont la théorie des revêtements nous assure que le groupe fondamental est isomorphe à Γ . Plus généralement, la théorie de Bass-Serre (voir [Ser77]) nous apprend à décomposer comme produit amalgamé ou HNN-extension tout groupe qui agit (sans point fixe global) sur un arbre simplicial : on obtient un *scindement* du groupe. C'est un exemple typique d'application de la théorie géométrique des groupes *dis-moi sur quel joli espace tu agis joliment, je te dirai qui tu es*.

Dans de nombreux domaines de la géométrie et de la théorie géométrique des groupes apparaissent des actions de groupes par isométries sur des arbres réels. Un *arbre réel* (généralise et ressemble à un arbre simplicial, à ceci près qu'il est métrique et que les points de branchement peuvent être denses, c'est un arbre non discret :

Définition 1.1 *Un arbre réel est un espace métrique de dimension 1 où deux points quelconques sont joints par un unique arc, et cet arc est isométrique à un segment de \mathbb{R} . On l'appelle aussi un \mathbb{R} -arbre.*

L'ensemble \mathbb{R}^2 muni de la distance $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2|$ est un arbre réel. On peut le visualiser comme la droite ($y = 0$) sur laquelle est attachée en chaque point une droite verticale. L'arc de (x_1, y_1) à (x_2, y_2) est la concaténation de l'arc vertical $[(x_1, y_1), (x_1, 0)]$, de l'arc horizontal $[(x_1, 0), (x_2, 0)]$ et de $[(x_2, 0), (x_2, y_2)]$. On l'appelle parfois le *peigne de Gaston Lagaffe*.

On renvoie aux articles de survols de P. Shalen, J. Morgan ou M. Bestvina [Sha87, Sha91, Mor92, Bes99], aux articles de R. Alperin, H. Bass, M. Culler et J. Morgan [AB87, CM87] ainsi qu'au séminaire Bourbaki de F. Paulin [Pau95] et au livre de I. Chiswell [Chi01] pour les résultats basiques, des motivations et des remarques historiques.

On se demande, évidemment, quelles informations sur la structure d'un groupe peuvent être déduites du fait qu'il agisse par isométries sur un arbre réel. En particulier, une question fondamentale :

Question 1.2 *Si un groupe Γ de type fini agit non trivialement par isométries sur un arbre réel, admet-il aussi une telle action sur un arbre simplicial ?*

Dans ce contexte, on dit qu'une action est *triviale* si elle admet un point fixe global. Il existe bien sûr une théorie très riche des arbres enracinés, mais ce n'est pas notre propos ici. Une réponse positive à cette question fournirait des scindements du groupe. On a cependant des réponses partielles, lorsqu'on impose sur les stabilisateurs certaines restrictions (voir ci-dessous), lesquelles d'ailleurs se présentent spontanément dans de nombreuses applications.

1.2 Théorème de Rips I. Actions libres sur les arbres réels

Une action est *libre* si les éléments différents de l'identité agissent sans point fixe. À la différence du cas simplicial, il existe, comme on va le voir, plusieurs familles de groupes de type fini qui agissent librement sur des arbres réels.

Exemple 1.3 Le groupe abélien libre \mathbb{Z}^n admet une action isométrique libre sur un arbre réel : considérer n translations rationnellement indépendantes sur la droite réelle \mathbb{R} . Inversement, les seuls groupes de type fini qui ont de telles actions sur \mathbb{R} sont les groupes abéliens libres.

Voici un autre exemple intéressant d'arbre réel, muni d'une action libre.

Exemple 1.4 Le produit libre $\mathbb{R} * \mathbb{R}$ de deux copies de \mathbb{R} est un groupe Γ dans lequel tout élément a une unique écriture réduite $a_1 a_2 \cdots a_k$, $k \geq 0$, où chaque a_i se trouve dans une copie de \mathbb{R} , a_i et a_{i+1} se trouvent dans des copies distinctes et les a_i sont non nuls. C'est aussi un espace T , qu'on peut munir de la distance invariante par multiplication à gauche pour laquelle le mot réduit $a_1 a_2 \cdots a_k$ est à distance $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|$ de l'origine. Cela en fait un arbre réel sur lequel Γ agit librement par isométries. Les sous-groupes de type fini de Γ sont des produits libres de groupes abéliens libres (des groupes libres par exemple). Ces actions sont dites *standards*.

Une source importante d'exemples d'actions de groupes sur des arbres réels provient de la théorie des feuilletages transversalement mesurés de codimension 1. Commençons par un exemple simpliste :

Exemple 1.5 Considérons, sur le tore \mathbb{T}^2 , un feuilletage de Kronecker \mathcal{F} de pente irrationnelle $\alpha = \tan \theta$. Il s'obtient, à partir du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ du revêtement universel (le plan \mathbb{R}^2) en droites parallèles de pente α , par passage au quotient par l'action de \mathbb{Z}^2 . L'espace des feuilles $T = \mathbb{R}^2 / \tilde{\mathcal{F}}$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ est le quotient de \mathbb{R}^2 par la relation d'équivalence "appartenir à la même feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ ". La distance transverse (distance euclidienne entre les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$) permet de le munir d'une métrique qui en fait une droite réelle. On peut l'identifier isométriquement avec n'importe laquelle des droites de pente $1/\alpha$ de \mathbb{R}^2 . Puisque l'action de \mathbb{Z}^2 sur \mathbb{R}^2 préserve le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ et la distance transverse, elle descend en une action isométrique sur T . Ce n'est autre que l'action sur \mathbb{R} engendrée par deux translations de longueurs $\sin \theta$ et $\cos \theta$.

Cet exemple admet de nombreuses généralisations, mais la rareté des variétés compactes qui possèdent un feuilletage mesuré conduira à admettre des singularités et à remplacer variétés par complexes simpliciaux (voir par exemple [Lev93b, Pau95, LP97]).

J. Morgan et P. Shalen ont exhibé une nouvelle famille de groupes agissant librement. Ils ont montré [MS91] que *le groupe fondamental d'une surface compacte sans bord S admet une action libre par isométries sur un arbre réel sauf si S est l'une des surfaces non orientables de caractéristique d'Euler ≥ -1* . On présente les arguments essentiels sous forme d'exemple géométrique :

Exemple 1.6 Si la caractéristique d'Euler est < -1 , ce théorème s'appuie sur l'existence sur S d'un feuilletage transversalement mesuré \mathcal{F} , à singularités isolées de type selle à $n \geq 3$ branches, avec une hypothèse supplémentaire qu'on explicite à la fin de cet exemple.

Le revêtement universel \tilde{S} de S est muni du feuilletage relevé $\tilde{\mathcal{F}}$ et d'une pseudo-distance $d_{\tilde{\mathcal{F}}}$: la mesure transverse permet de définir la longueur d'un chemin transverse par morceaux, et $d_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)$ est la borne inférieure des longueurs des chemins de x à y . Deux points sont à pseudo-distance nulle si et seulement si ils sont dans la même feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ [FLP79, MS91] (on prend ici le mot *feuille* au sens large qui fait qu'une singularité et ses séparatrices sont dans la même feuille). Si bien que $d_{\tilde{\mathcal{F}}}$ définit une métrique sur l'espace des feuilles $\tilde{S}/\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{S}/(d_{\tilde{\mathcal{F}}} = 0)$. Cette métrique en fait un arbre réel T . Un point de branchement de T correspond à une feuille singulière (un ensemble de singularités liées et leurs séparatrices). Le groupe de revêtement $\pi_1(S)$ agit par isométries sur T . Si un point de T (une feuille \mathcal{L} de $\tilde{\mathcal{F}}$) est fixé par $\gamma \neq id$, cela signifie que la transformation de revêtement γ envoie \mathcal{L} sur elle-même. Le chemin dans \mathcal{L} d'un point x à $\gamma(x)$ descend dans S en un lacet non trivial qui est plongé dans une feuille. Le stabilisateur d'un arc de T , s'il est non trivial, fournit alors un paquet de feuilles fermées, homéomorphe à un cylindre feuilleté par cercles ; il est donc cyclique. La fameuse hypothèse supplémentaire qui assure la liberté de l'action consiste à interdire l'existence de lacets plongés dans les feuilles. Un feuilletage qui la satisfait peut être produit par exemple en prenant des revêtements ramifiés d'un exemple original dû à P. Arnoux et J.-C. Yoccoz [AY81]. Les surfaces à exclusion sont celles qui ne sont pas des revêtements du plan projectif avec au moins 3 points de ramification.

J. Morgan et P. Shalen ont ensuite conjecturé qu’avec les groupes libres, les groupes abéliens libres, les groupes de surfaces, et leurs produits libres, on avait tari les sources d’exemples de groupes de type fini qui peuvent agir librement sur des arbres réels. Cette conjecture a été démontrée par E. Rips. Il n’a pas rédigé la preuve, mais il a donné les indications cruciales lors d’une conférence à l’Isle of Thorns en 1991. Dans [GLP94], avec G. Levitt et F. Paulin, nous avons donné une preuve complète de ce théorème (situation où $\Gamma_e = \{1\}$) en montrant un peu plus :

Théorème 1.7 (*Rips*)[GLP94] *Soit Γ un groupe de type fini qui agit sur un arbre réel et Γ_e le sous-groupe normal engendré par les éléments elliptiques (= ayant un point fixe). Le groupe quotient Γ/Γ_e est un produit libre de groupes abéliens libres et de groupes de surfaces.*

Notre preuve diffère de celle de E. Rips en plusieurs aspects. En particulier, il utilise une notion de complexité introduite par G. Makanin [Mak82] et A. Razborov [Raz84], tandis que nous nous appuyons sur des idées de théorie des feuilletages développées par H. Imanishi [Ima79] et G. Levitt [Lev87, Lev90, Lev93a]. Comme dans les indications originales, on étudie des *systèmes d’isométries* sur \mathbb{R} ; on explicite cela ci-dessous. Une idée qui les simplifie beaucoup est, pour les systèmes d’isométries minimaux non homogènes (le cas difficile), de rendre les générateurs indépendants (*cf.* th. 1.12). Voir aussi le livre de I. Chiswell [Chi01, 6].

Soit Γ un groupe de présentation finie $\langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n | r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ qui agit librement par isométries sur un arbre réel T . Cette dynamique peut être très compliquée et une façon de l’aborder consiste à se restreindre à une “fenêtre finie” : on considère un sous-arbre fini K (enveloppe convexe d’un nombre fini de points) assez gros de T et on considère la dynamique restreinte des générateurs de Γ . Plus précisément, on se concentre sur la famille Φ d’isométries partielles de K formée des

$$\varphi_i : \left(\begin{array}{ccc} K \cap \gamma_i^{-1}(K) & \rightarrow & \gamma_i(K) \cap K \\ x & \mapsto & \gamma_i(x) \end{array} \right).$$

Cette famille Φ constitue un système d’isométries. À chaque mot $\gamma_i^{\pm 1}$ correspond un mot $\varphi_i^{\pm 1}$ et un domaine maximal de définition. “Assez gros” signifie que les mots φ_i ainsi que les mots $\varphi_i^{\pm 1}$ correspondant à chacun des mots r_j ont un domaine de définition non vide dans K . Concrètement, on peut choisir un point $x \in T$ et prendre l’enveloppe convexe de ses images par les γ_i ainsi que par les sous-mots des r_j . On obtient une présentation d’un groupe Γ_Φ isomorphe à Γ en prenant comme générateurs les lettres φ_i et comme relations les mots $\varphi_i^{\pm 1}$ qui coïncident avec l’identité sur un ensemble non vide. Cela conduit à une idée importante de E. Rips : puisque le théorème 1.7 concerne le groupe Γ et non l’action sur T , on peut oublier T et se concentrer sur le système d’isométries Φ et son groupe associé Γ_Φ . Cette perte d’information dynamique n’est pas importante si on veut seulement montrer ce théorème.

Dans [GLP95], nous exposons la façon de reconstruire une action libre sur un arbre réel à partir d’un système d’isométries et nous montrons comment cette action converge (fortement au sens de Gillet-Shalen) vers l’action originale lorsque K croît jusqu’à exhauster T . Cela permet aussi de construire une infinité non dénombrable d’exemples d’actions libres à orbites denses du groupe libre \mathbf{F}_3 sur des arbres réels [Lev93c], en particulier des actions non standards (= exotiques) (*cf.* exemple 1.4) en s’appuyant sur l’existence de systèmes exotiques [Lev93a] (voir section 1.4).

Une manipulation simple permet ensuite de passer de Φ sur l’arbre fini K à notre véritable objet d’étude : les systèmes d’isométries sur \mathbb{R} (voir section 1.4) et une étude dynamique détaillée permet de caractériser les groupes Γ_Φ et de montrer le théorème 1.7.

²“**ÉS.** *prép.* (contraction de *en*, et de l’article pluriel *les*). Dans les... en matière de... (avec un pluriel)” [Rob89, p. 685].

“Dans la langue littéraire contemporaine, *en* est de mode. On a été jusqu’à l’employer avec *le* et *les* : en les poèmes. Cet affreux barbarisme, contraire à la fois à l’usage et à la tradition, se rencontre fréquemment” [Bru26, p. 425].

“Verser de l’argent *ès* mains d’un percepteur ressemble terriblement à l’opération niaise qui consiste en le jet d’une pareille somme dans un abîme probablement sans fond” [All48, p. 242].

1.3 Théorème de Rips II. Actions stables

Une condition sur les stabilisateurs qui apparaît de manière naturelle dans de nombreuses situations est celle de *stabilité*. Une action d'un groupe Γ sur un arbre réel T est *non stable* s'il existe un arc dans T , tel que tout sous-arc contient une suite décroissante de segments emboîtés, dont les stabilisateurs sont strictement croissants. Elle est *stable* sinon.

Théorème 1.8 (Rips) *Soit Γ un groupe de présentation finie qui agit sans point fixe global sur un arbre réel T . Si l'action est stable, alors le groupe Γ se décompose comme produit amalgamé ou HNN-extension au dessus d'une extension d'un groupe abélien par un sous-groupe de Γ fixant un arc non dégénéré de T .*

Cet énoncé, dans sa forme exacte, et sa preuve complète sont dûs à M. Bestvina et M. Feighn [BF95]. Une nouvelle preuve de ce théorème, fruit d'un travail commun que nous avons réalisé avec F. Paulin en 1993–1995, se trouve dans son séminaire Bourbaki [Pau95]. Voici un exemple important pour les applications :

Exemple 1.9 *Si Γ est un groupe hyperbolique, qui agit sur un arbre avec stabilisateurs d'arcs virtuellement cycliques, alors l'action est stable et Γ se décompose au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique. En effet, Γ est de type fini, toute suite croissante de sous-groupes virtuellement cycliques est stationnaire et tout sous-groupe qui ne contient pas \mathbf{F}_2 est virtuellement cyclique.*

1.4 Systèmes d'isométries de \mathbb{R}

Un système d'isométries de \mathbb{R} est la donnée d'une union finie D d'intervalles compacts de \mathbb{R} et d'une famille finie $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ d'isométries partiellement définies, chacune sur un sous-intervalle fermé de D .

Ces objets engendrent une dynamique d'une grande richesse, lorsqu'on les itère, malgré la simplicité de leur définition. Les échanges d'intervalles, bien connus dans l'étude des feuilletages sur les surfaces, en donnent des exemples (voir [Kea75, Vee78, Mas82, DN90]). Ils interviennent dans l'étude des feuilletages mesurés de codimension 1, des actions de groupes sur des arbres réels et dans celle des automorphismes des groupes, en particulier ceux du groupe libre \mathbf{F}_n .

On peut décomposer l'espace, sur lequel vit un système d'isométries, en sous-intervalles où la dynamique est de l'un des types suivants ([Ima79, GLP94]) : ou bien toutes les orbites sont finies, ou bien elles sont denses (on est alors en présence d'une composante *minimale*) et alors trois cas se présentent :

- le cas **homogène** (les orbites dans n'importe quel petit intervalle sont complètes : ce sont les mêmes que celles d'un groupe d'isométries de \mathbb{R})
- le cas des **échanges d'intervalles**
- le cas **exotique** (= le reste).

Remarque 1.10 *Cette première décomposition dynamique en fournit une en produit libre du groupe Γ_Φ de la section 1.2.*

Les systèmes exotiques existent, en quantité non dénombrable bien que les seuls exemples concrets soient *algébriques*. Ils ont été mis en évidence par G. Levitt [Lev93a]. Supposons que les $\varphi_i : I_i \rightarrow J_i$ soient des restrictions de translations de longueurs rationnellement indépendantes. Il est clair que lorsque les domaines I_i sont suffisamment petits, les orbites sont toutes finies ; et on montre facilement que, lorsque qu'ils sont suffisamment grands, on a une seule composante minimale et elle est homogène. En passant d'une situation à l'autre en augmentant la longueur des I_i , on rencontre *a priori* plusieurs transitions de phases dynamiques. Des systèmes exotiques

apparaissent quand les différentes transitions de phases se produisent simultanément et que les extrémités des I_i sont dans des orbites distinctes. On décrit quelques unes de leurs propriétés.

De manière analogue à ce qui se fait pour un groupe, les orbites de Φ admettent une structure de **graphe de Cayley**, où deux points de la même orbite sont joints par une arête si l'un est image de l'autre par un des générateurs φ_i .

Définition 1.11 *Lorsque tous ces graphes de Cayley (à un nombre fini près) sont des arbres, le système est dit à générateurs indépendants³.*

La classe des systèmes ayant les mêmes orbites que le système Φ contient un représentant à générateurs indépendants si et seulement si Φ ne possède pas de composante minimale homogène.

Théorème 1.12 [Gab97] *Soit $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ un système sans composante homogène. Il existe un système $\Phi' = (\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_k)$, à générateurs indépendants, ayant les mêmes orbites, où chaque φ'_j est la restriction de φ_j à un sous-intervalle fermé de son domaine.*

Cette construction améliore sensiblement des résultats de G. Levitt [Lev90] et F. Rimlinger [Rim92] qui avaient l'inconvénient d'obliger à changer d'espace (resp. d'augmenter le nombre de générateurs). Voir aussi [Chi01, 6.3].

Les résultats de [GLP95] reposent sur une propriété technique de séparation des systèmes qui a comme conséquence :

Théorème 1.13 [GLP95] *Si deux systèmes d'isométries sur un multi-intervalle D ont les mêmes orbites, alors $\forall x \in D$, les graphes de Cayley de l'orbite de x pour l'un et l'autre sont quasi-isométriques.*

Ce théorème légitime l'étude des notions de bouts et de croissance des orbites, qui sont des invariants de quasi-isométries des graphes. On obtient des résultats pour les systèmes exotiques en utilisant une technique d'*élagage* due à Rips. Cette dernière revient, pour les systèmes à générateurs indépendants, à supprimer les arêtes terminales des arbres de Cayley des orbites. Selon qu'on peut élaguer indéfiniment ou non, on est en présence d'un système exotique ou d'un échange d'intervalles.

Théorème 1.14 [Gab96] *Pour un système exotique, les orbites génériques ont un seul bout (l'ensemble des orbites à un bout est un G_δ dense) mais il existe un ensemble non dénombrable d'orbites à deux bouts (le saturé d'un ensemble de Cantor) et seulement un nombre fini d'orbites à plus de deux bouts.*

Cela est assez inattendu, car pour les autres systèmes minimaux, toutes les orbites ont le même nombre de bouts. De plus :

Théorème 1.15 [Gab96] *S'il existe une orbite à croissance linéaire, alors les orbites à deux bouts sont de mesure 1 pour une certaine mesure invariante.*

Cela a permis à E. Blanc [Bla01] de donner des exemples de laminations dont la feuille générique n'a pas le même nombre de bouts selon qu'on considère générique au sens topologique de Baire ou au sens de la mesure.

³Notons que le système Φ est à générateurs indépendants s'il définit un arborage au sens de la définition 5.2.

2 Automorphismes du groupe libre

2.1 L'espace de Culler-Vogtmann CV_n

Thurston a compactifié l'espace de Teichmüller d'une surface fermée à l'aide de feuilletages mesurés, pour en faire un espace homéomorphe à une boule fermée. Un difféomorphisme de la surface agit naturellement sur ce compactifié et le théorème de Brouwer en fournit des points fixes. Thurston a entièrement classifié les difféomorphismes des surfaces modulo isotopies selon que ces points fixes se trouvent à l'intérieur ou sur le bord. Étant donné le caractère projectif du bord, à un point fixe est associé un *coefficient de dilatation* qui est une unité algébrique.

Dans l'étude des automorphismes extérieurs du groupe libre \mathbf{F}_n , c'est l'espace de Culler-Vogtmann CV_n qui joue le rôle de l'espace de Teichmüller [CV86]. Il s'agit d'un complexe contractile sur lequel $\text{Out}(\mathbf{F}_n)$ agit avec stabilisateurs finis.

Remarque 2.1 *P. Shalen a inventé le nom Outer space (l'espace intersidéral de la science-fiction) pour CV_n , qu'avec son accord on a traduit par outre-espace.*

En première approximation, c'est l'espace des graphes métriques, de groupe fondamental isomorphe à \mathbf{F}_n . Et $\text{Out}(\mathbf{F}_n)$ agit en changeant l'isomorphisme. Un peu plus précisément, pour chacun de ces graphes, en passant au revêtement universel, on a une action libre et discrète de \mathbf{F}_n sur un arbre T . Le fait d'ajouter une branche à un arbre, de manière équivariante, ne fait que compliquer l'étude. On rejette cette situation en demandant que les actions soient *minimales* : les arbres T n'ont pas de sous-arbres stricts invariants. De plus, on convient d'identifier deux actions minimales s'il existe une *homothétie* équivariante entre elles.

Définition 2.2 *L'espace de Culler-Vogtmann CV_n est l'espace des actions libres, discrètes et minimales de \mathbf{F}_n , modulo homothéties.*

A toute action sur un arbre réel est associée une application réelle, constante sur les classes de conjugaison du groupe : sa *fonction longueur* $l : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $l(\gamma) = \inf_{x \in T} d(x, \gamma(x))$. L'espace CV_n est aussi le projectifié de l'espace des *fonctions-longueur-des-actions-simpliciales-libres* de \mathbf{F}_n . Sa topologie comme sous-espace de l'espace projectif de dimension infinie $\mathbf{P}\mathbb{R}^{\mathbf{F}_n}$ des fonctions positives ou nulles sur \mathbf{F}_n est la même que la topologie de Gromov-Hausdorff équivariante définie indépendamment par F. Paulin et M. Bestvina pour un espace d'actions sur des espaces métriques. On considère l'adhérence \overline{CV}_n de CV_n dans $\mathbf{P}\mathbb{R}^{\mathbf{F}_n}$. M. Culler et J. Morgan ont montré qu'elle est compacte pour tout n [CM87]. Il s'avère [CL95, BF92] que c'est l'espace (projectif des fonctions longueurs) des actions de \mathbf{F}_n sur des arbres réels, qui ont la propriété d'être *très petites* : une action de \mathbf{F}_n est *petite* si (1) les stabilisateurs d'arcs sont cycliques ; elle est *très petite* si de plus (2) les tripodes ont des stabilisateurs triviaux (3) tout élément du groupe a le même ensemble de points fixes que ses puissances.

Une description complète et explicite de \overline{CV}_n est donnée pour $n = 2$ dans [CV91].

Si le compactifié de l'espace de Teichmüller est homéomorphe à une boule, celui de l'espace de Culler-Vogtmann est beaucoup plus "sauvage". Cependant, les automorphismes du groupe libre agissent sur \overline{CV}_n avec au moins un point fixe, fournissant ainsi un objet géométrique qui permet de les étudier : une action sur un arbre et une homothétie.

2.2 Les actions dans le compactifié \overline{CV}_n

Dans [GL95], on associe à un système d'isométries sur un arbre fini, une action du groupe libre sur un arbre réel et cette construction, qu'on peut rapprocher de l'exemple 1.6 nous permet d'étudier les actions (T, \mathbf{F}_n) qui appartiennent à l'espace \overline{CV}_n , *i.e.* les points de cet analogue de l'espace de Teichmüller.

Un point de branchement est un point de l'arbre T dont le complémentaire a au moins trois composantes connexes. Nous avons introduit l'*indice* d'un point $x \in T$ en terme du groupe d'isotropie $\text{Stab}(x)$ et de son action sur l'ensemble des directions $\pi_0(T \setminus \{x\})$:

$$i(x) = 2 \text{rg } \text{Stab}(x) + v_1(x) - 2,$$

où $v_1(x)$ est le nombre de $\text{Stab}(x)$ -orbites de directions qui ont un stabilisateur trivial. Il s'avère que $i(x)$ est un entier naturel et ne dépend que de l'orbite \bar{x} de x . On définit enfin l'indice de l'action (T, \mathbf{F}_n) par

$$i(T, \mathbf{F}_n) = \sum_{\bar{x} \in T/F_n} i(\bar{x}).$$

Cette notion peut s'interpréter comme un analogue de l'indice d'Euler-Poincaré d'un champ de vecteurs sur une surface compacte.

Théorème 2.3 [GL95] *Soit (T, \mathbf{F}_n) une action petite du groupe libre \mathbf{F}_n . Alors $i(T, \mathbf{F}_n) \leq 2n - 2$.*

Cela nous a permis d'obtenir plusieurs résultats de finitude. En particulier, nous avons donné une preuve simple du théorème de Jiang, sur le nombre d'orbites de points de branchement pour les actions libres du groupe libre et généralisé son théorème aux actions très petites en montrant :

Corollaire 2.4 [GL95] *Pour les actions très petites du groupe libre \mathbf{F}_n (i.e. les actions de \overline{CV}_n), le nombre d'orbites de points de branchement est majoré par $2n - 2$.*

Nous avons obtenu aussi :

Corollaire 2.5 [GL95] *Pour les actions très petites du groupe libre \mathbf{F}_n , le \mathbb{Q} -rang du sous-groupe de \mathbb{R} engendré par l'image de la fonction longueur est majoré par $3n - 3$. De plus, l'égalité n'est possible que pour les actions simpliciales libres.*

Comme conséquence, nous améliorons un résultat de M. Bestvina et M. Feighn [BF92] disant que \overline{CV}_n est de dimension topologique finie égale à $3n - 4$:

Théorème 2.6 [GL95] *Le bord de l'espace de Culler-Vogtmann du groupe \mathbf{F}_n a pour dimension topologique $3n - 5$.*

Mais on a un exemple de non finitude : Nous avons exhibé une action du groupe libre à 3 générateurs, qui est un point fixe pour un certain automorphisme et dont les valeurs de la fonction longueur *ne se trouvent pas dans un sous-groupe de type fini de \mathbb{R}* : c'est le premier exemple de ce type, et il montre que les "coefficients de dilatation" ne sont pas nécessairement des unités algébriques, contrairement à la théorie de Thurston, bien que ce soient des nombres algébriques.

2.3 Un automorphisme du groupe libre

Pour tout automorphisme α du groupe libre de rang n , l'ensemble des points fixes

$$\text{Fix } \alpha = \{\gamma \in \mathbf{F}_n : \alpha(\gamma) = \gamma\}$$

est un sous-groupe de \mathbf{F}_n , donc un groupe libre. La conjecture de Scott prouvée par Bestvina-Handel [BH92] affirme que son rang est majoré par le rang du groupe ambiant n :

Théorème 2.7 (Bestvina-Handel) [BH92, GLL98] *Pour tout automorphisme α du groupe libre \mathbf{F}_n ,*

$$\text{rg } \text{Fix } \alpha \leq n.$$

Le rapprochement de [GL95] avec un article de M. Lustig nous a permis, dans [GLL98], de donner une preuve *dendrologique* (i.e. relative aux arbres) de ce théorème. Pour cela, on étudie les propriétés d'une action dans \overline{CV}_n qui est un point fixe pour l'action de l'automorphisme α : étant donné un automorphisme α de \mathbf{F}_n , il existe une action de \mathbf{F}_n sur un arbre réel T appartenant à \overline{CV}_n et une homothétie $H : T \rightarrow T$, de facteur de dilatation $\lambda \geq 1$ (i.e. $d(Hx, Hy) = \lambda d(x, y)$), telle que pour tout $w \in \mathbf{F}_n$,

$$\alpha(w)H = Hw : T \rightarrow T.$$

Cette existence est bien connue (M. Bestvina- M. Handel, R. Skora, F. Paulin). Mais on utilise le résultat plus fort dû à M. Lustig, affirmant que l'action peut en fait être supposée à stabilisateurs d'arcs triviaux et des raisonnements élémentaires menés à l'aide de notre indice permettent de conclure.

Dans [GJLL98], on donne une construction de T , avec des propriétés supplémentaires et on complète le théorème 2.7 en introduisant les points fixes à l'infini : le bord $\partial\mathbf{F}_n$ du groupe libre (l'espace des bouts de l'arbre de Cayley, si $n \geq 2$) est un espace de Cantor. L'action de l'automorphisme α sur les sommets de l'arbre de Cayley s'étend en un homéomorphisme $\partial\alpha$ des points à l'infini. On montre, prouvant ainsi une conjecture de D. Cooper [Coo87] :

Théorème 2.8 [GJLL98] *Si $a(\alpha)$ est le nombre de points fixes attractifs pour l'action de $\partial\alpha$ sur $\partial\mathbf{F}_n$, alors*

$$\text{rg Fix } \alpha + \frac{1}{2}a(\alpha) \leq n.$$

Cette étude repose à nouveau sur notre indice et passe par une traduction des propriétés de $\partial\alpha$ en termes de propriétés géométriques de l'action fixée par α dans \overline{CV}_n .

Corollaire 2.9 *Un automorphisme α de \mathbf{F}_n avec $\text{Fix } \alpha = \{1\}$ fixe au plus $4n$ bouts du groupe.*

3 Immeubles de Tits

On peut, d'une certaine façon, considérer les immeubles de Tits comme des généralisations des arbres (discrets), où le rôle des rayons bi-infinis (la droite avec une structure simpliciale, pavée par des segments) serait tenu par des espaces pavés sphériques \mathbb{S}^n , euclidiens \mathbb{E}^n ou hyperboliques \mathbb{H}^n . On connaît de nombreuses familles (d'origines algébriques) d'immeubles sphériques ou euclidiens. Les exemples d'immeubles hyperboliques, *i.e.* de type un système de réflexions de l'espace hyperbolique réel, faisaient cruellement défaut. Avec F. Paulin, nous donnons une approche géométrique à la “méthode des amalgames” de Tits pour construire des immeubles. Nous en avons construit plusieurs familles et étudié leur cohomologie à l'infini. Cette section reprend l'introduction de [GP01].

Soit P un polyèdre compact convexe (pas forcément un simplexe) de l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^n de dimension $n \geq 2$, dont chaque angle dièdre est de la forme $\frac{\pi}{k}$, avec k un entier au moins 2. Le groupe W engendré par les réflexions sur les faces de P est un sous-groupe discret du groupe des isométries de \mathbb{H}^n , agissant sur \mathbb{H}^n avec domaine fondamental P , par un théorème de Poincaré [Har91]. Un théorème de Vinberg [Vin85] impose une sévère restriction sur la dimension : n est au plus 29. La dimension maximale connue est 9, par un exemple de Bugaenko [Bug84].

Un *immeuble hyperbolique* de type P est un complexe polyédral X , muni d'une famille maximale de sous-complexes appelés *appartements*, polyédralement isométriques au pavage de \mathbb{H}^n par les images de P sous W , tels que

- par deux cellules de X passe au moins un appartement,
- pour tous appartements A, A' de X , il existe une isométrie polyédrale de A sur A' fixant $A \cap A'$.

Notons I l'ensemble des faces de codimension 1 de P , et M la matrice de Coxeter $(m_{i,j})_{i,j \in I}$ avec $\frac{\pi}{m_{i,j}}$ l'angle dièdre entre les faces i et j si celles-ci se rencontrent (en une face de codimension 2), et $m_{i,j} = \infty$ sinon. Soit C un *immeuble de type M* (vu comme un système de chambres sur I , voir [Ron89]). Les immeubles de type hyperbolique compact au sens de Bourbaki [Bou68, Ch. V, §4, Ex. 12] sont précisément ceux pour lesquels P est un simplexe.

La “bonne” réalisation géométrique de C n'est pas la réalisation usuelle (par exemple décrite dans [Ron89]), mais est le quotient

$$|C| = (C \times P) / \sim$$

pour \sim la relation d'équivalence engendrée par $(c, x) \sim (c', x')$ s'il existe $i \in I$ tel que $x = x' \in i$ et c, c' sont des chambres i -adjacentes. On munit $|C|$ de sa structure naturelle de complexe polyédral, pour laquelle l'application $|C| \rightarrow P$ induite par la projection sur le second facteur $C \times P \rightarrow P$ est une application polyédrale, induisant une isométrie sur chaque cellule maximale.

Nous montrons que les immeubles hyperboliques de type P sont précisément les réalisations géométriques des immeubles de type M ; que cette réalisation géométrique coïncide avec celle de Davis-Moussong [Dav98] ; et que les immeubles hyperboliques sont CAT(-1), *i.e.* à courbure ≤ -1 au sens d'Alexandrov-Topogonov (voir [GH90]). Les *immeubles fuschiens* de M. Bourdon [Bou97, Bou02] sont des immeubles hyperboliques de type P , avec P de dimension 2 et des hypothèses de finitude locale.

Dans [Tit87a, Tit86], J. Tits développe une technique, appelée “méthode des amalgames” pour construire des immeubles. Dans [Hae91, BH99], A. Haefliger introduit une notion de *complexe de groupes*, plus générale que celle de [Tit86], dont une version simplifiée commune est la suivante.

Un *polytope de groupes* \mathcal{C} est la donnée d'un polyèdre compact convexe (sphérique, euclidien ou hyperbolique) X , d'un groupe G_σ pour toute face σ de X , et d'un morphisme injectif de groupe $\psi_{\tau,\sigma} : G_\sigma \rightarrow G_\tau$ si la face τ est contenue dans la face σ , tel que le diagramme évident commute. Le *groupe fondamental* $\pi_1 \mathcal{C}$ est la limite inductive des $G_\sigma, \psi_{\tau,\sigma}$. Pour toute face σ , il existe un (unique) complexe polyédral sphérique $\tilde{lk} \sigma$, appelé *développement lk -local* en σ , muni d'une action

polyédrale isométrique de G_σ , telle que le quotient (au sens évident) de $\tilde{l}k \sigma$ par G_σ s'identifie au link de σ dans X , muni de la structure de polytope de groupes induite. Le complexe de groupes est *développable* s'il existe un complexe polyédral simplement connexe \tilde{C} (alors unique à isomorphisme équivariant près), appelé le *revêtement universel*, tel que $\pi_1 C$ agisse sur \tilde{C} avec pour quotient (au sens évident) C .

Combinant des résultats de Haefliger et Tits, nous en déduisons le résultat suivant (connu en dimension 2 par P. Brown et M. Bourdon [Bou02]). Sa preuve repose sur une vérification de la simple connexité de certains résidus, par des techniques de M. Davis.

Théorème 3.1 [GP01] *Soit C un complexe de groupes, dont le complexe polyédral sous-jacent est muni d'une application polyédrale sur P , qui est une isométrie en restriction à chaque cellule maximale. Supposons que les développements lk -locaux des cellules de codimension k sont des immeubles sphériques si $k \leq 3$, et sont à courbure ≤ 1 au sens d'Alexandrov-Topogonov si $k \geq 4$. Alors C est développable, de revêtement universel un immeuble hyperbolique de type P .*

L'intérêt principal d'une telle construction est qu'elle fournit des espaces localement compacts singuliers $CAT(-1)$, dont le groupe des automorphismes est très gros (voir par exemple [HP98]), et contient des sous-groupes discrets cocompacts.

Nous utilisons alors ce résultat pour donner de nombreux exemples explicites d'immeubles hyperboliques. Nous donnons en particulier une liste d'immeubles hyperboliques de dimension 2 à links algébriques admettant un groupe d'automorphismes discret transitif sur les chambres, que nous montrons complète dans le cas des corps premiers de caractéristique assez grande. Le cas des immeubles hyperboliques triangulaires est connu (travaux de Timmesfeld-Meixner-Stroth [Mei90]). Voir [Bou02] pour d'autres exemples de constructions topologiques. Une méthode algébrique de construction est la suivante (voir par exemple [Rem98]). Une matrice de Cartan généralisée est une matrice $A = (A_{ij})_{i,j \in I}$ à coefficients entiers, avec coefficients diagonaux 2, et coefficients non diagonaux négatifs, avec A_{ij} nul si et seulement si A_{ji} est nul. La matrice de Coxeter associée est $M = (m_{ij})_{i,j \in I}$ avec $m_{ii} = 1$ et si $i \neq j$, alors $m_{ij} = 2, 3, 4, 6, \infty$ si et seulement si $A_{ij}A_{ji} = 0, 1, 2, 3, k \geq 4$ respectivement. A toute matrice de Cartan généralisée A et tout corps fini k, J . Tits [Tit87b] associe de manière fonctorielle un groupe de Kac-Moody $\mathcal{G}_{A,ad}(k)$, admettant une (en fait un jumelage de deux) BN-paire(s) de groupe de Weyl le groupe de Coxeter associé à M . Lorsque celui-ci est un groupe de réflexions hyperboliques, la réalisation géométrique (au sens ci-dessus) de l'immeuble associé à la BN-paire est un immeuble hyperbolique.

Le problème ouvert principal est celui d'une classification de tous les immeubles hyperboliques localement finis. C'est un problème délicat, car les polyèdres de Coxeter hyperboliques ne sont même pas classés. En dimension 2, c'est, comme dans le cas euclidien, une tâche impossible, car nous montrons, en utilisant des techniques de Haglund [Hag92] :

Théorème 3.2 [GP01] *Si $q = p^f \geq 3$ avec p, f entiers et p premier, et si P est un polygone de Coxeter hyperbolique à un nombre pair de côtés, il existe un ensemble non dénombrable d'immeubles hyperboliques de type P , dont les links de sommets sont isomorphes à l'immeuble des drapeaux du plan projectif sur le corps fini à q éléments.*

Les isométries des espaces métriques X localement compacts complets $CAT(-1)$ (et plus généralement des espaces hyperboliques au sens de Gromov) sont classées en trois familles, les isométries elliptiques, hyperboliques, paraboliques. Les groupes *paraboliques* d'isométries de X (*i.e.* fixant un point du bord et préservant les horosphères centrées en ce point) sont peu étudiés. Si une construction générale de Gromov [Gro87] montre que tout groupe de type fini est un groupe discret parabolique d'isométries d'un espace hyperbolique (au sens de Gromov !), les exemples connus de groupes discrets paraboliques ont des restrictions importantes sur leur structure algébrique. B. Bowditch [Bow93] a montré qu'un groupe parabolique discret d'isométries d'une variété riemannienne à courbure strictement négative pincée est de type fini, et donc virtuellement nilpotent par des arguments de Margulis. La nécessité d'une borne supérieure < 0 découle des travaux de Abresch-Schroeder [AS92]. La construction de Gromov fournit des espaces peu homogènes (le groupe de toutes les isométries a un point fixe global à l'infini).

Proposition 3.3 [GP01] *Il existe une variété riemannienne M complète à courbure sectionnelle ≤ -1 , de groupe fondamental Γ vérifiant:*

- Γ est géométriquement fini au sens de Tukia-Bowditch [Tuk96, Bow95] et hyperbolique relativement à l'ensemble de ses sous-groupes paraboliques maximaux, au sens de Gromov-Farb-Bowditch [Bow95];
- Γ possède un sous-groupe parabolique libre de rang 2;
- l'exposant critique de Γ est infini.

Nos exemples sont construits à partir d'immeubles hyperboliques sur des polyèdres de Coxeter hyperboliques non compacts de volume fini. Ceux-ci sont des "ideal polyedra" au sens de [CT97], qui ont étudié leurs propriétés géométriques, mais sans fournir de grandes familles d'exemples. Notre construction devrait aussi donner des exemples intéressants pour l'étude dynamique de [DP96] des groupes discrets d'isométries d'espaces CAT(-1) en présence de paraboliques.

Nous décrivons la topologie de l'espace à l'infini d'un immeuble euclidien ou hyperbolique, comme limite projective de celle des sphères de rayon fini. Le résultat suivant est dû à A. Borel et J.-P. Serre [BS97] dans le cas des immeubles euclidiens de Bruhat-Tits, et la construction géométrique plutôt qu'algébrique de l'espace à l'infini rend sa preuve beaucoup plus facile. Nous notons $H_c^i(Y; \mathbb{Z})$ le i -ème groupe de cohomologie d'Alexander-Spanier à support compact d'un espace topologique Y à coefficients \mathbb{Z} .

Théorème 3.4 [GP01] *Soit X un immeuble euclidien ou hyperbolique de dimension n . Alors $H_c^i(Y; \mathbb{Z})$ est nul pour $i \neq n$ et abélien libre pour $i = n$, de dimension infinie si X est épais.*

Partie II

Relations d'équivalence mesurables

Les relations d'équivalence sont omniprésentes en mathématiques. Souvent leur espace ambiant est un espace borélien. On s'intéresse au cas où une mesure est préservée (sauf section 9) et où les classes sont dénombrables.

4 Actions mesurables

Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace borélien standard, muni d'une mesure de probabilité ($\mu(X) = 1$) sans atome. Une action mesurable α d'un groupe dénombrable discret Γ sur (X, \mathcal{B}, μ) , produit une relation d'équivalence $\mathcal{R}_\alpha \subset X \times X$ borélienne :

$$\mathcal{R}_\alpha := \{(x, y) \in X \times X : \alpha(\Gamma)(x) = \alpha(\Gamma)(y)\}.$$

On suppose que l'action **préserve la mesure** μ . Une question générale est de savoir la quantité d'information concernant α et Γ contenue dans \mathcal{R}_α . En particulier, quels sont les groupes qui admettent des actions libres qui produisent les mêmes relations d'équivalence ? Deux telles actions sont dites *orbitalement équivalentes* (OE). Dans ce contexte mesurable, les ensembles de mesure nulle sont négligés.

H. Dye a découvert que pour $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$, tout ce qui concerne α est effacé : *toutes les actions ergodiques du groupe \mathbb{Z} sur (X, μ) sont orbitalement équivalentes entre elles* [Dye59]. Une suite de travaux menés par plusieurs auteurs (notamment H. Dye, A. Connes, J. Feldman, W. Krieger, A. Vershik) conduit au théorème de D. Ornstein et B. Weiss [OW80] (voir aussi [CFW81]) : *si Γ_1 et Γ_2 sont deux groupes moyennables infinis, alors toute action ergodique de Γ_1 est orbitalement équivalente à toute action ergodique de Γ_2* . L'unique relation d'équivalence produite est caractérisée, parmi celles qui préservent la mesure, par le fait qu'elle est limite croissante de relations d'équivalence boréliennes à classes finies : c'est la *relation hyperfinie préservant la mesure*.

La relation d'équivalence \mathcal{R}_α peut être considérée comme engendrée par des automorphismes $\alpha(\gamma) : X \rightarrow X$, où γ parcourt un système générateur du groupe Γ . Plus généralement, l'objet central de notre travail dans cette partie est une *relation d'équivalence mesurable \mathcal{R} à classes dénombrables et préservant la mesure sur le borélien standard (X, μ)* ; elle peut toujours être définie comme suit. Une famille dénombrable $\Phi = (\varphi_j : A_j \rightarrow B_j)_{j \in I}$ d'isomorphismes préservant μ , partiellement définis entre parties boréliennes de X , engendre une relation d'équivalence \mathcal{R}_Φ , la plus petite relation vérifiant $\varphi_j(x) \sim x$, $j \in I$, $x \in A_j$.

On renvoie à [FM77a, FM77b, Moo82] pour les généralités.

Pour une vision un peu plus géométrique, collons à X des cylindres de la forme $A_j \times [0, 1]$ en identifiant $A_j \times \{0\}$ avec A_j par l'identité et $A_j \times \{1\}$ avec B_j via φ_j , et feuilletons les cylindres par $\{\text{point}\} \times [0, 1]$. On a une *lamination mesurable simpliciale* dont les feuilles sont des graphes, qui admet X comme transversale et dont le pseudogroupe "des applications de retour sur X " engendre la relation d'équivalence \mathcal{R}_Φ . La classe de $x \in X$, son *orbite*, hérite d'une *structure de graphe* qu'on note $\Phi[x]$ (= la feuille de x) : les sommets sont les éléments de l'orbite et une arête orientée d'appellation φ_j relie y à $\varphi_j(y)$. C'est pourquoi on dit que Φ est un **graphage**.

Exemple 4.1 (Rotations du cercle) Considérons l'action sur $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ du groupe \mathbb{Z}^2 engendré par deux translations a et b définies par deux nombres réels l_a, l_b tels que $1, l_a, l_b$ soient rationnellement indépendants. La relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}^2}$ est engendrée par les deux isomorphismes a et b . Les relations dans le groupe entre a et b font qu'il y a beaucoup de redondances dans cette façon d'engendrer. Suivant une idée de G. Levitt, il peut être plus "économique" de restreindre les domaines de définition de a et b . Pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve un borélien A_ε de mesure $\leq \varepsilon$ qui rencontre presque toute a -orbite (*i.e.* dont le saturé \bar{A} par a est de mesure pleine) (par ergodicité,

c'est en fait le cas de tout borélien de mesure > 0). Soit b_ε la restriction de b à ce petit borélien A_ε . Le graphage $\Phi_\varepsilon = (a, b_\varepsilon)$ possède presque les mêmes orbites que $\Phi = (a, b)$. En effet, pour tout $x \in A$, il existe un n tel que $a^n(x) \in A_\varepsilon$. Alors $a^{-n} \circ b_\varepsilon \circ a^n(x)$ est défini et égale $b(x)$. Les graphages Φ_ε et Φ seront *de coûts* respectifs $1 + \mu(A_\varepsilon)$ et 2. En fait (cf. [Dye63]), cette relation est engendrée par un automorphisme de \mathbb{S}^1 préservant la mesure de Lebesgue. Comme on le verra, elle est en fait arborable de coût 1.

Les systèmes d'isométries de \mathcal{R} (voir section 1.4) fournissent des exemples de relations d'équivalence munies de graphages. D'autres exemples, issus de la théorie des graphes aléatoires, sont présentés dans la section 8.

Si les orbites sont infinies (*i.e.* dans toutes les situations non triviales), l'espace quotient (espace des orbites) a la puissance du continu et ne possède apparemment pas de structure agréable (penser à l'action sur le cercle d'une rotation d'angle irrationnel). En particulier, il n'existe pas de domaine fondamental qui soit mesurable : *on ne peut pas choisir mesurablement un point par orbite*. La notion suivante donne cependant un sens au fait que deux relations définissent *le même espace quotient* ; l'idée étant d'abord, qu'une relation d'équivalence \mathcal{R} a le même espace quotient que la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}|_A := \mathcal{R} \cap A \times A$ induite de \mathcal{R} sur un borélien A qui rencontre presque toutes les classes. Le borélien A est alors muni de la mesure normalisée $\mu|_A/\mu(A)$.

Définition 4.2 *Une relation \mathcal{R}_1 sur (X_1, μ_1) est stablement orbitalement équivalente (SOE) à \mathcal{R}_2 sur (X_2, μ_2) s'il existe des boréliens $A_1 \subset X_1$ et $A_2 \subset X_2$, qui rencontrent presque chaque orbite, tels que :*

les relations induites $\mathcal{R}_1|_{A_1}$ et $\mathcal{R}_2|_{A_2}$ s'identifient par un isomorphisme borélien f entre A_1 et A_2 , qui préserve la mesure à une constante multiplicative près.

Le rapport $c(f, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \mu_2(A_2)/\mu_1(A_1)$ est appelé constante de compression de l'équivalence orbitale stable f .

5 Coût des relations d'équivalence et des groupes

Dans cette section, on ne considérera que des relations et des actions préservant la mesure sur un borélien standard de probabilité sans atome.

Pour un groupe dénombrable Γ , définissons le nombre $n(\Gamma)$, le plus petit cardinal d'un système générateur.

Pour la relation \mathcal{R} , on se demande pareillement le nombre minimal d'isomorphismes partiels $\varphi_j : A_j \rightarrow B_j$ nécessaires pour l'engendrer. Mais, en partitionnant le domaine A_j , on augmente ce nombre tout en continuant à engendrer \mathcal{R} . La bonne notion, c'est ce nombre d'isomorphismes partiels pondéré par les mesures des domaines, c'est le *coût*.

Définition 5.1 *Le coût du graphage $\Phi = (\varphi_j : A_j \rightarrow B_j)_{j \in J}$ est la quantité*

$$\mathcal{C}_\mu(\Phi) := \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

Le coût de la relation \mathcal{R} est la borne inférieure des coûts de ses systèmes générateurs :

$$\mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}) = \inf\{\mathcal{C}_\mu(\Phi) : \mathcal{R}_\Phi = \mathcal{R}\}.$$

Pour un $x \in X$, sa valence $v_\Phi(x)$ dans son graphe de Cayley $\Phi[x]$ est le nombre de A_i, B_i contenant x , *i.e.* $v_\Phi(x) = \sum_{i \in J} (\mathbf{1}_{A_i} + \mathbf{1}_{B_i})(x)$. La valence moyenne $\int_X v_\Phi = \sum \mu(A_i) + \mu(B_i)$ vaut alors le double du coût $\mathcal{C}(\Phi)$. Si la courbure d'un graphe en un sommet x est définie comme $1 - (1/2 \text{ valence en } x)$, la courbure moyenne des graphes $\Phi[x]$ vaut donc $1 - \mathcal{C}(\Phi)$. Le coût de \mathcal{R} est $1 -$ le supremum des courbures moyennes des feuilles pour tous les feuilletages simpliciaux de dimension 1 dont le pseudogroupe induit \mathcal{R} sur la transversale X .

Pour obtenir un invariant du groupe, on considère un extremum sur toutes les actions libres de ce groupe :

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \inf\{\mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}_\alpha) : \alpha \text{ action libre de } \Gamma \text{ sur } (X, \mu)\}.$$

Par définition, deux actions donnant des relations de coûts distincts ne peuvent pas être orbitalement équivalentes : le coût est un invariant d'équivalence orbitale (OE).

Cette quantité a été introduite par G. Levitt dans [Lev95] et l'article [Gab00a] a été largement motivé par une question de [Lev95, p. 1174] : *“For instance, is $\text{cost}(\mathcal{R})$ strictly bigger than 1 if \mathcal{R} comes from a free action of a nonabelian free group ? If so, this would lead to a nontrivial numerical invariant for (non amenable) discrete groups”*. On montre aisément que les relations à orbites infinies sont toutes de coût ≥ 1 . Les actions des groupes moyennables infinis sont toutes de coût 1 (par le théorème d'Ornstein-Weiss), et cette propriété est partagée par beaucoup de groupes (*cf.* section 5.3). Il est plus délicat de montrer l'existence de relations de coût > 1 . C'est ce qu'ont permis les théorèmes 5.4, 5.6, qu'on introduit maintenant et leur corollaire 5.20 qui répond à la question de G. Levitt.

Plus généralement, s'il y a un Φ -mot non trivial m et un borélien de mesure non nulle sur lequel $m(x) = x$, alors on peut ôter du coût une quantité strictement positive, *i.e.* on peut restreindre un des générateurs $\varphi_j : A_j \rightarrow B_j$ à un borélien A'_j tel que $\mu(A_j \setminus A'_j) > 0$ et continuer à engendrer \mathcal{R} . L'hypothèse est vérifiée dès que les graphes $\Phi[x]$ ne sont pas des arbres pour presque tout $x \in X$.

Définition 5.2 *On dit que le graphage Φ est un arborage s'il donne à presque chaque orbite une structure d'arbre. La relation \mathcal{R} est arborable si elle admet un arborage.*

En particulier, on passe d'un *treeing* au sens de S. Adams ([Ada90]) à un arborage simplement en spécifiant une orientation sur les arêtes. On vient de voir que si un graphage Φ de coût fini réalise (l'infimum qu'est) le coût de \mathcal{R} , alors Φ est un arborage. Le théorème 5.4 consiste à établir la réciproque.

Remarque 5.3 Dans la note [Gab98], on utilisait le vocable *arbrable*. A. Papadopoulos qui cumule des qualités de mathématicien et de linguiste m'a fait remarquer qu'il était préférable d'employer *arborable*, ce que j'ai fait par la suite.

Théorème 5.4 [Gab98, Gab00a] *Si Φ est un arborage de \mathcal{R} , alors il réalise la borne inférieure : $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = \mathcal{C}(\Phi)$.*

Au lecteur intéressé par cet énoncé, on suggérera de consulter d'abord [Gab98] où une preuve est esquissée, plus simple que le cas général. Dans [Gab00a], on introduit les notions (qui généralisent celle de HNN-extension d'É. Ghys [Ghy95] sans faire appel à un graphage particulier) de relation d'équivalence \mathcal{R} qui est

- le produit libre de deux sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 (notation $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_2$)
- le produit amalgamé de deux sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 au-dessus d'une sous-relation commune $\mathcal{R}_1 \supset \mathcal{R}_3 \subset \mathcal{R}_2$ (notation $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 *_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2$)
- HNN-extension d'une sous-relation \mathcal{R}_1 au-dessus de $\mathcal{R}_1 \supset \mathcal{R}_3 \subset \mathcal{R}_1$ (notation $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 *_{\mathcal{R}_3}$).

Bien évidemment, une telle relation \mathcal{R} est produite par n'importe quelle action libre d'un groupe Γ , les relations \mathcal{R}_i étant données par l'action de Γ_i , qui est respectivement

- un produit libre $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$
- un produit amalgamé $\Gamma = \Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2$
- une HNN-extension $\Gamma = \Gamma_1 *_{\Gamma_3}$

Remarque 5.5 Étant donnés deux groupes, il existe un groupe abstrait qui en est le produit libre ; mais étant données deux relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 , il n'est pas raisonnable de chercher à définir *une* relation qui serait *leur* produit libre. En effet, il existe au moins deux actions libres non orbitalement équivalentes du groupe libre \mathbf{F}_2 (voir les remarques précédant la question 5.9). Chacune d'elles est produit libre de deux actions de \mathbb{Z} , lesquelles sont toutes orbitalement équivalentes entre elles par le théorème de [Dye59]. H. Kosaki a montré qu'en général la notion de produit libre de deux relations sur le même espace (X, μ) devait produire un groupoïde.

Dans ces situations, on peut calculer le coût de \mathcal{R} en fonction des coûts des relations constituantes :

Théorème 5.6 [Gab00a, th. IV.15] *Soit $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 *_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2$ une relation sur (X, μ) , produit amalgamé de deux relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 qui sont de coûts finis au dessus de la relation hyperfinie \mathcal{R}_3 alors $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{C}(\mathcal{R}_2) - \mathcal{C}(\mathcal{R}_3)$.*

En particulier, si $\Gamma = \Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2$ est un produit amalgamé de deux groupes au-dessus du groupe Γ_3 moyennable, α une action libre de Γ et α_i les actions restreintes de Γ_i , alors $\mathcal{C}(\mathcal{R}_\alpha) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_{\alpha_1}) + \mathcal{C}(\mathcal{R}_{\alpha_2}) - \mathcal{C}(\mathcal{R}_{\alpha_3})$, où $\mathcal{C}(\mathcal{R}_{\alpha_3}) = 1 - \frac{1}{|\Gamma_3|}$.

À ce point, il est bon de rappeler un important théorème dû à I. Gruschko [Gru40] pour les produits libres de groupes : *On a $n(\Gamma_1 * \Gamma_2) = n(\Gamma_1) + n(\Gamma_2)$, où toujours, $n(\Gamma)$ désigne le cardinal minimal d'un système générateur de Γ .* Peu après, B. Neumann [Neu43] a donné une autre preuve de ce théorème. Les deux démonstrations sont assez combinatoires et semblaient offrir peu de chances de s'adapter à notre contexte. Dans sa thèse, J. Stallings donne une preuve topologique, on pourrait dire géométrique, élégante, de cet énoncé. Il ne la publie que 5 ans plus tard [Sta65]. Enfin, la preuve de J. Stallings apparaît sous une forme épurée dans le livre de R. Lyndon et P. Schupp [LS77]. C'est après cette lecture que j'ai compris comment démontrer le théorème 5.6, d'abord pour les produits libres de relations, où l'on voit bien un analogue mesurable du théorème de Gruschko, avant de l'étendre aux produits amalgamés.

Le coût se comporte bien lorsqu'on passe à une relation induite. Soit $Y \subset X$ un borélien qui rencontre toutes les orbites de la relation \mathcal{R} sur (X, μ) . On appelle $\bar{\mu} = \frac{\mu|_Y}{\mu(Y)}$ la mesure induite normalisée et on considère la **relation induite** $\mathcal{R}_Y = \mathcal{R} \cap (Y \times Y)$ sur $(Y, \bar{\mu})$.

Proposition 5.7 *On a*

$$\mathcal{C}(\mathcal{R}) - 1 = \mu(Y)(\mathcal{C}(\mathcal{R}_Y) - 1).$$

De plus, \mathcal{R} est arborable si et seulement si \mathcal{R}_Y est arborable.

5.1 Coût des groupes et actions libres

Pour tout groupe dénombrable Γ , il existe une action libre qui réalise le coût de Γ . Autrement dit, dans la définition du coût de Γ , on peut remplacer l'infimum par le minimum [Gab00a, prop.VI.21]. Une question centrale est bien entendu :

Question 5.8 *Toutes les actions libres d'un même groupe ont-elles même coût ?*

Les exemples où le calcul aboutit vont tous dans ce sens. D'ailleurs les techniques développées pour y parvenir ne peuvent guère donner autre chose, puisqu'on s'appuie sur des propriétés algébriques du groupe. De plus, il n'est pas toujours facile de trouver différentes actions non orbitalement équivalentes d'un même groupe. Par exemple, jusqu'à très récemment, on ne connaissait que deux actions distinctes du groupe libre \mathbf{F}_2 (l'une fortement ergodique, l'autre non [Sch80]). S. Popa a montré qu'il en existe au moins trois autres (communication personnelle).

Question 5.9 *Existe-t-il une infinité d'actions libres non orbitalement équivalentes du groupe libre \mathbf{F}_2 ?*

5.2 Arborabilité

En vue du théorème 5.4, il est utile d'étudier quelles relations sont arborables. Il n'est pas clair *a priori* qu'elles ne le sont pas toutes. D'ailleurs voici une construction. Il s'agit d'équiper chaque classe de \mathcal{R} d'une structure d'arbre. La relation \mathcal{R} est donnée par une action d'un groupe Γ . Choisissons une numérotation des éléments de Γ et un point dans chaque orbite. Cela permet même mieux, de munir chaque classe d'une structure linéaire. Le problème est que cette construction ne peut être réalisée de manière mesurable. *On ne peut pas choisir mesurablement un point par orbite.*

On sait bien que les groupes avec la propriété (T) de Kazhdan n'ont pas d'actions sur les arbres, à moins d'avoir un point fixe global (voir [HV89]). En adaptant la preuve, S. Adams et R. Spatzier [AS90] ont montré que les groupes infinis possédant la propriété (T) de Kazhdan n'ont pas d'action arborable.

Définition 5.10 *Un groupe Γ est anti-arborable si aucune de ses actions libres n'est arborable.*

La profusion de groupes de coût 1 (cf. section 5.3) permet d'agrandir considérablement la classe des groupes anti-arborables et des relations non arborables, grâce au...

Corollaire 5.11 [Gab00a, cor. VI.22] *Si Γ est non moyennable et de coût 1, alors aucune de ses actions n'est arborable.*

Pour prouver ce corollaire, on a besoin de toute la force du théorème 5.4 et de montrer que, si Φ est un arborage d'une action libre α de Γ , alors il réalise le coût de Γ , i.e. $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_\alpha) = \mathcal{C}(\Gamma)$ [Gab00a, prop.VI.21, th. IV.15]. On utilise alors un résultat de G. Levitt : *si une relation d'équivalence à orbites infinies admet un graphage Φ de coût 1, alors la relation engendrée est hyperfinie.* On a montré aussi :

Théorème 5.12 [Gab00a, th. IV.4] *Toute sous-relation d'une relation arborable est elle-même arborable.*

S. Jackson, A. Kechris et A. Louveau ont obtenu [JKL02] de manière indépendante un résultat analogue, mais dans le *cadre borélien* (i.e. sans la présence d'une mesure quasi-invariante). Notre preuve se généralise directement à ce cadre.

Corollaire 5.13 *Si Γ contient un sous-groupe anti-arborable, il est lui-même anti-arborable.*

Question 5.14 *Quels sont les groupes qui admettent une action libre arborable ?*

Dans cette classe, on trouve les groupes libres, les groupes de surface, les produits libres de groupes moyennables et tous les groupes qui leur sont commensurables.

Question 5.15 *Si un groupe a une action libre arborable, ses autres actions libres le sont-elles toutes ?*

L'exemple typique du groupe non moyennable est le groupe libre à deux générateurs. Dès qu'un groupe contient un groupe libre non cyclique, il est non moyennable. Ce qu'on appelle à tort la *conjecture de von Neumann* consiste à affirmer qu'on aurait là une caractérisation des groupes non moyennables. Les groupes infinis de torsion ayant la propriété (T) de Kazhdan en fournissent des contre-exemples [GH90]. Cependant, pour les groupes linéaires, on a un théorème plus fort, l'alternative de Tits : *tout groupe linéaire de type fini ou bien contient un sous-groupe résoluble d'indice fini ou bien contient un groupe libre à deux générateurs*. De manière comparable, on peut se demander :

Question 5.16 *Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence mesurée à classes dénombrables. L'alternative suivante est-elle vérifiée ?*

-ou bien \mathcal{R} est hyperfinie

-ou bien \mathcal{R} contient une sous-relation arborable de coût > 1 .

M. Pichot d'une part et A. Kechris-B. Miller d'autre part (communications personnelles) ont montré que si $\mathcal{C}(\mathcal{R}) > 1$, alors \mathcal{R} contient une sous-relation arborable de coût > 1 .

5.3 Groupes de coût = 1

Une difficulté pour montrer la non trivialité du coût vient du fait que de nombreux groupes sont de coût 1. Par exemple, par le théorème d'Ornstein-Weiss, les groupes moyennables infinis ont tous coût 1. En voici une autre grande famille.

Proposition 5.17 [Gab00a, prop. VI.23] *Si Γ est le produit direct de deux groupes infinis et contient un élément d'ordre infini, alors toutes les actions de Γ sont de coût 1.*

Ou encore, par application du théorème 5.6 :

Exemple 5.18 Si Γ est un produit amalgamé $\Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2 = \mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$, son coût vaut 1. Notons que si le générateur du groupe Γ_3 est envoyé sur $r \in \Gamma_1$ et $s \in \Gamma_2$, le groupe Γ se surjecte sur le groupe $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. Sous l'hypothèse $|rs| > 4$ et $|r|, |s| \neq 1$, ce dernier contient un groupe libre \mathbf{F}_2 , donc Γ n'est pas moyennable. On en déduit qu'il est alors anti-arborable (cor. 5.11).

Théorème 5.19 [Gab02] *Si Γ a un sous-groupe normal infini, d'indice infini et de type fini, alors $\mathcal{C}(\Gamma) = 1$.*

Les réseaux de $SO(3, 1)$ sont de coût 1. Cela donne des exemples de groupes hyperboliques de coût 1, qui ont des actions non arborables.

Les propriétés de commutation de certains systèmes générateurs permettent de montrer que $\mathcal{C}(SL(n, \mathbb{R})) = 1$. Plus généralement, Dave Witte m'a montré (communication personnelle) que si Γ est un réseau dans un groupe de Lie connexe, semi-simple, de rang réel ≥ 2 et si Γ est non cocompact, ou Γ réductible, alors Γ vérifie le critère VI.24 (3) de [Gab00a]. Les actions libres de ces groupes sont donc de coût 1.

5.4 Groupes de coût > 1

L'exemple typique d'une relation arborable est donné par les actions libres du groupe libre.

Corollaire 5.20 [Gab98, Gab00a] *Les actions libres du groupe libre \mathbf{F}_p sont toutes arborables, de coût p . En particulier, des groupes libres de rangs distincts n'ont donc pas d'actions libres orbitalement équivalentes.*

Cela permet de répondre à une question de A. Vershik [Ver89, p. 90] :

Corollaire 5.21 [Gab98, Gab00a] *Les décalages de Bernoulli de groupes libres de rangs distincts ne sont pas orbitalement équivalents.*

Corollaire 5.22 *Les réseaux de $SL(2, \mathbb{R})$ de caractéristiques d'Euler distinctes n'ont pas d'actions libres orbitalement équivalentes.*

Ce corollaire se distingue particulièrement des résultats de rigidité des cocycles de R. Zimmer du fait qu'il concerne des groupes qui ne sont pas de rang supérieur.

On donne à titre indicatif une liste de groupes à coût > 1 , sans chercher ni l'exhaustivité, ni à éviter les redondances.

- Les produits libres de deux groupes infinis.
- Les groupes de type fini qui ont une infinité de bouts (grâce au théorème de Stallings).
- Les actions libres de $SL(2, \mathbb{Z})$ sont toutes arborables, de coût $1 + \frac{1}{12}$.
- Pour un produit amalgamé de groupes finis A, B, C , on a $\mathcal{C}(A *_C B) = 1 - (\frac{1}{|A|} + \frac{1}{|B|} - \frac{1}{|C|})$.
- Le groupe fondamental de la surface de genre $g \geq 1$ est un produit amalgamé $\pi(S_g) = \mathbf{F}_p *_Z \mathbf{F}_q$, avec $p + q = 2g$. Ses actions libres sont toutes de coût $2g - 1$. De plus, ce groupe admet au moins une action libre arborable : l'action par multiplication à gauche sur $SL(2, \mathbb{R})/\mathbf{F}_p$, où \mathbf{F}_p agit par multiplication à droite et est de covolume fini.
- Les produits amalgamés de groupes libres $\mathbf{F}_p *_Z \mathbf{F}_q$ au-dessus de \mathbb{Z} , avec $pq \geq 2$, ont toutes leurs actions libres de coût $p + q - 1$. Certains de ces groupes n'ont qu'un seul bout, d'autres une infinité de bouts. Certains de ces groupes sont anti-arborables : par exemple, si le générateur de \mathbb{Z} est envoyé sur des puissances adéquates $g^r \in \mathbf{F}_p$ et $h^s \in \mathbf{F}_q$, un tel groupe contient le sous-groupe anti-arborable qui apparaît dans l'exemple 5.18. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 5.13.
- plus généralement tous les groupes dont le premier nombre de Betti ℓ^2 est non nul (voir la remarque précédant la question 6.20 : pour les groupes infinis, $\mathcal{C}(\Gamma) - 1 \geq \beta_1(\Gamma)$).
- Pour tout $c \in [1, \infty]$, il existe un groupe *de type fini* dont toutes les actions libres ont coût c .
- Pour tout $c \in [1, \infty]$, il existe un groupe Γ_c et un groupe Λ_c , dont toutes les actions libres sont arborables (resp. non arborables) de coût c .

Question 5.23 *Quel est le coût des groupes qui sont localement libres (i. e. dont tous les sous-groupes de type fini sont libres) mais non libres ? Sont-ils arborables ?*

Question 5.24 *Les groupes de présentation finie sont-ils de coûts rationnels ?*

On peut trouver des énoncés supplémentaires, concernant le coût des relations d'équivalence, dans les notes, issues d'une série d'exposés donnés par A. Kechris au séminaire de logique commun Caltech-UCLA en 2000-2001 [Kec01a] ; notamment des résultats de G. Hjorth, B. Miller, J. Pavelich et S. Solecki.

6 Nombres de Betti ℓ^2 des relations d'équivalence

La première utilisation de structures euclidiennes dans un cadre homologique peut être attribuée à B. Eckmann [Eck45], qui munit l'espace des chaînes d'un CW-complexe du produit scalaire naturel. Les nombres de Betti ℓ^2 ont été introduits par M. Atiyah [Ati76] dans un contexte d'actions de groupes cocompactes sur des variétés et en termes de noyau de la chaleur. J. Cheeger et M. Gromov [CG86] ont considérablement étendu cette notion, en introduisant la cohomologie ℓ^2 singulière pour les actions topologiques et en permettant, entre autres, de définir la suite $\beta_n(\Gamma)$ des nombres de Betti ℓ^2 pour un groupe dénombrable Γ quelconque. On peut consulter [Gro93, part. 8] pour une multitude de résultats et de questions sur la cohomologie ℓ^2 et [Lüc02a, Eck00] pour une introduction à la cohomologie ℓ^2 des actions cocompactes sur des CW-complexes ou [Lüc98a] et [Lüc98b] pour une approche alternative. De même qu'on a en général coïncidence des invariants produits par les cohomologies simpliciale, singulière ou de De Rham, les diverses approches, simpliciale, singulière ou analytique produisent les mêmes nombres de Betti ℓ^2 . Dans le contexte des feuilletages mesurés, les nombres de Betti (qu'on peut qualifier de ℓ^2) avaient été introduits par A. Connes dans [Co79].

De même que l'étude d'un groupe Γ passe par ses actions, en particulier de ses actions libres sur des complexes simpliciaux, on considère des actions de \mathcal{R} . Une relation d'équivalence \mathcal{R} sur (X, μ) est un *groupoïde*, où la composition $(x, y).(z, t)$ est définie seulement si $y = z$ par (x, t) . De ce fait, \mathcal{R} agit sur des espaces Σ qui sont fibrés sur X . Autrement dit, on regarde des champs d'espaces

$$X \ni x \mapsto \Sigma_x,$$

avec évidemment une dépendance mesurable des espaces Σ_x par rapport à x . On se restreint aux cas où les Σ_x sont des complexes simpliciaux et où l'action est *libre*, c'est-à-dire qu'il existe un domaine fondamental borélien D pour l'action de \mathcal{R} sur le 0-squelette $\Sigma^{(0)}$. On dit alors que Σ est un **\mathcal{R} -complexe simplicial**.

Dans ce cas, on peut voir l'espace quotient $\mathcal{R} \backslash \Sigma$ comme une *lamination singulière* \mathcal{L} dont les feuilles sont des complexes simpliciaux et où le 0-squelette $\mathcal{R} \backslash \Sigma^{(0)}$ est une transversale totale. Plus précisément, à un point y de la transversale, il correspond un unique relevé \bar{y} dans D , ce relevé appartient à la fibre au-dessus d'un certain x et la feuille de y s'identifie à la composante connexe de Σ_x contenant \bar{y} .

Exemple 6.1 *Considérons une action (pas nécessairement libre) de Γ sur (X, μ) , et une action simpliciale libre de Γ sur un complexe simplicial connexe K , avec un sommet marqué $*$. La lamination "bête" par $\{x\} \times K$ sur $X \times K$ fournit, par passage au quotient par l'action diagonale de Γ , une lamination \mathcal{L} sur $\Gamma \backslash (X \times K)$. La feuille d'un point $x \in X$ s'identifie au quotient de K par le stabilisateur $\text{Stab}_{\Gamma, X}(x)$ de x . Cette lamination provient aussi de l'action de la relation d'équivalence \mathcal{R}_Γ sur le champ de complexes simpliciaux*

$$x \mapsto \text{Stab}_{\Gamma, X}(x) \backslash K.$$

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence préservant la mesure de probabilité sur (X, μ) et Σ un \mathcal{R} -complexe simplicial. On définit des nombres de Betti ℓ^2 de cette action, pour $p = 0, 1, 2, \dots$:

$$\beta_p(\Sigma, \mathcal{R}, \mu),$$

même sans hypothèses de finitude sur Σ , en adaptant des idées de [CG86]. On utilise pour cela l'algèbre de von Neumann M de \mathcal{R} (voir section 10). Cette algèbre possède une trace finie définie à l'aide de μ , qui permet de calculer des dimensions généralisées de von Neumann.

Remarque 6.2 Plaçons-nous dans une situation classique de revêtements $\widetilde{M} \rightarrow \overline{M} \rightarrow M$. L'idée d'Atiyah, qui considère dans un cadre *galoisien cocompact* $\overline{M} \rightarrow M$ l'intégrale divergente d'une quantité invariante par le groupe du revêtement, consiste à se restreindre à un domaine fondamental F , pour capturer une valeur finie, constante sur les divers translatés de F : le nombre de Betti ℓ^2 du revêtement \overline{M} , dans la dimension considérée.

Dans un cadre non galoisien, un domaine fondamental du revêtement universel \widetilde{M} , avec ses translatés, fournit par projection sur \overline{M} une famille de “domaines fondamentaux” sur lesquels la valeur que l’on traque n’est pas constante.

Les nombres de Betti ℓ^2 des situations feuilletées peuvent parfois s’interpréter comme (délivrés par une manière de prendre) une moyenne des valeurs obtenues aux différents points de base (voir [BG02] pour des exemples).

Une manière anachronique d’introduire les nombres de Betti ℓ^2 est la suivante. Considérons un groupe dénombrable discret Γ et un complexe simplicial \overline{K} sur lequel Γ agit librement et co-compactly. Supposons que Γ possède une suite décroissante $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de sous-groupes distingués d’indices finis d’intersection triviale $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i = \{1\}$. Il lui correspond une suite croissante de revêtements galoisiens $\overline{K} \rightarrow \cdots \overline{K}/\Gamma_{i+1} \rightarrow \overline{K}/\Gamma_i$. Chacun des \overline{K}/Γ_i possède des nombres de Betti usuels $b_n(\overline{K}/\Gamma_i)$. Répondant à une question de M. Gromov, W. Lück a montré [Lüc94a] que sous les hypothèses précédentes,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_n(\overline{K}/\Gamma_i)}{[\Gamma : \Gamma_i]} = \beta_n(\overline{K}, \Gamma),$$

où $\beta_n(\overline{K}, \Gamma)$ est le n -ième nombre de Betti ℓ^2 de l’action de Γ sur \overline{K} . Si \overline{K} est de plus contractile, ces nombres sont les nombres de Betti ℓ^2 de Γ .

M. Farber [Far98] a obtenu l’énoncé analogue en remplaçant l’hypothèse de sous-groupes distingués par une hypothèse (*) sur l’asymptotique du nombre $n_i(g)$ de conjugués de Γ_i contenant l’élément g , rapporté au nombre n_i de conjugués de Γ_i : pour tout $g \in \Gamma \setminus \{1\}$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n_i(g)}{n_i} = 0.$$

Avec N. Bergeron, nous supprimons cette hypothèse et nous montrons :

Théorème 6.3 [BG02] *À une suite décroissante $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de sous-groupes de Γ d’indices finis d’intersection triviale, correspond une relation d’équivalence \mathcal{R} , préservant la probabilité sur un espace borélien standard (la limite projective des Γ/Γ_i) et l’action de Γ sur \overline{K} fournit un \mathcal{R} -complexe simplicial Σ tels que*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_n(\overline{K}/\Gamma_i)}{[\Gamma : \Gamma_i]} = \beta_n(\Sigma, \mathcal{R}).$$

La relation \mathcal{R} est donnée par une action de Γ et la condition (*) est équivalente à la liberté de cette action. Nous exhibons aussi des exemples où $\beta_n(\Sigma, \mathcal{R}) \neq \beta_n(\overline{K}, \Gamma)$.

Définition 6.4 *On dit que Σ est p -connexe (resp. contractile) si pour presque tout $x \in X$, le complexe Σ_x est p -connexe (resp. contractile).*

Notons l’existence d’un “espace classifiant” simplicial pour la relation d’équivalence \mathcal{R} , et donc d’un \mathcal{R} -complexe simplicial contractile (cf. [Gab01]). On doit bien entendu rapprocher cette construction de celle du classifiant d’un feuilletage ou d’un groupoïde défini par A. Haefliger [Hae71, 5] ou de celle donnée A. Connes dans ses cours (voir aussi [BCH94]). Ici, la trivialité des groupes d’isotropie permet de considérer un espace très simple et naturel dans lequel se plongent tous les \mathcal{R} -complexes simpliciaux.

On démontre, et c’est vraiment le cœur de l’article [Gab01] :

Théorème 6.5 [Gab01] *Tous les \mathcal{R} -complexes simpliciaux qui sont p -connexes ont le même nombre de Betti β_p .*

Définition 6.6 *On définit les nombres de Betti ℓ^2 de la relation \mathcal{R} comme la valeur commune, qu’on note $\beta_p(\mathcal{R}, \mu)$, des nombres de Betti $\beta_p(\Sigma, \mathcal{R}, \mu)$ des \mathcal{R} -complexes simpliciaux qui sont p -connexes.*

Ces nombres sont bien entendu à rapprocher d'une version simpliciale des nombres de Betti des feuilletages définis par A. Connes [Co79], [Co82, p.549]. On peut consulter aussi l'interprétation combinatoire de G. Elek [Ele97] ainsi que l'article de J. Heitch et C. Lazarov [HL91] sur l'invariance homotopique des nombres de Betti des feuilletages.

On peut montrer par exemple en utilisant une construction de [HL91] la chose suivante : considérons une variété compacte munie d'un feuilletage mesuré ergodique \mathcal{F} à feuilles contractiles. Fixons une mesure transverse invariante et choisissons une transversale totale X de mesure 1.

Théorème 6.7 *Les nombres de Betti (au sens de A. Connes) de \mathcal{F} coïncident avec ceux de la relation d'équivalence \mathcal{R} engendrée par les applications d'holonomie sur X . En particulier, ces nombres ne dépendent que de la relation \mathcal{R} .*

On peut illustrer cela grâce à un exemple présenté par A. Connes pour les feuilletages :

Exemple 6.8 *Considérons un groupe fondamental Γ d'une surface compacte de genre g qui admet une représentation fidèle dans $\mathrm{SO}(3)$ et une action libre cocompacte de Γ sur le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 . Le feuilletage par plans hyperboliques de $\mathbb{H}^2 \times \mathrm{SO}(3)$ étant préservé par l'action diagonale de Γ fournit un feuilletage sur $\mathbb{H}^2 \times \mathrm{SO}(3)/\Gamma$. Ses nombres de Betti sont les mêmes que les nombres de Betti ℓ^2 de la relation donnée par l'action de Γ sur $\mathrm{SO}(3)$ et que ceux du groupe Γ , à savoir $\beta_1 = 2g - 2$ et $\beta_i = 0$ pour $i \neq 1$.*

La principale difficulté qu'on a rencontrée dans la preuve du théorème 6.5 réside dans le fait que les équivalences d'homotopie qu'on doit considérer entre complexes de chaînes ne conduisent pas, en général, à des opérateurs bornés. On est donc amené à travailler sur des approximations. On doit comparer aussi ce résultat aux idées et questions évoquées dans [Gro93, 8.A₄, p.233] et au *claim* qu'on trouve à cette page : *soient Γ_i , $i = 1, 2$, qui admettent des actions isométriques, discrètes et cocompactes sur des variétés contractiles M_1 et M_2 . Si M_1 est mesurablement quasi-isométrique à M_2 , alors les groupes Γ_1 et Γ_2 ont leurs nombres de Betti ℓ^2 proportionnels.* L'hypothèse de quasi-isométrie dans ce cas-là conduit à des opérateurs qui sont bornés.

On démontre qu'on peut calculer les nombres de Betti de certaines relations :

Théorème 6.9 [Gab01] *Si \mathcal{R} est produite par une action libre de Γ , préservant la mesure de probabilité, alors Γ et \mathcal{R} ont les mêmes nombres de Betti ℓ^2 .*

Remarque 6.10 Dans l'étude générale des relations d'équivalence dénombrables standards, il est naturel de considérer plutôt une classe de mesure (au sens de l'absolue continuité) qu'une mesure [FM77a]. Si on remplace la mesure μ par une mesure équivalente (de probabilité et invariante), on obtient la même algèbre de von Neumann. Seule la trace change. Les nombres $\beta_n(\Sigma, \mathcal{R}, \mu)$ dépendent du choix d'une mesure invariante dans la classe. Cependant, si \mathcal{R} est ergodique (tout borélien \mathcal{R} -saturé est de μ -mesure nulle ou totale), il n'existe qu'une seule mesure de probabilité invariante dans la classe. Dans ce cas, on peut supprimer *a priori* la référence à la mesure choisie. Si \mathcal{R} est donnée par une action libre d'un groupe Γ , nos résultats montrent qu'on peut *a posteriori* supprimer la référence à μ .

Soit $Y \subset X$ est un borélien qui rencontre presque toutes les classes de \mathcal{R} et \mathcal{R}_Y la relation induite sur Y . Bien sûr, on calculera les nombres de Betti ℓ^2 de \mathcal{R}_Y avec la mesure induite normalisée $\bar{\mu} = \frac{\mu|_Y}{\mu(Y)}$ sur $(Y, \bar{\mu})$.

Théorème 6.11 *Les nombres de Betti ℓ^2 de \mathcal{R} et de \mathcal{R}_Y sont reliés par la formule :*

$$\beta_n(\mathcal{R}, \mu) = \mu(Y) \cdot \beta_n(\mathcal{R}_Y, \bar{\mu}).$$

Corollaire 6.12 *Si \mathcal{R} et \mathcal{S} sont deux relations d'équivalence préservant une probabilité, stablement orbitalement équivalentes, avec constante de compression $c(\mathcal{R}, \mathcal{S})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\beta_n(\mathcal{R}) = c(\mathcal{R}, \mathcal{S}) \cdot \beta_n(\mathcal{S}).$$

6.1 Applications

Théorème 6.13 *Si deux groupes ont des actions libres préservant une probabilité qui produisent la même relation d'équivalence alors ils ont les mêmes nombres de Betti ℓ^2 .*

On retrouve en particulier, avec une preuve d'esprit différent (et plus compliquée !), un théorème de Cheeger-Gromov (en effet, Γ produit la même relation qu'une action de \mathbb{Z} pour lequel le résultat est facile)(voir aussi [Eck00]) :

Corollaire 6.14 ([CG86, th.0.2]) *Si Γ est moyennable infini, alors tous ses nombres de Betti ℓ^2 sont nuls.*

Le corollaire suivant est bien connu dans le cas des groupes de Lie ou dans le cas des groupes discrets (il s'agit alors de la formule donnant les nombres de Betti ℓ^2 pour les sous-groupes d'indice fini).

Corollaire 6.15 *Les nombres de Betti ℓ^2 des réseaux d'un même groupe localement compact à base dénombrable sont dans le même rapport que les covolumes. Il en est de même en particulier de leurs caractéristiques d'Euler virtuelles (lorsqu'elles sont définies).*

On obtient des résultats de rigidité par exemple pour des produits de groupes libres.

Corollaire 6.16 *Les groupes de la forme $\mathbf{F}_{p_1} \times \mathbf{F}_{p_2} \times \cdots \times \mathbf{F}_{p_\ell}$, $p_j \geq 2$ produisent des actions libres toutes non SOE pour des valeurs distinctes de ℓ .*

*Les groupes libres \mathbf{F}_p de rang distincts et les groupes de la forme $(\mathbf{F}_m \times \mathbf{F}_n) * \mathbf{F}_k$ pour différents k et $(m-1) \cdot (n-1)$ produisent des actions libres toutes non orbitalement équivalentes (pour $m, n, p, k > 1$).*

En effet, les β_j sont tous nuls sauf $\beta_\ell = \prod_{j=1}^{\ell} (p_j - 1)$, resp. $\beta_1 = p - 1$, resp. $\beta_1 = k, \beta_2 = (m-1) \cdot (n-1)$. Il est intéressant de comparer ce corollaire aux problèmes difficiles analogues concernant les facteurs (algèbres de von Neumann) des groupes libres (cf. section 10).

On obtient aussi de nouveaux résultats de rigidité en rang 1 (puisque les nombres de Betti ℓ^2 des groupes mis en jeu sont tous nuls sauf exactement en dimension moitié de l'espace symétrique associé). Rappelons (en anticipant sur la section 7.1) que deux groupes sont dits mesurablement équivalents (ME) s'ils admettent des actions libres stablement orbitalement équivalentes.

Corollaire 6.17 *Si deux réseaux de $Sp(n, 1)$ et $Sp(p, 1)$ sont ME, alors $p = n$.*

Si deux réseaux de $SU(n, 1)$ et $SU(p, 1)$ sont ME, alors $p = n$.

Si deux réseaux de $SO(2n, 1)$ et $SO(2p, 1)$ sont ME, alors $p = n$.

M. Cowling et R. Zimmer ont montré ce résultat dans $Sp(n, 1)$, avec constante de compression $c = 1$ [CZ89, th. 1.1(a)]. On peut évidemment décliner ces exemples à l'infini. Signalons toutefois l'exemple suivant, qu'il est intéressant de comparer et de combiner avec [CZ89, th. 1.1(b)], où les rigidités mises en jeu sont de natures différentes et où le résultat concerne le produit uniquement des $2m_i - 1$:

Corollaire 6.18 *Considérons des groupes de Lie de la forme $\prod_{i \in I} Sp(m_i, 1) \times \prod_{j \in J} SU(n_j, 1) \times \prod_{k \in K} SO(2p_k, 1)$, où I, J, K sont des ensembles finis et les $m_i, n_j \geq 2$ et $p_k \geq 1$. Si dans de tels groupes de Lie G et G' , on a deux réseaux Γ et Γ' (irréductibles ou non) qui sont ME, alors les quantités $\sum_{i \in I} 2m_i + \sum_{j \in J} n_j + \sum_{k \in K} p_k$ sont égales pour G et G' .*

Rappelons que les résultats de superrigidité des cocycles pour les réseaux des groupes de Lie de rang réel ≥ 2 ne s'appliquent pas ici puisqu'ils nécessitent la simplicité du groupe de Lie (cf. [Zim84, cor. 5.2.2, rem. pp.97–98, Ex. 5.2.12]). Le cas de $SO(n, 1)$ pour n impair est un peu plus délicat, dans la mesure où ses réseaux ont tous leurs nombres de Betti ℓ^2 nuls.

Corollaire 6.19 *Si deux réseaux de $SO(n, 1)$ et $SO(p, 1)$ sont ME, alors n et p ont même parité. Si deux réseaux de $SO(2n + 1, 1)$ et $SO(2p + 1, 1)$ sont ME, avec $p \leq n$, alors $n \leq 2p$.*

La preuve de la deuxième assertion de ce corollaire m'a été suggérée par B. Okun.

On retrouve aussi un certain nombre des résultats de [Gab00a], notamment : *si deux groupes libres de rangs p et q ont des actions libres qui produisent la même relation d'équivalence, alors $p = q$ [Gab00a, cor. 1, p.44].*

L'idée de considérer les nombres de Betti ℓ^2 m'est venue après qu'A. Valette m'ait fait remarquer que dans tous les exemples de groupes où l'on sait évaluer ces nombres, on a $\mathcal{C}(\Gamma) - 1 = \beta_1(\Gamma) - \beta_0(\Gamma)$. J'ai tenté de démontrer cette égalité en toute généralité, sans succès. L'inégalité \geq est facile à obtenir.

Question 6.20 *A-t-on pour toute action libre de Γ l'égalité suivante : $\mathcal{C}(\mathcal{R}_\Gamma) - 1 = \beta_1(\Gamma) - \beta_0(\Gamma)$?*

Une réponse positive à cette question donnerait aussi la réponse à la question 5.8.

6.2 Groupe fondamental

Le groupe fondamental a été introduit dans la théorie des algèbres de von Neumann par F. Murray et J. von Neumann (voir section 10.2). On a un analogue dans la théorie des relations d'équivalence. Considérons une relation \mathcal{R} ergodique (toujours préservant la mesure de probabilité) sur (X, μ) . Pour un borélien $Y \subset X$ de mesure > 0 , on peut montrer que la relation induite $\mathcal{R}_Y = \mathcal{R} \cap (Y \times Y)$ sur $(Y, \mu|_Y)$ ne dépend que de $\mu(Y)$. Il peut arriver que $\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}_Y$, bien que $\mu(Y) \neq 1$. Par exemple, la restriction, à n'importe quel Y de mesure > 0 , de la relation ergodique hyperfinie \mathcal{R}_{hyp} est elle-même ergodique hyperfinie, donc isomorphe à \mathcal{R}_{hyp} .

Définition 6.21 *Le groupe fondamental de \mathcal{R} est défini comme le sous-groupe $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ de \mathbb{R}^{+*} engendré par $\{\mu(Y) : \mathcal{R} \simeq \mathcal{R}_Y\}$.*

Par exemple, $\mathcal{F}(\mathcal{R}_{hyp}) = \mathbb{R}_+^*$. On montre que $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \cap]0, 1]$ est exactement $\{\mu(Y) \in]0, 1] : \mathcal{R} \simeq \mathcal{R}_Y\}$.

Proposition 6.22 *Si le coût de \mathcal{R} est différent de $0, \infty$, alors $\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \{1\}$. Si l'un des nombres de Betti ℓ^2 de \mathcal{R} est différent de $0, \infty$, alors $\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \{1\}$.*

On utilise pour cela le théorème 6.11. Notons qu'il existe des actions libres du groupe libre \mathbf{F}_∞ sur une infinité dénombrable de générateurs dont le groupe fondamental contient toute partie dénombrable prescrite de \mathbb{R}^{+*} [Gab02c].

Cet énoncé fournit une quantité de nouvelles relations à groupe fondamental trivial et a permis à S. Popa de résoudre une vieille question en théorie des facteurs (voir th. 10.4). Les restrictions antérieurement connues sur le groupe fondamental d'une relation reposaient toutes sur la propriété (T) de Kazhdan et étaient plus ou moins reliées à un théorème de A. Connes [Co80] ou à la rigidité des cocycles de R. Zimmer [Zim84]. Ce n'est pas le cas ici. Citons deux théorèmes, l'un dû à S. Popa et l'autre à S. Gefter et V. Golodets.

On rappelle qu'un groupe Γ est dit à *classes de conjugaison infinies* (CCI) si pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$, l'ensemble $C(\gamma) = \{\lambda\gamma\lambda^{-1} : \lambda \in \Gamma\}$ est infini. Cette propriété joue un grand rôle dans la théorie des algèbres de von Neumann (voir section 10.1).

Théorème 6.23 [Pop86, th. 4.7.1] *Si une relation d'équivalence \mathcal{R} préservant la probabilité sur (X, μ) contient comme sous-relation l'action libre ergodique d'un groupe CCI avec la propriété (T) de Kazhdan, alors $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ est dénombrable.*

Autrement dit, il existe un ensemble dénombrable $S_0 \subset [0, 1]$ tel que pour tout borélien $Y \subset X$ de mesure $\mu(Y) \notin S_0$ les relations \mathcal{R}_Y et \mathcal{R} ne sont pas isomorphes.

Théorème 6.24 [GG88, cor. B.3] *Si Γ est un réseau d'un groupe de Lie simple connexe, à centre trivial et de \mathbb{R} -rang ≥ 2 , alors toute action de Γ libre ergodique préservant la probabilité sur (X, μ) a un groupe fondamental trivial.*

6.3 Dimension géométrique

Définition 6.25 *La dimension géométrique de \mathcal{R} est le minimum des dimensions des \mathcal{R} -complexes simpliciaux contractiles.*

Les théorèmes 6.5 et 6.9 montrent que si \mathcal{R} est produite par un groupe Γ pour lequel $\beta_p(\Gamma) \neq 0$, alors $\dim(\mathcal{R}) \geq p$.

Les relations produites par les actions libres des groupes du corollaire 6.16 sont ainsi de dimensions géométriques respectives ℓ , 1 et 2. On peut montrer (par glissement des arêtes) que la notion de relation de dimension 1 et de relation arborable ne diffèrent que pour les relations dont les orbites sont finies : celles-là sont arborables et de dimension 0. On a montré [Gab00a, th. IV.4] que si une relation \mathcal{R} admet un arborage, alors ses sous-relations d'équivalence standards en admettent aussi un, de même que les relations qui lui sont SOE. De manière comparable, on montre :

Proposition 6.26 *Si \mathcal{R} est une sous-relation de \mathcal{S} , alors la dimension de \mathcal{S} majore celle de \mathcal{R} .*

Proposition 6.27 *Les relations SOE ont même dimension géométrique.*

Cette notion permet de poursuivre plus avant la classification des relations d'équivalence lorsque les nombres de Betti ℓ^2 sont identiques (voir section 7.1).

Remarque 6.28 Il existe des relations d'équivalence dont tous les nombres de Betti L^2 sont triviaux mais qui ne sont pas de dimension finie : faire agir un groupe à β_p triviaux (comme $\Gamma \times \mathbb{Z}$) qui contient des sous-groupes Γ_i dont le $\beta_i(\Gamma_i)$ est non trivial pour une suite infinie de valeurs de i .

Exemple 6.29 *Si \mathcal{R} est de dimension géométrique 1, alors $\beta_n(\mathcal{R}) = 0$ pour tout $n > 1$.*

6.4 Dimension géométrique approximative

Définition 6.30 *Une relation \mathcal{R} est approximativement de dimension n si elle est réunion croissante de relations de dimension géométrique n . La dimension approximative de \mathcal{R} est le minimum des tels n .*

Proposition 6.31 *Si \mathcal{R} est une sous-relation de \mathcal{S} , alors la dimension approximative de \mathcal{S} majore celle de \mathcal{R} .*

Exemple 6.32 *Les actions libres du groupe $\mathbf{F}_{n_1} \times \mathbf{F}_{n_2} \times \cdots \times \mathbf{F}_{n_p}$ ($n_i \geq 2$) sont toutes de dimension approximative p , égale à leur dimension géométrique. Si Λ est une réunion croissante de groupes finis (e.g. $\Lambda = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), les actions libres du groupe $\mathbf{F}_{n_1} \times \mathbf{F}_{n_2} \times \cdots \times \mathbf{F}_{n_p} \times \Lambda$ sont toutes de dimension approximative p .*

Proposition 6.33 *Si \mathcal{R} est réunion croissante de relations \mathcal{R}_i alors $\beta_n(\mathcal{R}) \leq \liminf_{i \in \mathbb{N}} \beta_n(\mathcal{R}_i)$. En particulier, si \mathcal{R} est approximativement de dimension p , alors $\beta_n(\mathcal{R}) = 0$ pour tout $n \geq p + 1$.*

7 Application à la théorie des groupes

7.1 Équivalence mesurable vs quasi-isométrie

Rappelons que deux groupes dénombrables Γ_1 et Γ_2 sont *commensurables* s'il existe un groupe Γ qui est isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de chacun d'eux.

Caractérisation. *Deux groupes dénombrables Γ_1 et Γ_2 sont commensurables si et seulement si il existe, sur un ensemble dénombrable Ω , des actions de Γ_1 et Γ_2 qui commutent, telles que l'action de chacun des groupes est libre et a un domaine fondamental fini.*

On définit l'indice relatif $i_\Omega(\Gamma_1, \Gamma_2) := \frac{[\Gamma_1:\Gamma]}{[\Gamma_2:\Gamma]} = \frac{\sharp(\Omega/\Gamma_2)}{\sharp(\Omega/\Gamma_1)}$. L'exemple standard d'application de cette caractérisation est donné par deux sous-groupes d'indices finis dans un même groupe.

On a alors deux façons de généraliser la commensurabilité :

- une manière topologique (un ensemble fini est un compact très simple), qui conduit à l'étude des groupes modulo quasi-isométries (QI)
- une manière mesurable (un ensemble fini est un ensemble de mesure finie très simple) qui conduit à un analogue mesurable de la quasi-isométrie : l'équivalence mesurable (ME).

Rappelons ce critère et cette définition, dûs à M. Gromov :

Critère [Gro93, 0.2.C'₂] *Deux groupes Γ_1 et Γ_2 de type fini sont quasi-isométriques si et seulement si il existe, sur un espace localement compact, des actions de Γ_1 et Γ_2 qui commutent, et chacune des deux actions est propre et admet un domaine fondamental compact.*

L'exemple standard de deux groupes QI est donné par deux réseaux cocompacts d'un groupe G localement compact à base dénombrable qui agissent sur G par multiplication respectivement à gauche et à droite. Voir [Har00, Ex. 34–35, pp. 97–99] pour une preuve de ce critère.

Définition 7.1 [Gro93, 0.5.E] *Deux groupes Γ_1 et Γ_2 sont mesurablement équivalents (ME) s'il existe, sur un espace borélien standard (de mesure infinie), des actions de Γ_1 et Γ_2 qui commutent, et chacune des deux actions est libre, préserve la mesure et admet un domaine fondamental B_1 (resp. B_2) de mesure finie.*

Le rapport $c(\Gamma_1, \Gamma_2) = \frac{m(B_2)}{m(B_1)}$ est appelé *constante de compression* de l'équivalence mesurable. L'exemple standard de deux groupes ME est donné par deux réseaux, pas nécessairement cocompacts, d'un groupe G localement compact à base dénombrable qui agissent sur G par multiplication respectivement à gauche et à droite.

L'équivalence mesurable est une relation d'équivalence sur l'ensemble des groupes. Elle a été étudiée par A. Furman [Fur99a, Fur99b] qui a montré que la propriété (T) de Kazhdan est un invariant de ME [Fur99a, th. 8.2] et que pour un groupe de Lie simple de rang supérieur, la collection de tous ses réseaux (modulo groupes finis) constitue une classe de ME (voir [Fur99a] pour plus de détails). La classification des groupes modulo quasi-isométrie a conduit à toute une série de travaux (voir [Har00] pour des références) et celle modulo équivalence mesurable mérite une attention tout aussi soutenue et commence à se développer en parallèle. Récemment, P. Jolissaint a montré que la propriété de Haagerup (*a-T-menability*) est un invariant de ME [Jol01]. Le lien avec ce qu'on a décrit dans les précédentes sections est bien établi :

Théorème 7.2 [Gab02] (voir aussi [Fur99b]) *Deux groupes Γ_1 et Γ_2 sont ME si et seulement si ils admettent des actions libres (préservant une probabilité) qui soient SOE.*

Les théorèmes 6.11 et 6.9 permettent de montrer :

Corollaire 7.3 *Si Γ_1 est ME à Γ_2 , alors ils ont des nombres de Betti ℓ^2 proportionnels : pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\beta_n(\Gamma_1) = c \cdot \beta_n(\Gamma_2),$$

où c est la constante de compression de l'équivalence mesurable de Γ_1 à Γ_2 .

Définition 7.4 La **dimension ergodique** $\text{erg-dim}(\Gamma)$ d'un groupe Γ est le minimum des dimensions des relations d'équivalence produites par une action de Γ libre préservant la probabilité sur le borélien standard (X, μ) .

Observons que, puisque le groupe fondamental d'une surface fermée possède des actions libres arborables, sa dimension ergodique est égale à 1 !

Question 7.5 Toutes les actions libres d'un groupe produisent-elles des relations de même dimension ?

G. Hjorth [Hjo02] a montré récemment que les relations d'équivalence ergodiques arborables de coût entier sont produites par des actions libres de groupes libres (voir aussi [Kec01a]). Une conséquence :

Théorème 7.6 Les groupes de dimension ergodique 1 sont tous dans la classe de ME d'un groupe libre, précisément de \mathbb{Z} , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_∞ selon qu'ils ont β_1 nul, fini non nul ou infini)

Question 7.7 Déterminer l'ensemble des groupes dénombrables qui sont dans la classe de ME du groupe libre \mathbf{F}_2 .

Il s'agit essentiellement de la même question que la question 5.14.

Question 7.8 Quelle est la dimension ergodique
 – des réseaux de $SO(n, 1)$, $SU(n, 1)$, $Sp(n, 1), \dots$?
 – des groupes fondamentaux des variétés compactes acycliques ?
 – de $\Lambda_n := (\mathbf{F}_2)^n \times \mathbb{Z} = \underbrace{(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_2 \times \dots \times \mathbf{F}_2)}_{n \text{ fois}} \times \mathbb{Z}$?

Pour cette dernière question, le résultat est n ou $n+1$. Notons que Λ_1 est de dimension ergodique 2.

Définition 7.9 La **dimension ergodique approximative** $\text{approx-dim}(\Gamma)$ d'un groupe Γ est le minimum des dimensions approximatives des relations d'équivalence produites par une action de Γ libre préservant la probabilité sur le borélien standard (X, μ) .

Les groupes moyennables sont précisément ceux de dimension ergodique approximative = 0. La dimension ergodique approximative des groupes infinis avec la propriété (T) de Kazhdan coïncide avec leur dimension ergodique. On donne quelques résultats concernant la dimension ergodique approximative ([Gab02c]).

Proposition 7.10 La dimension ergodique et la dimension ergodique approximative sont des invariants d'équivalence mesurable (ME). Si Γ possède un sous-groupe à $\beta_p \neq 0$, alors $\text{approx-dim}(\Gamma)$ est $\geq p$.

Cela permet de distinguer des classes de ME où les nombres de Betti ℓ^2 sont tous nuls.

Exemple 7.11 Le groupe Λ_n de la question 7.8 est de dimension ergodique approximative n . Les groupes Λ_n et Λ_p ne sont donc pas ME pour $n \neq p$. Les groupes $(\mathbf{F}_2)^n$ sont de dimension approximative n . Si Γ est approximativement de dimension p , alors tous ses nombres de Betti $\beta_i(\Gamma)$ sont nuls pour $i > p$.

Question 7.12 *Trouver pour chaque $n > 1$ des groupes qui aient leurs nombres de Betti ℓ^2 nuls, qui soient de même dimension ergodique n , mais de dimensions ergodiques approximatives différentes.*

On récapitule maintenant quelques propriétés des groupes et leur invariance ou non par QI et par ME.

	QI	ME
type de croissance	oui	non
moyennabilité	oui	oui
nombre de bouts	oui	non
propriété (T) de Kazhdan	non	oui
propriété de Haagerup	?	oui
propriété (FA) de Serre	non	non
nombres de Betti ℓ^2	$\beta_n(\Gamma) = 0$	$(\beta_n(\Gamma))_n / \mathbb{R}_+^*$
signe de la caractéristique d'Euler	non	oui
dimension ergodique	?	oui
dimension ergodique approximative	?	oui
invariants de Novikov-Shubin	?	non
$I_\Omega(\Gamma)$?	oui

$I_\Omega(\Gamma)$ est le sous-groupe de \mathbb{R}_+^* engendré par les constantes de compression des diverses équivalences mesurables entre Γ et lui-même (cf. [Gab02, sect. 2.2]).

7.2 Résultats d'annulations de nombres de Betti ℓ^2 des groupes

On sait que les nombres de Betti ℓ^2 des groupes satisfont aux formules de Künneth. La question se pose de savoir dans quelle mesure ces formules se généralisent à des extensions avec certaines condition de finitude. Les résultats de [CG86, th. 0.1 et th. 0.2] entraînent qu'un groupe qui contient un sous-groupe normal infini moyennable a tous ses nombres de Betti ℓ^2 nuls. Les deux théorèmes suivants généralisent des résultats de W. Lück [Lüc94b], [Lüc98b, quest. 3.11, th.3.3(5)] qui eux-mêmes répondent à des questions de [Gro93, 8.A₄ p.229 et p.235]. Rappelons aussi qu'une majoration du β_1 apporte des informations sur les présentations du groupe : si Γ est de type fini, alors pour toute présentation à g générateurs et r relations, on a $g \leq 1 + \beta_1(\Gamma) + r$ (voir par exemple [Eck00, th. 4.1.1]).

Théorème 7.13 *Soit $1 \rightarrow N \rightarrow \Gamma \rightarrow \Lambda \rightarrow 1$ une suite exacte de groupes infinis où Λ est moyennable. Si n est un entier pour lequel $\beta_n(N)$ est fini, alors $\beta_n(\Gamma) = 0$.*

Et sans l'hypothèse de moyennabilité, il reste :

Théorème 7.14 *Soit $1 \rightarrow N \rightarrow \Gamma \rightarrow \Lambda \rightarrow 1$ une suite exacte de groupes infinis. Si $\beta_1(N)$ est fini, alors $\beta_1(\Gamma) = 0$.*

Ce qu'en contraposant, on peut voir comme une généralisation du théorème de Schreier sur les sous-groupes normaux des groupes libres :

Théorème 7.15 *Si Γ est un groupe qui vérifie $\beta_1(\Gamma) \neq 0$ et N est un sous-groupe normal tel que $\beta_1(N)$ soit fini (par exemple N de type fini), alors N est fini ou d'indice fini.*

Dans [Gab02], on donne une preuve simple de cet énoncé sous des hypothèses plus faibles (cf. théorème 5.19).

8 Liens avec la théorie des graphes aléatoires

On renvoie au livre de R. Lyons et Y. Peres [LP02] pour l'essentiel de cette théorie et pour des références précises. Elle est surtout pour nous ici l'occasion de présenter des exemples de relations d'équivalence et de graphages qui apparaissent naturellement.

Soit \mathcal{G} un graphe connexe d'ensemble dénombrable de sommets (resp. d'arêtes) V (resp. E). Soit Γ un groupe qui agit transitivement sur les sommets de \mathcal{G} . Supposons de plus que Γ agit librement sur E et que les arêtes sont orientées.

Exemple 8.1 *Un graphe de Cayley du groupe Γ fournit un exemple de tel graphe, ou bien le graphe complet $\text{Comp}(\Gamma)$ sur l'ensemble de sommets Γ (pour tous u, v éléments distincts de Γ , on a deux arêtes qui les joignent : $[u, v]$ et $[v, u]$), avec l'action de Γ par multiplication à gauche sur les sommets.*

Le groupe Γ agit sur l'espace $\{0, 1\}^E$ des sous-graphes de \mathcal{G} , où le sous-graphe $\omega \in \{0, 1\}^E$ a pour sommets V et pour ensemble d'arêtes $\{e \in E : \omega(e) = 1\}$. Un sous-graphe aléatoire Γ -invariant de \mathcal{G} est la donnée d'une mesure de probabilité ν sur $\{0, 1\}^E$ qui soit Γ -invariante. Une telle mesure est aussi appelée une *percolation Γ -invariante*.

8.1 D'un graphage à un graphe aléatoire

Considérons une action libre du groupe Γ sur (X, μ) et notons \mathcal{R}_Γ la relation ainsi définie.

Soit $\Phi = (\varphi_i)_{i \in J}$ un graphage d'une sous-relation \mathcal{R}_Φ de \mathcal{R}_Γ . Supposons pour simplifier que pour chaque $i \in J$, il existe un élément $\gamma_i \in \Gamma \setminus \{id\}$ tel que $\varphi_i(x) = \gamma_i^{-1}(x)$, pour tout $x \in A_i$ et que pour $i \neq j$, on ait $\gamma_i \neq \gamma_j$. Sinon, il faudrait partitionner les domaines A_i et considérer un graphe plus gros que $\text{Comp}(\Gamma)$.

Pour chaque $x \in X$, la Γ -orbite Γx de x se décompose en différentes \mathcal{R}_Φ -classes et chacune d'elles est l'ensemble des sommets d'un graphe connexe, sans boucles ni arêtes orientées doubles, défini par Φ . La réunion disjointe de ces graphes définit donc un *graphe $\Phi[x]$, non connexe en général, sur l'ensemble de sommets Γx : deux sommets gx et hx sont reliés par une arête orientée $[gx, hx]$ si et seulement si gx appartient à l'un des A_i et $hx = \varphi_i(gx)$. On a, "vu du point base x ", une identification $\Gamma x \simeq \Gamma$ qui envoie gx sur g^{-1} . Le graphe $\tilde{\Phi}[x]$ s'identifie alors à un sous-graphe de $\text{Comp}(\Gamma)$, en envoyant le sommet gx de $\tilde{\Phi}[x]$ sur le sommet g^{-1} de $\text{Comp}(\Gamma)$, le sommet x sur $* = id$, l'arête $[gx, hx]$ sur $[g^{-1}, h^{-1}]$. La composante connexe de x dans $\tilde{\Phi}[x]$ est définie indépendamment des orientations et ses sommets forment précisément la \mathcal{R}_Φ -classe de x . Elle est envoyée sur la composante connexe de id .*

L'application borélienne de X dans l'espace des sous-graphes de $\text{Comp}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \Pi^\Phi : X &\rightarrow \{0, 1\}^E \\ x &\mapsto \tilde{\Phi}[x] \end{aligned}$$

est Γ -équivariante et la mesure image $\nu = \Pi_^\Phi(\mu)$ est donc une probabilité Γ -invariante. On a un sous-graphe aléatoire Γ -invariant de $\text{Comp}(\Gamma)$.*

En effet, $\Pi^\Phi(\gamma x) = \tilde{\Phi}[\gamma x]$ est le même graphe que $\tilde{\Phi}[x]$, mais basé en $\gamma x = y$. Le sommet $gx = g\gamma^{-1}y$ s'identifie alors au sommet γg^{-1} de $\text{Comp}(\Gamma)$ et une arête $[gx, hx]$ à l'arête $[\gamma g^{-1}, \gamma h^{-1}] = \gamma[g^{-1}, h^{-1}]$.

Notons que x appartient au domaine A_i si et seulement si l'arête entre $[id, \gamma_i^{-1}]$ est présente dans le sous-graphe $\Pi^\Phi(x) = \tilde{\Phi}[x]$ de $\text{Comp}(\Gamma)$.

8.2 D'un graphe aléatoire à un graphage

Inversement, partons d'un sous-graphe aléatoire Γ -invariant de \mathcal{G} . Choisissons un point base $*$ dans \mathcal{G} et soient $(e_i)_{i \in J}$ les arêtes d'origine le sommet $*$. Pour tout $i \in J$, il existe un unique $\gamma_i \in \Gamma$ tel

que $e_i = [*, \gamma_i*]$. L'espace $\{0, 1\}^E$ est alors naturellement muni d'un graphage $\Phi = (\varphi_i)_{i \in J}$ où φ_i est défini sur $A_i = \{\omega \in \{0, 1\}^E : \omega(e_i) = 1\}$ par $\varphi_i(\omega) = \gamma_i^{-1}(\omega)$.

Le stabilisateur $\text{fix}_\Gamma(\omega)$ d'un point $\omega \in \{0, 1\}^E$ correspond aux symétries contenues dans Γ du sous-graphe $\omega \subset \mathcal{G}$. Le graphe $\tilde{\Phi}[\omega]$ (défini comme ci-dessus), dont Φ munit la Γ -orbite de ω , est isomorphe au graphe quotient $\omega/\text{fix}_\Gamma(\omega)$, par un isomorphisme qui envoie le sommet ω de $\tilde{\Phi}[\omega]$ sur la $\text{fix}_\Gamma(\omega)$ -orbite de $*$. En particulier, si l'action de Γ sur $(\{0, 1\}^E, \nu)$ est essentiellement libre, alors on a un isomorphisme $\tilde{\Phi}[\omega] \simeq \omega$ qui envoie le sommet ω sur $*$.

Si on se donne une action libre préservant la mesure de Γ sur un espace borélien standard (X, ν) de probabilité on peut se débarrasser des questions de stabilisateurs.

On considère l'espace produit $X \times \{0, 1\}^E$, équipé de l'action diagonale de Γ et de la mesure produit μ , qui est Γ -invariante. La projection naturelle

$$\begin{aligned} \Pi : X \times \{0, 1\}^E &\rightarrow \{0, 1\}^E \\ (x, \omega) &\mapsto \omega \end{aligned}$$

préserve la mesure : $\Pi_*(\mu) = \nu$.

Le graphage $\Phi' = (\varphi'_i)_{i \in J}$ sur $X \times \{0, 1\}^E$ où φ'_i est défini sur $X \times A_i$ par $\varphi'_i(\bar{\omega}) = \gamma_i^{-1}(\omega')$ "relève" le graphage Φ . Désormais, $\tilde{\Phi}'[\omega']$ est naturellement isomorphe au sous-graphe $\Pi(\omega') \subset \mathcal{G}$, par un isomorphisme qui envoie le sommet ω' sur $*$.

Dans tous ces exemples, le coût du graphage Φ égale $\frac{1}{2}$ de la valence moyenne du sommet $*$.

8.3 Arborabilité

Un *arbre recouvrant* (*spanning tree*) dans un groupe Γ est un arbre d'ensemble de sommets Γ . On peut voir l'espace des arbres recouvrants de Γ comme une partie borélienne de l'espace des sous-graphes du graphe complet sur Γ : l'ensemble des sous-arbres maximaux. Il est muni d'une action du groupe Γ .

Définition 8.2 (cf. [PP00]) *Un groupe Γ est dit arborable s'il existe une mesure de probabilité Γ -invariante sur l'espace de ses arbres recouvrants.*

Les deux paragraphes précédents montrent que

Proposition 8.3 *Un groupe est arborable au sens de [PP00] si et seulement si il admet une action libre α sur (X, μ) qui soit arborable.*

Remarque 8.4 Dans mes travaux, je dis plutôt qu'un *groupe est arborable* si toutes ses actions libres préservant une probabilité le sont.

Mes résultats sur le coût, ainsi que sur les nombres de Betti ℓ^2 permettent de retrouver, de manière indépendante (et concomitante), un théorème de R. Pemantle et Y. Peres.

Théorème 8.5 [PP00, th.1.3] *Si le produit direct de deux groupes infinis est arborable, alors chacun est moyennable.*

Le théorème suivant le généralise et permet de répondre à des questions de R. Lyons, Y. Peres, O. Schramm ou Y. Shalom.

Théorème 8.6 [Gab01] *Si, sur un groupe non moyennable Γ de type fini, les seules fonctions harmoniques à somme de Dirichlet finie sont les constantes, alors aucune action de Γ n'est arborable. C'est en particulier le cas des réseaux de $SO(3, 1)$.*

En effet l'hypothèse faite sur Γ équivaut à la nullité de $\beta_1(\Gamma)$ (voir [BV97]). Et le corollaire 5.11 permet de conclure (voir aussi proposition 5.17 et la remarque avant la question 6.20).

R. Lyons a aussi introduit une notion de groupe *presque arborable* (communication personnelle) qui se ramène à celle de groupe *approximativement de dimension 1*. On peut répondre à certaines questions de R. Lyons ou Y. Peres, notamment le groupe $\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_2$ n'est pas approximativement arborable. Et, plus généralement, si Γ est approximativement arborable, alors tous ses nombres de Betti $\beta_i(\Gamma)$ sont nuls pour $i \geq 2$ (exemple 7.11).

8.4 Percolation de Bernoulli

Soit Γ un groupe engendré par l'ensemble fini $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, soit \mathcal{G} le graphe de Cayley correspondant, $V = \Gamma$ l'ensemble de ses sommets et E l'ensemble de ses arêtes.

Dans la percolation de Bernoulli sur \mathcal{G} , chaque arête est *présente* avec probabilité p , indépendamment. La probabilité correspondante ν_p sur l'espace $\{0, 1\}^E$, des sous-graphes de \mathcal{G} est Γ -invariante et l'action de Γ est essentiellement libre si $p \neq 0, 1$.

Un *amas* est une composante connexe du sous-graphe $\omega \in \{0, 1\}^E$. Pour tout p , le nombre d'amas infinis est constant p.s et il vaut 0, 1 ou ∞ . Lorsque p croît, de 0 à 1, cette constante va de 0 à ∞ à 1, en évitant peut-être l'infini (Häggström-Peres [HP99]).

On dit que la percolation a lieu si le sommet $* = id$ appartient à un amas infini avec une probabilité $\theta(p) > 0$. On s'intéresse aussi à la probabilité que l'amas infini soit unique et aux valeurs critiques de ces probabilités (*valeur critique de percolation* et *valeur critique d'unicité*) :

$$\begin{aligned} p_c(\mathcal{G}) &= \sup\{p : \text{il n'existe aucun amas infini pour la percolation } \nu_p\} \\ p_u(\mathcal{G}) &= \inf\{p : \text{il existe un unique amas infini pour la percolation } \nu_p\} \end{aligned}$$

On collecte quelques résultats concernant ces valeurs et on renvoie au livre de R. Lyons et Y. Peres [LP02] pour des énoncés plus généraux, leurs preuves et des références détaillées.

-La valeur de p_c dépend du système générateur de Γ , mais le fait que $p_c < 1$ ou non n'en dépend pas.

-Pour tout $d \geq 2$, $p_c(\mathbb{Z}^d) < 1$.

-Pour un groupe à croissance polynomiale, ou bien Γ est QI à \mathbb{Z} , ou bien $p_c(\Gamma) < 1$.

-Si Γ est à croissance exponentielle, alors $p_c(\Gamma) < 1$.

-Les groupes à croissance intermédiaire de Grigorchuk satisfont $p_c(\Gamma) < 1$.

-On l'ignore en général pour les groupes à croissance intermédiaire.

-Si \mathcal{G} a une infinité de bouts, alors $p_u(\mathcal{G}) = 1$.

-**Conjecture** (Benjamini-Schramm [BS96]) Si Γ est un groupe non moyennable à un bout, alors $p_u(\mathcal{G}) < 1$. Cette conjecture est montrée dans le cas du graphe de Cayley d'un groupe de présentation finie, ou d'un groupe avec la propriété (T) de Kazhdan.

-Si Γ est moyennable, alors pour tout graphe de Cayley, $p_c(\mathcal{G}) = p_u(\mathcal{G})$.

-La question de l'existence de la phase de non-unicité présente un certain intérêt :

Conjecture (Benjamini-Schramm [BS96]) Si Γ est non moyennable, alors pour tous ses graphes de Cayley $p_c(\mathcal{G}) < p_u(\mathcal{G})$.

R. Lyons a montré que la notion de coût d'un groupe pouvait être utile dans ce contexte :

Proposition 8.7 (R. Lyons) Si Γ est un groupe de type fini, de coût > 1 , alors pour tous ses graphes de Cayley \mathcal{G} , on a $p_c(\mathcal{G}) < p_u(\mathcal{G})$.

Ce sont les seuls groupes pour lesquels la conjecture est démontrée (pour tous les systèmes générateurs). Voir la section 5.4 pour des exemples de tels groupes. La preuve élémentaire qu'on en donne ci-dessous n'utilise pas, contrairement à celle de R. Lyons, la continuité de la fonction $p \mapsto \theta(p)$ en $p = p_c$. Signalons le résultat de I. Pak et T. Smirnova-Nagnibeda qui établit la conjecture pour certains systèmes générateurs : *pour tout groupe non moyennable de type fini Γ , il existe un graphe de Cayley pour lequel $p_c(\mathcal{G}) < p_u(\mathcal{G})$* [PSN00].

8.5 De la percolation aux graphages

Dans cette section, on va donner une preuve de la proposition 8.7. On commence par ramener les problèmes de percolation au problème d'un graphage variable sur un unique espace probabilisé. L'analogie probabiliste de cette construction est connu sous le nom de *couplage standard*.

On se place sur l'espace $[0, 1]^E$ au lieu de $\{0, 1\}^E$. L'action de Γ préserve la mesure μ , produit des mesures de Lebesgue sur $[0, 1]$ et est essentiellement libre.

La projection

$$\Pi_p : [0, 1]^E \rightarrow \{0, 1\}^E$$

définie par

$$\begin{aligned} \Pi_p(\bar{\omega})(e) &= 1 & \text{si } \bar{\omega}(e) \leq p \\ \Pi_p(\bar{\omega})(e) &= 0 & \text{si } \bar{\omega}(e) > p \end{aligned}$$

est Γ -équivariante et préserve la mesure : $\Pi_p(\mu) = \nu_p$.

Soient e_1, e_2, \dots, e_n les arêtes issues du point $* = id$ associées aux générateurs, *i.e.* $e_i = [id, s_i]$. Appelons Φ^p le graphage donné par les φ_i définis sur $A_i^p = \{\bar{\omega} \in [0, 1]^E : \bar{\omega}(e_i) \leq p\}$ par

$$\begin{aligned} \varphi_i : A_i^p &\rightarrow B_i \\ \bar{\omega} &\mapsto s_i^{-1}(\bar{\omega}) \end{aligned} ,$$

\mathcal{R}^p la relation engendrée par Φ^p et $\mathcal{R}_\Gamma = \mathcal{R}^1$ la relation donnée par l'action de Γ .

À nouveau, la Γ -orbite d'un point $\bar{\omega} \in [0, 1]^E$ se décompose en différentes \mathcal{R}^p -classes, le graphage Φ^p définit une structure de graphe (non connexe en général) $\widetilde{\Phi^p}[\bar{\omega}]$ sur l'ensemble de sommets $\Gamma \cdot \bar{\omega}$ et le graphe $\widetilde{\Phi^p}[\bar{\omega}]$ pointé en $\bar{\omega}$ s'identifie au graphe $\Pi_p(\bar{\omega})$ pointé en id .

Soit U_p le borélien des $\bar{\omega}$ dont la Φ^p -orbite est infinie. Son image par Π_p est l'ensemble des sous-graphes de \mathcal{G} pour lesquels id appartient à un amas infini. Dire que $p > p_c$ signifie alors que U_p est de mesure > 0 . Dire que $p > p_u$ signifie exactement que chaque Γ -orbite ne rencontre U_p qu'en une seule \mathcal{R}^p -classe, *i.e.* sur U_p les Φ^p -orbites sont complètes : $\mathcal{R}_{|U_p}^p = \mathcal{R}_{\Gamma|U_p}$.

Preuve de la proposition 8.7. Soit $p \geq p_c$. Puisque U_p est \mathcal{R}^p invariant, les restrictions ψ_i^p de φ_i^p à $\{\bar{\omega} \in [0, 1]^E : p_c < \bar{\omega}(e_i) \leq p\}$ respectent U_p : ils fixent U_p ainsi que son complémentaire. Ainsi, la relation restreinte $\mathcal{R}_{|U_p}^p$ est engendrée à partir de $\mathcal{R}_{|U_p}^{p_c}$ en ajoutant les générateurs $\psi_i^p|_{U_p}$; le domaine de chacun d'eux est de mesure $\leq \min(\mu(U_p), p - p_c)$. Alors les coûts normalisés (*i.e.* calculés avec la mesure $\mu' = \mu/\mu(U_p)$, de sorte que U_p soit de probabilité) vérifient

$$\mathcal{C}(\mathcal{R}_{|U_p}^p) \leq \mathcal{C}(\mathcal{R}_{|U_p}^{p_c}) + n \cdot \frac{\min(\mu(U_p), p - p_c)}{\mu(U_p)}.$$

Lorsque $p > p_u$, les orbites de $\mathcal{R}_{|U_p}^p$ sont complètes, alors

$$\mathcal{C}(\Gamma) - 1 \leq \mu(U_p)[\mathcal{C}(\mathcal{R}_{|U_p}^p) - 1].$$

On en déduit que $\mathcal{C}(\Gamma) - 1 \leq \mu(U_p)[\mathcal{C}(\mathcal{R}_{|U_p}^{p_c}) - 1] + n \cdot \min(\mu(U_p), p - p_c)$. Mais \mathcal{R}^{p_c} étant hyperfinie, $\mathcal{C}(\mathcal{R}_{|U_p}^{p_c}) \leq 1$. Donc pour tout $p \geq p_u$,

$$\mathcal{C}(\Gamma) - 1 \leq n \cdot \min(\mu(U_p), p - p_c).$$

Ce qui permet de conclure. ■

9 Liens avec la théorie des ensembles, relations d'équivalence boréliennes

Les relations d'équivalence sont aussi étudiées du point de vue borélien, c'est-à-dire sans mesure ni invariante ni quasi-invariante. Pour introduire le sujet, on a extrait avec l'autorisation de l'auteur (A. Kechris) quelques passages de [Kec00].

De façon générale, un problème de classification consiste en une famille \mathcal{X} d'objets "effectifs" et une relation d'équivalence. Ce peut être les groupes de type fini (donnés comme les sous-groupes distingués des groupes libres \mathbf{F}_p) à isomorphisme près, les variétés (atlas) à isomorphisme près, les actions préservant une probabilité à équivalence orbitale près. Un invariant consiste en un ensemble I et une application $i : \mathcal{X} \rightarrow I$ telle que $x\mathcal{E}y \Rightarrow i(x) = i(y)$. Pour que cela ait un intérêt, il faut que I et i soient aussi explicites et concrets que possible (il n'est pas question de coder par l'espace quotient \mathcal{X}/\mathcal{E}). Bien souvent l'espace \mathcal{X} est muni d'une structure borélienne et \mathcal{E} est une relation d'équivalence borélienne sur \mathcal{X} .

La notion suivante est à la base de l'étude des invariants possibles pour ces relations d'équivalence.

Soient E et F deux relations d'équivalence boréliennes sur des espaces boréliens standards X et Y . On dit que E est *boréliennement réductible* à F (noté $E \leq_B F$) s'il existe une application borélienne $f : X \rightarrow Y$ telle que

$$xEy \Leftrightarrow f(x)Ff(y).$$

Intuitivement, cela signifie que les problèmes de classification pour E est au plus aussi compliqué que celui pour F puisque tout invariant pour F en donne aussi un pour E . On peut dire aussi qu'il s'agit d'une version faible de l'équivalence orbitale stable (définition 4.2), où l'un des borélien ne rencontrerait pas nécessairement toutes les orbites. On écrit aussi

$$E \sim_B F \Leftrightarrow E \leq_B F \ \& \ F \leq_B E.$$

Cela signifie intuitivement que E et F ont des problèmes de classification de même complexité. Une autre façon de comprendre le sens de $E \leq_B F$ consiste à dire que cela exprime simplement le fait qu'il existe un plongement de l'espace quotient X/E dans Y/F qui est borélien au sens où il admet un relevé borélien de X dans Y . Ainsi $E \leq_B F$ signifie que X/E est de "cardinalité borélienne" inférieure ou égale à celle de Y/E .

Parmi les relations d'équivalence boréliennes à *classes dénombrables*, il en existe une maximale pour $E \leq_B F$ (cf. [JKL02]), notée E_∞ et nommée *universelle*. Une de ses réalisations est donnée par la relation d'équivalence engendrée par l'action de \mathbf{F}_2 sur ses parties. On peut maintenant donner un sens au fait qu'il n'y a pas de classification raisonnable des groupes de type fini, à isomorphisme près. Dans les années 90, C. Champetier a montré dans sa thèse que cet espace quotient est non borélien puisqu'il contient l'espace quotient de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ par le décalage (voir [Cha00]). S. Thomas et B. Velickovic ont montré à quel point la situation est dramatique : cette relation d'équivalence est en fait universelle [TV99].

Lorsqu'on considère des relations d'équivalence boréliennes à *classes dénombrables*, les notions qu'on a introduites de graphages, arborages, dimension géométrique et de dimension approximative se généralisent immédiatement à ce nouveau contexte. On trouve en particulier des travaux concernant l'arborabilité (voir par exemple [JKL02]). Plusieurs résultats de A. Kechris [Kec01b] admettent des démonstrations indépendantes en utilisant [Gab01].

Avec S. Jackson, A. Kechris et A. Louveau, nous avons montré :

Théorème 9.1 [JKL02] *Toute relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables possède un graphage localement fini*⁴.

Si une relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables est arborable, alors elle possède un arborage localement fini.

En revanche, puisque le coût de \mathbf{F}_∞ est infini, on ne peut pas imposer une borne uniforme sur la valence. Nous avons d'abord obtenu ce théorème en combinant le résultat analogue lorsqu'il n'y a

⁴au sens où, en chaque sommet du graphe de Cayley de chaque orbite, la valence est finie

aucune mesure invariante ([JKL02]) et le cas où une mesure est quasi-préservée, que j’avais obtenu précédemment, et en “recollant les morceaux”. Par la suite, j’ai obtenu une démonstration plus directe en utilisant une méthode de marqueurs (voir [Gab02a] et [JKL02] où elle est reproduite).

G. Hjorth a montré [Hjo01, Cor. 5.3] le théorème suivant. *Soient $\Gamma = (\mathbf{F}_2)^N \times \mathbb{Z}$ et $\Lambda = (\mathbf{F}_2)^M \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ deux groupes agissant librement en préservant la mesure de probabilité respectivement sur des espaces boréliens standards (X, μ) et (Y, ν) , de sorte que \mathbb{Z} agisse ergodiquement sur (X, μ) . Si $E_\Gamma^X \leq E_\Lambda^Y$, alors $M \geq N$. Il m’a demandé si on pouvait le déduire de mon travail. On peut effectivement l’obtenir en spécialisant l’énoncé que voici. Les techniques de preuves sont très différentes.*

Théorème 9.2 [Gab02d] *Soient Γ et Λ deux groupes dénombrables, E_Γ^X et E_Λ^Y deux relations d’équivalence boréliennes données par des actions libres de Γ et Λ sur des espaces boréliens standards X et Y . Supposons que E_Γ^X possède une mesure de probabilité invariante⁵ et $E_\Gamma^X \leq E_\Lambda^Y$, alors*

$$\text{approx-dim}(\Gamma) \leq \text{approx-dim}(\Lambda).$$

⁵On ne fait pas cette hypothèse sur E_Λ^Y

10 Liens avec la théorie des algèbres de von Neumann

10.1 Introduction

Dans leurs articles fondateurs, F. Murray et J. von Neumann donnent deux constructions de facteurs de type II_1 .

La plus simple, apparaît dans [MvN43, sect. 5.3, pp.787-793]. F. Murray et J. von Neumann la présentent comme une simplification d'une construction antérieure qu'on rappellera ci-dessous. Soit Γ un groupe dénombrable discret. Considérons $\ell^2(\Gamma)$, l'espace de Hilbert des fonctions sur Γ à valeurs réelles de carré sommable, $\xi = \sum_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma \gamma$, et les représentations régulières gauche et droite de Γ données respectivement par $\lambda(\gamma')(\xi) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma \gamma' \gamma$ et $\rho(\gamma')(\xi) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma \gamma (\gamma')^{-1}$. L'algèbre de von Neumann (on disait alors *ring of operators*) du groupe Γ est par définition l'algèbre $N(\Gamma) = \lambda(\Gamma)''$ engendrée par $\lambda(\Gamma)$. Sa commutante est l'algèbre $\lambda(\Gamma)' = \rho(\Gamma)''$ engendrée par $\rho(\Gamma)$. La trace de Kaplansky sur $\mathbb{R}\Gamma$ s'étend en une trace finie fidèle normale, la *trace standard* sur $N(\Gamma)$ donnée par $\tau(a) = (a(1), 1)$, où 1 est la fonction caractéristique de l'élément neutre du groupe. Cette algèbre est un facteur si et seulement si Γ est à classes de conjugaison infinies (CCI).

L'autre construction, connue sous le nom de *group measure space construction* est l'algèbre de von Neumann associée à une action libre d'un groupe dénombrable sur un espace borélien préservant une classe de mesure, introduite par Murray et von Neumann dans [MvN36, part IV, pp.192–209]. Dans ce cas d'une action libre α de Γ préservant la mesure μ , la relation $\mathcal{R} \subset X \times X$ n'est autre que la réunion dénombrable des graphes des automorphismes $\alpha(\gamma)$, chacun d'eux pouvant être équipé d'une copie de μ grâce à la projection $\pi : \mathcal{R} \rightarrow X$ sur la première coordonnée. On obtient ainsi une mesure ν sur \mathcal{R} . On dispose sur $L^2(\mathcal{R}, \nu)$ d'une part de projecteurs orthogonaux $p_A : L^2(\mathcal{R}, \nu) \rightarrow L^2(\pi^{-1}(A), \nu)$, pour A borélien de X , et d'autre part des opérateurs unitaires définis par l'action de Γ sur la première coordonnée X . L'algèbre de von Neumann engendrée par cette famille d'opérateurs, *i.e.* la bi-commutante de cette famille, est l'algèbre de von Neumann de $M_{\mathcal{R}_\alpha}$. C'est un invariant d'équivalence orbitale.

W. Krieger s'est affranchi de l'hypothèse que l'action est libre [Kri70]. Enfin Feldman et Moore ont étudié cette algèbre de von Neumann $M_{\mathcal{R}}$ associée à une relation d'équivalence dénombrable standard \mathcal{R} préservant la classe de μ [FM77b], voir aussi [Moo82]. Cette algèbre combine les aspects espace mesuré, puisqu'elle contient $L^\infty(X, \mu)$ comme sous-algèbre, et les aspects dynamiques de la relation d'équivalence. Les propriétés de la relation se traduisent en termes de l'algèbre ou en termes de la paire algèbre/sous-algèbre de Cartan. Ainsi $M_{\mathcal{R}}$ est un facteur si et seulement si \mathcal{R} est ergodique et elle possède une trace finie fidèle normale τ si et seulement s'il existe une mesure de probabilité invariante dans la classe de μ . Lorsque ces deux conditions sont remplies, c'est un facteur de type II_1 . La trace est alors unique modulo normalisation, reflétant le fait que dans une classe de mesures ergodiques il existe au plus une mesure invariante de probabilité. Insistons sur le fait que l'algèbre abélienne $L^\infty(X, \mu)$ apparaît comme une sous-algèbre abélienne maximale A de $M_{\mathcal{R}}$. Son normalisateur, défini comme le groupe des unitaires u de $M_{\mathcal{R}}$ tels que $uAu^* = A$, engendre le facteur $M_{\mathcal{R}}$. Ces propriétés font de A une *sous-algèbre de Cartan* de $M_{\mathcal{R}}$.

Inversement, Feldman et Moore ont montré qu'à la donnée d'une paire (M, A) algèbre de von Neumann/sous-algèbre de Cartan, il correspond une relation d'équivalence $\mathcal{R}_{(M,A)}$ sur (X, μ) , qui est ergodique et préserve la probabilité si M est un facteur de type II_1 .

Il fut un temps où l'on aurait pu croire que la théorie des facteurs de type II_1 et celle des relations d'équivalence standards préservant la mesure et ergodiques étaient équivalentes : jusqu'à la découverte par A. Connes et V. Jones [CJ82] d'un facteur de type II_1 avec deux sous-algèbres de Cartan A_1 et A_2 foncièrement distinctes puisque les relations d'équivalence correspondantes $\mathcal{R}_{(M,A_1)}$ et $\mathcal{R}_{(M,A_2)}$ ne sont pas isomorphes. Notons que ces relations ont tous leurs nombres de Betti ℓ^2 nuls et coût 1.

Plus frappant encore, D. Voiculescu a montré, en utilisant sa théorie de l'*entropie libre*, que l'algèbre de von Neumann $N(\mathbf{F}_n)$ du groupe libre ($n \geq 2$) n'admet aucune sous-algèbre de Cartan [Voi96]. On renvoie au Séminaire Bourbaki de P. Biane [Bia01] pour une excellente introduction aux probabilités libres. Malgré les progrès récents dans la théorie des facteurs de type II_1 , il reste

de nombreuses questions difficiles, parmi lesquelles :

Question 10.1 *Les facteurs $N(\mathbf{F}_p)$ des groupes libres de rangs distincts ($p > 1$) sont-ils deux à deux non isomorphes ?*

*Les facteurs de la forme $[N(\mathbf{F}_m) \otimes N(\mathbf{F}_n)] * N(\mathbf{F}_k)$ pour différentes valeurs de k et $(m-1)(n-1)$ (avec $m, n, k > 1$) sont-ils deux à deux non isomorphes ?*

F. Rădulescu [Răd94] a montré que soit les facteurs $N(\mathbf{F}_p)$ sont deux à deux non isomorphes, soit ils sont tous isomorphes entre eux.

On voit bien que notre corollaire 6.16, qui est le premier à distinguer les actions de ces divers groupes $\mathbf{F}_p, (\mathbf{F}_m \times \mathbf{F}_n) * \mathbf{F}_k$, loin d'apporter une réponse, est tout de même encourageant.

10.2 Des invariants pour les facteurs ?

Les invariants de relations d'équivalence \mathcal{R} qu'on a pu considérer, tels que le coût, les nombres de Betti ℓ^2 , la dimension géométrique, la dimension approximative, sont des invariants de paires algèbre de von Neumann/sous-algèbre de Cartan.

Question 10.2 *Pourraient-ils être en fait des invariants de l'algèbre de von Neumann $M_{\mathcal{R}}$?*

Lors d'une conférence au MSRI en 2001, A. Connes a proposé un programme dans ce sens [Co01], et plus généralement dans le sens d'une notion de nombres de Betti ℓ^2 pour les facteurs.

D'une certaine façon, un premier pas a été franchi par S. Popa qui a introduit dans [Pop01] une classe de facteurs de type II_1 , notée \mathcal{HT} , auxquels on peut associer de manière non équivoque une relation d'équivalence \mathcal{R} . Ce sont des facteurs qui contiennent des sous-algèbres abéliennes maximales A remarquables, qui sans nécessairement être de Cartan ont un normalisateur qui engendrent un facteur $M_A \subset M$, et telles surtout que la paire $A \subset M$ combine des propriétés antagonistes de rigidité dans l'esprit de la propriété (T) de D. Kazhdan [Kaz67] (voir A. Connes-V. Jones [CJ85]) et une propriété d'approximation compacte dans l'esprit de U. Haagerup [Haa79].

Exemple 10.3 [Pop01] *L'exemple typique est donné par l'algèbre de von Neumann $N(\Gamma)$ du groupe $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, où le sous-groupe \mathbb{Z}^2 fournit la sous-algèbre abélienne A . Que ce facteur appartienne à \mathcal{HT} provient du fait que la paire $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2 \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ a la propriété (T) relative (de [HV89]) et que le groupe $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ a la propriété de Haagerup (aussi connue sous le nom de a-T-menability, voir [CCJJV01]). C'est aussi le facteur donné par la group measure space construction associé à l'action naturelle de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ sur le tore \mathbb{T}^2 .*

S. Popa a montré que tout isomorphisme entre facteurs $M \in \mathcal{HT}$ envoie les sous-algèbres remarquables A l'une sur l'autre, modulo automorphismes intérieurs. Ainsi une telle sous-algèbre A est essentiellement unique et au facteur $M \in \mathcal{HT}$ peut-on associer l'unique relation d'équivalence \mathcal{R}_M définie par la paire $A \subset M_A$. Les invariants de \mathcal{R}_M deviennent des invariants de M . En particulier, on peut définir les nombres de Betti ℓ^2 de $M \in \mathcal{HT}$ par $\beta_p(M) := \beta_p(\mathcal{R}_M)$.

Le groupe fondamental d'un facteur de type II_1 a été défini par F. Murray et J. von Neumann [MvN43, 2.10, p.741] comme $\mathcal{F}(M) := \{t > 0 : M^t \simeq M\}$. C'est un sous-groupe de \mathbb{R}^{+*} . Disons simplement ici que pour $t \in]0, 1]$, M^t désigne l'algèbre de von Neumann (bien définie à isomorphisme près) pMp où $p \in M$ est un projecteur de trace t . Ils observent alors que dans chacun des exemples qu'ils sont parvenus à traiter, ils obtiennent \mathbb{R}^{+*} tout entier. Les premiers facteurs pour lesquels $\mathcal{F}(M) \neq \mathbb{R}^{+*}$ ont été découverts par A. Connes [Co80] ; ils font intervenir la propriété (T) et leurs groupes fondamentaux sont dénombrables sans qu'on réussisse à les déterminer explicitement. En observant que $M^t \in \mathcal{HT}$ dès lors que $M \in \mathcal{HT}$, S. Popa obtient grâce au théorème 6.11 que $\beta_p(M^t) = \frac{\beta_p(M)}{t}$, donc :

Théorème 10.4 [Pop01] *Si $M \in \mathcal{HT}$ et si l'un des $\beta_p(\mathcal{R}_M)$ est $\neq 0, \infty$, alors le groupe fondamental $\mathcal{F}(M)$ est trivial.*

Dans l'exemple ci-dessus, on peut évaluer, grâce au théorème 6.9 le p -ième nombre de Betti ℓ^2 $\beta_p(N(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))) = \beta_p(\mathcal{R}_{(\mathbb{T}^2, \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))})$. On obtient $\beta_p(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$, non nul pour $p = 1$. Ainsi, $N(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$ fournit le premier exemple de facteur de type II_1 à groupe fondamental trivial.

De plus, la classe \mathcal{HT} est fermée pour les produits tensoriels et le calcul des nombres de Betti ℓ^2 montre pour $M = N(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$ que les produits tensoriels $M^{t_1} \otimes M^{t_2} \otimes \dots \otimes M^{t_n}$ et $M^{s_1} \otimes M^{s_2} \otimes \dots \otimes M^{s_m}$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$ et $t_1 t_2 \dots t_n = s_1 s_2 \dots s_m$. En particulier, tous les produits tensoriels $M^{\otimes n}$, $n = 1, 2, \dots$ sont deux à deux non isomorphes. Les premiers exemples de facteurs avec cette dernière propriété ont été obtenus par A. Connes [Co79].

D. Voiculescu [Voi94] a introduit la notion de dimension entropique libre d'un n -uplet d'opérateurs auto-adjoints (X_1, X_2, \dots, X_d) d'un facteur de type II_1 . C'est un nombre qui, dans tous les cas où il a pu être calculé, dans le facteur $N(\Gamma)$ d'un groupe Γ , sur un n -uplet associé à un système générateur de Γ , est égal au coût du groupe Γ et à son premier nombre de betti $\ell^2 - 1$. Cette coïncidence numérique est loin d'être expliquée, malgré un premier pas effectué par D. Shlyakhtenko [Sh199b].

Partie III

Travaux et publications

- [GLP94] D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin. *Pseudogroups of isometries of \mathbb{R} and Rips' theorem on free actions on \mathbb{R} -trees*, Israel J. Math. **87** (1994) 403-428.
- [GLP95] D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin. *Pseudogroups of isometries of \mathbb{R} and reconstruction of free actions on \mathbb{R} -trees*, Erg. Theo. Dyn. Sys. **15** (1995) 633-652.
- [GL95] D. Gaboriau, G. Levitt. *The rank of actions on \mathbb{R} -trees*, Ann. Scien. Ec. Norm. Sup. (4) **28** (1995) 549-570.
- [Gab96] D. Gaboriau. *Dynamique des systèmes d'isométries : sur les bouts des orbites*, Invent. Math. **126** (1996) 297-318.
- [Gab97] D. Gaboriau. *Générateurs indépendants pour les systèmes d'isométries de dimension un*, Ann. Inst. Fourier. **47** (1997) 101-122.
- [GLL98] D. Gaboriau, G. Levitt, M. Lustig. *A dendrological proof of the Scott conjecture for automorphisms of free groups*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **41** (1998) 325-332
- [GJLL98] D. Gaboriau, A. Jägger, G. Levitt, M. Lustig. *An Index for counting fixed points of automorphisms of free groups*, Duke Math. J. (3) **93** (1998) 425-452.
- [Gab98] D. Gaboriau. *Mercuriale de groupes et de relations*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. (2) **326** (1998) 219-222.
- [Gab00a] D. Gaboriau. *Coût des relations d'équivalence et des groupes*, Invent. Math., (1) **139** (2000) 41-98.
- [Gab00b] D. Gaboriau. *Sur la (co-)homologie L^2 des actions préservant une mesure*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., (5) **330** (2000) 365-370.
- [GP01] D. Gaboriau, F. Paulin. *Sur les immeubles hyperboliques*, Geom. Dedi., **88** (2001) 153-197.
- [Gab01] D. Gaboriau. *Invariants L^2 des relations d'équivalence et de groupes*, Prépublication Ens-Lyon, 286 (2001), à paraître, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.
- [Gab02] D. Gaboriau. *On orbit equivalence of measure preserving actions*, à paraître dans *Rigidity in Geometry and Dynamics*, (2002) Burger, Iozzi Ed., Springer-Verlag.
- [BG02] N. Bergeron, D. Gaboriau *Asymptotique des nombres de Betti dans les tours de revêtements finis*, en préparation.
- [Gab02a] D. Gaboriau *LF-graphings*, en préparation.
- [Gab02b] D. Gaboriau *Théorie de Bass-Serre pour les groupoïdes mesurés discrets*, en préparation.
- [Gab02c] D. Gaboriau *Équivalence mesurable entre groupes discrets*, en préparation.
- [Gab02d] D. Gaboriau, en préparation.

Partie IV

Bibliographie

- [AB87] R. Alperin, H. Bass. Length functions of group actions on Λ -trees. In *Combinatorial group theory and topology (Alta, Utah, 1984)*, pages 265–378. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987.
- [Ada90] S. Adams. Trees and amenable equivalence relations. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 10(1):1–14, 1990.
- [AL91] S. Adams, R. Lyons. Amenability, Kazhdan’s property and percolation for trees, groups and equivalence relations. *Israel J. Math.*, 75(2-3):341–370, 1991.
- [All48] A. Allais. *Contes et chroniques*. Henri Defontaine, Rouen, 1948.
- [AS90] S. Adams, R. Spatzier. Kazhdan groups, cocycles and trees. *Amer. J. Math.*, 112(2):271–287, 1990.
- [AS92] U. Abresch, V. Schroeder, Graph manifolds, ends of negatively curved manifolds and the hyperbolic 120-cell space, *J. Diff. Geom.*, 35:299-336, 1992.
- [Ati76] M. Atiyah. Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras. In *Colloque “Analyse et Topologie” en l’Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*, pages 43–72. *Astérisque, SMF*, No. 32–33. Soc. Math. France, Paris, 1976.
- [AY81] P. Arnoux, J.-C. Yoccoz. Construction de difféomorphismes pseudo-Anosov. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292(1):75–78, 1981.
- [BCH94] P. Baum, A. Connes, N. Higson. Classifying space for proper actions and K -theory of group C^* -algebras. In *C^* -algebras: 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993)*, pages 240–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Bes99] M. Bestvina \mathcal{R} -trees in topology, geometry, and group theory. <http://www.math.utah.edu/~bestvina/eprints/handbook.ps>
- [BF92] M. Bestvina and M. Feighn. Outer limits. *Prépublication*, 1992.
- [BF95] M. Bestvina, M. Feighn. Stable actions of groups on real trees. *Invent. Math.*, 121(2):287–321, 1995.
- [BH92] M. Bestvina, M. Handel. Train tracks and automorphisms of free groups. *Ann. of Math. (2)*, 135(1):1–51, 1992.
- [BH99] M.R. Bridson, A. Haefliger. *Metric spaces with non-positive curvature*. Grund. math. Wiss., 319, Springer Verlag, 1999.
- [Bia01] P. Biane. Entropie libre et algèbres d’opérateurs, *Astérisque, SMF*, No. 889, Séminaire Bourbaki (juin 2001), à paraître.
- [Bla01] E. Blanc. Propriétés génériques des laminations. *Thèse de l’IGD (Lyon)*, 2001.
- [Bor85] A. Borel. The L^2 -cohomology of negatively curved Riemannian symmetric spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 10:95–105, 1985.
- [Bou68] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie*. chap. 4,5,6, Hermann, Paris, 1968.
- [Bou97] M. Bourdon. Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow. *GAF*, 7:245-268, 1997.

- [Bou02] M. Bourdon. Sur les immeubles fuschiens et leur type de quasi-isométrie. À paraître dans *Erg. Theo. Dyn. Syst.*
- [Bow93] B. Bowditch. Discrete parabolic groups. *J. Diff. Geom.*, 38:559-583, 1993.
- [Bow95] B. Bowditch. Geometrical finiteness with variable negative curvature. *Duke Math. J.*, 77:229-274, 1995.
- [Bro82] K. Brown. *Cohomology of groups*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Bro89] K. Brown. *Buildings*. Springer Verlag, 1989.
- [Bru26] F. Brunot. *La pensée et la langue*. Masson, 1926.
- [BLPS99a] I. Benjamini, R. Lyons, Y. Peres, O. Schramm. Group-invariant percolation on graphs. *Geom. Funct. Anal.*, 9(1):29-66, 1999.
- [BLPS99b] I. Benjamini, R. Lyons, Y. Peres, O. Schramm. Critical percolation on any nonamenable group has no infinite clusters. *Ann. Probab.*, 27(3):1347-1356, 1999.
- [BLPS01] I. Benjamini, R. Lyons, Y. Peres, O. Schramm. Uniform spanning forests. *Ann. Probab.*, 29(1):1-65, 2001.
- [BLS99] I. Benjamini, R. Lyons, O. Schramm. Percolation perturbations in potential theory and random walks. In *Random walks and discrete potential theory (Cortona, 1997)*, pages 56-84. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [BS96] I. Benjamini, O. Schramm. Percolation beyond \mathbb{Z}^d , many questions and a few answers. *Electron. Comm. Probab.*, 1:no. 8, 71-82 (electronic), 1996.
- [BS97] W. Ballmann, J. Swiatkowski. On L^2 -cohomologie and property (T) for automorphism groups of polyedral cell complexes. *GAF*, 7:615-645, 1997.
- [Bug84] V. Bugaenko. Groups of automorphisms of unimodular hyperbolic quadratic forms over the ring $\mathbb{Z}[(\sqrt{5} + 1)/2]$. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 39:6-14, 1984.
- [BV97] M. Bekka, A. Valette. Group cohomology, harmonic functions and the first L^2 -Betti number. *Potential Anal.*, 6(4):313-326, 1997.
- [CCJJV01] P.-A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg, A. Valette. *Groups with the Haagerup property*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. Gromov's a-T-menability.
- [CFW81] A. Connes, J. Feldman, B. Weiss. An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 1(4):431-450 (1982), 1981.
- [CG86] J. Cheeger, M. Gromov. L_2 -cohomology and group cohomology. *Topology*, 25(2):189-215, 1986.
- [Cha00] C. Champetier. L'espace des groupes de type fini. *Topology*, 39(4):657-680, 2000.
- [Chi01] I. Chiswell *Introduction to Λ -trees*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001.
- [CJ82] A. Connes, V. Jones. A II_1 factor with two nonconjugate Cartan subalgebras. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(2):211-212, 1982.
- [CJ85] A. Connes, V. Jones. Property T for von Neumann algebras. *Bull. London Math. Soc.*, 17(1):57-62, 1985.
- [CL95] M. M. Cohen, M. Lustig. Very small group actions on \mathbb{R} -trees and Dehn twist automorphisms. *Topology*, 34(3):575-617, 1995.
- [CM87] M. Culler, J. W. Morgan. Group actions on \mathbb{R} -trees. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 55(3):571-604, 1987.

- [Co79] A. Connes. Sur la théorie non commutative de l'intégration. In *Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978)*, pages 19–143. Lect. Notes 725. Springer, Berlin, 1979.
- [Co80] A. Connes. A factor of type II_1 with countable fundamental group. *J. Operator Theory*, 4(1):151–153, 1980.
- [Co82] A. Connes. A survey of foliations and operator algebras. In *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, pages 521–628. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.
- [Co01] A. Connes. Factors and Geometry. In *29th Canadian Symp. on Operator Algebras MSRI*, conférence 1er mai 2001.
<http://www.msri.org/publications/ln/msri/2001/canadian-opalg/connes/1/index.html>
- [Coo87] D. Cooper. Automorphisms of free groups have finitely generated fixed point sets. *J. Algebra*, 111(2):453–456, 1987.
- [CT97] C. Charitos, G. Tsapongas. Geodesic flow on ideal polyedra. *Can. J. Math.*, 49:696–707, 1997.
- [CV86] M. Culler, K. Vogtmann. Moduli of graphs and automorphisms of free groups. *Invent. Math.*, 84(1):91–119, 1986.
- [CV91] M. Culler, K. Vogtmann. The boundary of outer space in rank two. In *Arboreal group theory (Berkeley, CA, 1988)*, pages 189–230. Springer, New York, 1991.
- [CZ89] M. Cowling, R. Zimmer. Actions of lattices in $Sp(1, n)$. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 9(2):221–237, 1989.
- [Dav98] M. Davis. *Buildings are CAT(0)*. In “Geometry and cohomology in group theory”, P. Kropholler et al (ed.), Lond. Math. Soc. Lect. Notes Ser. 252, Camb. Univ. Press. 108–123, 1998.
- [Dix69] J. Dixmier. *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*. Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1969. Deuxième édition, revue et augmentée, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXV.
- [DN90] C. Danthony, A. Nogueira. Measured foliations on nonorientable surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 23(3):469–494, 1990.
- [DP96] F. Dal'bo, M. Peigné. Géodésiques fermées et pointes en courbure variable. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, 322:939–944, 1996.
- [Dye59] H. Dye. On groups of measure preserving transformation. I. *Amer. J. Math.*, 81:119–159, 1959.
- [Dye63] H. Dye. On groups of measure preserving transformations. II. *Amer. J. Math.*, 85:551–576, 1963.
- [Eck45] B. Eckmann. Harmonische Funktionen und Randwertaufgaben in einem Komplex. *Comment. Math. Helv.*, 17:240–255, 1945.
- [Eck00] B. Eckmann. Introduction to l_2 -methods in topology: reduced l_2 -homology, harmonic chains, l_2 -Betti numbers. *Israel J. Math.*, 117:183–219, 2000. Notes prepared by Guido Mislin.
- [Ele97] G. Elek. Betti numbers and Euler's formula for combinatorial foliations. *Manuscripta Math.*, 92(2):239–247, 1997.
- [Far98] Michael Farber. Geometry of growth: approximation theorems for L^2 invariants. *Math. Ann.*, 311(2):335–375, 1998.
- [FLP79] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Société Mathématique de France, Paris, 1979. Séminaire Orsay, With an English summary.

- [FM77a] J. Feldman, C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 234(2):289–324, 1977.
- [FM77b] J. Feldman, C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 234(2):325–359, 1977.
- [FSZ89] J. Feldman, C. Sutherland, R. Zimmer. Subrelations of ergodic equivalence relations. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 9(2):239–269, 1989.
- [Fur99a] A. Furman. Gromov’s measure equivalence and rigidity of higher rank lattices. *Ann. of Math. (2)*, 150(3):1059–1081, 1999.
- [Fur99b] A. Furman. Orbit equivalence rigidity. *Ann. of Math. (2)*, 150(3):1083–1108, 1999.
- [GG88] S. L. Gefter, V. Ya. Golodets. Fundamental groups for ergodic actions and actions with unit fundamental groups. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 24(6):821–847 (1989), 1988.
- [GH90] E. Ghys, P. de la Harpe, eds. *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*. Prog. in Math., 83, Birkhäuser, 1990.
- [Ghy88] É. Ghys. Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional foliations. *J. Funct. Anal.*, 77(1):51–59, 1988.
- [Ghy90] É. Ghys. Les groupes hyperboliques. *Astérisque, SMF*, (189-190):Exp. No. 722, 203–238, 1990. Séminaire Bourbaki, Vol. 1989/90.
- [Ghy95] É. Ghys. Topologie des feuilles génériques. *Ann. of Math. (2)*, 141(2):387–422, 1995.
- [Gro87] M. Gromov., *Hyperbolic groups*. In “Essays in group theory”, S. Gersten ed., 75-263, MSRI Pub., 8, Springer Verlag, 1987.
- [Gro93] M. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [Gru40] I. Gruschko. Über die Basen eines freien Produktes von Gruppen. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 8 (50):169–182, 1940.
- [Haa79] U. Haagerup. An example of a nonnuclear C^* -algebra, which has the metric approximation property. *Invent. Math.*, 50(3):279–293, 1978/79.
- [Hae71] A. Haefliger. Homotopy and integrability. In *Manifolds–Amsterdam 1970 (Proc. Nuffic Summer School)*, pages 133–163. Springer, Berlin, 1971.
- [Hae91] A. Haefliger. Complexes of groups and orbihedra. In “Group theory from a geometrical viewpoint” (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), 504-540 World Scientific, 1991.
- [Hag92] F. Haglund. Les polyèdres de Gromov. Thèse, ENS Lyon, 1992.
- [HP98] F. Haglund, F. Paulin. Simplicité de groupes d’automorphismes d’espaces à courbure négative. *Geometry and Topology Monographs Vol 1: The Epstein Birthday Schrift* (I. Rivin, C. Rourke, C. Series, eds), 181-248, International Press, 1998.
<http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/gtmcontents1.html>
- [Har91] P. de la Harpe, *An invitation to Coxeter groups*, dans “Group theory from a geometrical viewpoint ” (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), 193-253, World Scientific, 1991.
- [Har00] P. de la Harpe. *Topics in geometric group theory*. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.
- [HP99] O. Häggström, Y. Peres. Monotonicity of uniqueness for percolation on Cayley graphs: all infinite clusters are born simultaneously. *Probab. Theory Related Fields*, 113(2):273–285, 1999.

- [HV89] P. de la Harpe, A. Valette. La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger). *Astérisque, SMF*, (175):158, 1989. With an appendix by M. Burger.
- [Hjo01] G. Hjorth. Relative ergodicity results for product groups. *manuscript*, (31/12/2001). <http://www.math.ucla.edu/greg/ergodicity.ps>
- [Hjo02] G. Hjorth. A lemma for cost attained. *manuscript*, (2002). <http://www.math.ucla.edu/greg/cost.ps>
- [HL91] J. Heitsch, C. Lazarov. Homotopy invariance of foliation Betti numbers. *Invent. Math.*, 104(2):321–347, 1991.
- [Ima79] H. Imanishi. On codimension one foliations defined by closed one-forms with singularities. *J. Math. Kyoto Univ.*, 19(2):285–291, 1979.
- [JKL02] S. Jackson, A. Kechris, A. Louveau. Countable Borel equivalence relations. À paraître dans *J. Math. Logic*.
- [Jol01] P. Jolissaint. Approximation properties for Measure Equivalent groups. *Manuscrit* (2001).
- [Kaz67] D. A. Kazhdan. On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 1:71–74, 1967.
- [Kea75] M. Keane. Interval exchange transformations. *Math. Z.*, 141:25–31, 1975.
- [Kec00] A. Kechris. On the classification problem for rank 2 torsion-free abelian groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 62(2):437–450, 2000.
- [Kec01a] A. Kechris. Lectures on costs of equivalence relations and groups. *Prépublication Caltech*, (2001). <http://www.math.caltech.edu/papers/costs14.ps>
- [Kec01b] A. Kechris. Products of the universal treeable relation. *Prépublication Caltech*, (2001). <http://www.math.caltech.edu/papers/products2.ps>
- [Kri70] W. Krieger. On constructing non- $*$ isomorphic hyperfinite factors of type III. *J. Functional Analysis*, 6:97–109, 1970.
- [Lev87] G. Levitt. 1-formes fermées singulières et groupe fondamental. *Invent. Math.*, 88(3):635–667, 1987.
- [Lev90] G. Levitt. Groupe fondamental de l'espace des feuilles dans les feuilletages sans holonomie. *J. Differential Geom.*, 31(3):711–761, 1990.
- [Lev93a] G. Levitt. La dynamique des pseudogroupes de rotations. *Invent. Math.*, 113(3):633–670, 1993.
- [Lev93c] G. Levitt. Constructing free actions on \mathbb{R} -trees. *Duke Math. J.*, 69(3):615–633, 1993.
- [Lev93b] G. Levitt. Feuilletages mesurés et arbres réels. In *Séminaire Gaston Darboux de Géométrie et Topologie Différentielle, 1991–1992 (Montpellier)*, pages 73–80. Univ. Montpellier II, Montpellier, 1993.
- [Lev95] G. Levitt. On the cost of generating an equivalence relation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15(6):1173–1181, 1995.
- [LP02] R. Lyons, Y. Peres. Probability on Trees and Networks. Livre en préparation. À paraître chez Cambridge University Press. <http://www.math.gatech.edu/rlyons/prbtree/prbtree.html>
- [LP97] G. Levitt, F. Paulin. Geometric group actions on trees. *Amer. J. Math.*, 119(1):83–102, 1997.
- [LS77] R. C. Lyndon, P. E. Schupp. *Combinatorial group theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89.

- [LS99] R. Lyons, O. Schramm. Indistinguishability of percolation clusters. *Ann. Probab.*, 27(4):1809–1836, 1999.
- [Lüc94a] W. Lück. Approximating L^2 -invariants by their finite-dimensional analogues. *Geom. Funct. Anal.*, 4(4):455–481, 1994.
- [Lüc94b] W. Lück. L^2 -torsion and 3-manifolds. In *Low-dimensional topology (Knoxville, TN, 1992)*, pages 75–107. Internat. Press, Cambridge, MA, 1994.
- [Lüc98a] W. Lück. Dimension theory of arbitrary modules over finite von Neumann algebras and L^2 -Betti numbers. I. Foundations. *J. Reine Angew. Math.*, 495:135–162, 1998.
- [Lüc98b] W. Lück. Dimension theory of arbitrary modules over finite von Neumann algebras and L^2 -Betti numbers. II. Applications to Grothendieck groups, L^2 -Euler characteristics and Burnside groups. *J. Reine Angew. Math.*, 496:213–236, 1998.
- [Lüc02a] W. Lück. L^2 -invariants of regular coverings of compact manifolds and CW-complexes. In *Handbook of Geometric topology*, pages 735–817. Elsevier 2002.
- [Lüc02b] W. Lück. L^2 -Invariants: Theory and Applications to Geometry and K-theory. À paraître, Springer.
- [Lyo90] R. Lyons. Random walks and percolation on trees. *Ann. Probab.*, 18(3):931–958, 1990.
- [Lyo98] R. Lyons. A bird’s-eye view of uniform spanning trees and forests. In *Microsurveys in discrete probability (Princeton, NJ, 1997)*, pages 135–162. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [Lyo00] R. Lyons. Phase transitions on nonamenable graphs. *J. Math. Phys.*, 41(3):1099–1126, 2000. Probabilistic techniques in equilibrium and nonequilibrium statistical physics.
- [Mak82] G. S. Makanin. Equations in a free group. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(6):1199–1273, 1344, 1982.
- [Mas82] H. Masur. Interval exchange transformations and measured foliations. *Ann. of Math. (2)*, 115(1):169–200, 1982.
- [Mei90] T. Meixner. Groups acting transitively on locally finite classical Tits Chamber systems. In “Finite geometries, buildings and related topics”, W. Kantor, R. Liebler, S. Payne, E. Shult, Oxford Univ. Press., 1990.
- [Moo82] C. C. Moore. Ergodic theory and von Neumann algebras. In *Operator algebras and applications, Part 2 (Kingston, Ont., 1980)*, pages 179–226. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.
- [Mor92] J. W. Morgan. Λ -trees and their applications. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 26(1):87–112, 1992.
- [MS91] J. W. Morgan, P. B. Shalen. Free actions of surface groups on \mathbb{R} -trees. *Topology*, 30(2):143–154, 1991.
- [MvN36] F. Murray, J. von Neumann. On rings of operators. *Ann. of Math.*, (2), 37:116–229, 1936.
- [MvN43] F. Murray, J. von Neumann. On rings of operators. IV. *Ann. of Math. (2)*, 44:716–808, 1943.
- [Neu43] B. H. Neumann. On the number of generators of a free product. *J. London Math. Soc.*, 18:12–20, 1943.
- [OW80] D. Ornstein, B. Weiss. Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 2(1):161–164, 1980.

- [Pau95] F. Paulin. Actions de groupes sur les arbres. *Astérisque, SMF*, (241):Exp. No. 808, 3, 97–137, 1997. Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96.
- [Pau97] F. Paulin. Sur les automorphismes extérieurs des groupes hyperboliques. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 30(2):147–167, 1997.
- [Pau99] F. Paulin. Propriétés asymptotiques des relations d'équivalences mesurées discrètes. *Markov Process. Related Fields*, 5(2):163–200, 1999.
- [Pop86] S. Popa. Correspondences. *Prépublication Institut National Pour la Création Scientifique et Technique*, (1986).
- [Pop01] S. Popa. On a class of type II_1 factors with Betti numbers invariants. *Prépublication UCLA*, (2001).
- [PP00] R. Pemantle, Y. Peres. Nonamenable products are not treeable. *Israel J. Math.*, 118:147–155, 2000.
- [PSN00] I. Pak, T. Smirnova-Nagnibeda. On non-uniqueness of percolation on nonamenable Cayley graphs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(6):495–500, 2000.
- [Răd94] F. Rădulescu. Random matrices, amalgamated free products and subfactors of the von Neumann algebra of a free group of noninteger index. *Invent. Math.*, 115(2):347–389, 1994.
- [Raz84] A. A. Razborov. Systems of equations in a free group. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 48(4):779–832, 1984.
- [Rem98] B. Remy. Immeubles à courbure négative et théorie de Kac-Moody. prépublication Nancy 1998.
- [Rim92] F. Rimlinger. \mathbb{R} -trees and normalization of pseudogroups. *Experiment. Math.*, 1(2):95–114, 1992.
- [Rob89] P. Robert. *Petit ROBERT 1, dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*. Les Dictionnaires LE ROBERT, 1989.
- [Ron89] M.A. Ronan. *Lectures on buildings*. Persp. Math., 7, Academic Press, 1989.
- [Sch80] K. Schmidt. Asymptotically invariant sequences and an action of $SL(2, \mathbb{Z})$ on the 2-sphere. *Israel J. Math.*, 37(3):193–208, 1980.
- [Sch87] K. Schmidt. Some solved and unsolved problems concerning orbit equivalence of countable group actions. In *Proceedings of the conference on ergodic theory and related topics, II (Georgenthal, 1986)*, pages 171–184, Leipzig, 1987. Teubner.
- [Sel97] Z. Sela. Acylindrical accessibility for groups. *Invent. Math.*, 129(3):527–565, 1997.
- [Ser77] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames, SL_2* . Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, *Astérisque, SMF*, No. 46.
- [Sha87] P. B. Shalen. Dendrology of groups: an introduction. In *Essays in group theory*, pages 265–319. Springer, New York, 1987.
- [Sha91] P. B. Shalen. Dendrology and its applications. In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 543–616. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991.
- [Shl99a] D. Shlyakhtenko. Free Fisher information with respect to a completely positive map and cost of equivalence relations. *Comm. Math. Phys.*, 218:133–152, 1999.
- [Shl99b] D. Shlyakhtenko. Microstates free entropy and cost of equivalence relations. *Prépublication*, <http://xxx.lanl.gov/abs/math.OA/9912224>.

- [Sta65] J. R. Stallings. A topological proof of Grushko's theorem on free products. *Math. Z.*, 90:1–8, 1965.
- [Sun87] V. Sunder. *An invitation to von Neumann algebras*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [Tit86] J. Tits. Ensembles ordonnés, immeubles et sommes amalgamées. *Bull. Soc. Math. Belgique, Sér. A*, 38:367–387, 1986.
- [Tit87a] J. Tits. *Building and group amalgamations*. Proc. Groups - St-Andrew 1985, Lond. Math. Soc. Lect. Notes Ser. 121, Camb. Univ. Press, pp. 110–127, 1987.
- [Tit87b] J. Tits. Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields. *J. Alg.*, 105:542–573, 1987.
- [Tuk96] P. Tukia. Conical limit points and uniform convergence groups. *Prépublication Univ. Helsinki*, 1996.
- [TV99] S. Thomas, B. Velickovic. On the complexity of the isomorphism relation for finitely generated groups. *J. Algebra*, 217(1):352–373, 1999.
- [Vee78] W. A. Veech. Interval exchange transformations. *J. Analyse Math.*, 33:222–272, 1978.
- [Ver89] A. M. Vershik. Trajectory theory. In *Dynamical systems. II*, pages 77–92. Springer-Verlag, Berlin, 1989. Ergodic theory with applications to dynamical systems and statistical mechanics, Edited and with a preface by Sinai, Translated from the Russian.
- [Vin85] E.B. Vinberg. Hyperbolic reflection groups. *Russian Math. Surv.*, 40:31–75, 1985.
- [Voi94] Dan Voiculescu. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory. II. *Invent. Math.*, 118(3):411–440, 1994.
- [Voi96] D. Voiculescu. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory. III. The absence of Cartan subalgebras. *Geom. Funct. Anal.*, 6(1):172–199, 1996.
- [Voi99] D. Voiculescu. Free entropy dimension ≤ 1 for some generators of property T factors of type II_1 . *J. Reine Angew. Math.*, 514:113–118, 1999.
- [Zim78] R. Zimmer. Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks. *J. Functional Analysis*, 27(3):350–372, 1978.
- [Zim84] R. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.