1 Exposé 1 : Actions de groupes ergodiques et relations d'équivalence

On rappelle dans cette partie un certain nombre de définitions et de résultats concernant les relations d'équivalence standard, et on renvoie à [FM77a] pour des preuves ou des références plus complètes, voir aussi [Moo82, Sch87].

Soit X un espace borélien standard de σ-algèbre $\mathcal{B}$, muni d'une mesure de probabilité μ sans atome. détailler un peu

1.1 Actions de groupe

Soit Γ un groupe dénombrable et α une action de Γ sur (X, μ) par automorphismes boréliens préservant la mesure μ. Cette action engendre la relation d'équivalence "être dans la même orbite" :

$$\mathcal{R}_\alpha = \{(x, \gamma.x) : x \in X,\ \gamma \in \Gamma\}.$$

Comme partie de $X \times X$, cette relation est simplement la réunion des graphes des automorphismes $\alpha(\gamma)$ (on note indifféremment $\alpha(\gamma)(x)$ et $\gamma.x$).
L'action du groupe Γ est **libre** si pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ et pour μ-presque tout $x \in X$, on a $\gamma.x \neq x$.
Voici quelques exemples qu'on peut avoir en tête :

Exemples 1.1 *1. L'action de $\mathbb{Z}^n$ par rotations rationnellement indépendantes sur le cercle muni de la mesure de Lebesgue.*

2. Une action d'un groupe discret préservant le volume sur une variété de volume fini.

3. $(X, \mu) = (K, \mathrm{Haar})$ est un groupe compact muni de sa mesure de Haar et Γ est un sous-groupe qui agit par multiplication.

4. L'action par décalage des indices (shift de Bernoulli) de Γ sur l'espace $X = \{0, 1\}^\Gamma$ des suites de 0 et de 1 indexées par Γ (les parties de Γ), avec n'importe quelle mesure invariante, par exemple le produit de l'équiprobabilité sur $\{0, 1\}$. cette action est libre si Γ est infini.

Question De quoi la relation $\mathcal{R}_\alpha$ se souvient-elle ?

1.2 Relations d'équivalence

La relation d'équivalence $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\alpha$ vérifie les propriétés suivantes :
1. les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sont dénombrables
2. $\mathcal{R}$ comme partie de $X \times X$ est une partie borélienne pour la tribu $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$
3. tout isomorphisme partiel $\varphi : A \to B$ dont le graphe est contenu dans $\mathcal{R}$ preserve la mesure μ.

Remarque 1.2 *Un* isomorphisme partiel $\varphi : A \to B$ *est un isomorphisme borélien entre deux parties boréliennes de X. Si son graphe est contenu dans $\mathcal{R}$,* c'est-à-dire si pour tout $x \in A$, on a $(x, \varphi(x)) \in \mathcal{R}$, *alors A admet une partition $A = \coprod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ telle que $x \in A_\gamma \Rightarrow \varphi(x) = \gamma.x$. Cela entraîne que φ préserve la mesure μ.*

Plus généralement, une **relation d'équivalence dénombrable standard préservant la mesure** μ sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ qui vérifie les trois points ci-dessus.
On supposera toujours que μ est invariante et $\mu(X) = 1$.

Exemples 1.3 *Une façon d'engendrer une relation est de se donner une famille dénombrable d'isomorphismes partiels $\Phi = \{\varphi_i : A_i \to B_i\}_{i \in I}$.*
$\mathcal{R}_\Phi$ est la plus petite relation telle que $x \sim \varphi_i(x)$ $\forall i \in I$, $x \in A_i$

Théorème 1.4 *[FM77a, th. 1] Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dénombrable standard préservant μ sur $(X, \mathcal{B})$, alors il existe un groupe dénombrable G d'automorphismes boréliens de X tel que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_G$.*

A. Furman [Fur99b] a récemment donné des exemples de relations ergodiques pour lesquelles aucun tel groupe G n'agit librement.

Des situations NATURELLES où le groupe d'automorphismes n'apparaît pas de manière évidente :

Exemples 1.5

(1) soit $Y \subset X$ une partie borélienne de X, qui rencontre toutes les orbites de $\mathcal{R}$. La relation d'équivalence induite $\mathcal{R}_Y := \mathcal{R} \cap Y \times Y$ *sur Y, dont les classes sont les restrictions des classes de $\mathcal{R}$ à Y, préserve la mesure normalisée $\mu_Y = \mu/\mu(Y)$.*

(2) Considérons une lamination mesurée minimale et choisissons une transversale totale X de mesure finie. Le pseudogroupe d'holonomie engendre une telle relation d'équivalence générale sur X, avec la mesure transverse normalisée. Elle est engendrée par les "applicxations retour". Deux points de la transversale sont dans la même classe ssi ils appartiennet à la même feuille de la lamination.

(3) Une famille dénombrable d'isomorphismes partiels $\Phi = (\varphi_i : A_i \to B_i)_{i \in I}$ engendre une relation $\mathcal{R}_\Phi$

1.3 Equivalence orbitale

Deux telles relations $\mathcal{R}_1$ sur (X_1, μ_1) et $\mathcal{R}_2$ sur (X_2, μ_2) sont **isomorphes (ou identifiées)** s'il existe deux boréliens saturés de mesure totale $X'_1 \subset X_1$ et $X'_2 \subset X_2$ et un isomorphisme borélien $f : X'_1 \to X'_2$, qui envoie μ_1 sur μ_2, tel que pour tout $x, y \in X'_1$, $(x\mathcal{R}_1 y) \Leftrightarrow (f(x)\mathcal{R}_2 f(y))$.

Définition 1.6 *Lorsque des actions α_1 et α_2 de groupes Γ_1 et Γ_2 produisent des relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ isomorphes, on dit aussi que les actions sont* **orbitalement équivalentes (OE)**.

On verra des exemples avec $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$.

Un des but de mes exposés est de donner les éléments de preuve du th. les nombres de Betti ℓ^2 sont des invariants d'équivalence orbitale.

1.4 Relations finies

L'espace quotient $X/\mathcal{R}$ est joli
ssi on peut trouver un domaine fondamental borélien
ssi on peut choisir mesurablement UN point par orbite
ssi les classes d'équivalence sont finies.

Ex. Action libre α de Γ, D domaine fondamental Borélien $X = \coprod_{\gamma \in \Gamma} \gamma.D$.
α préserve la mesure $\Rightarrow$ les $\gamma.D$ ont tous même mesure.
$\mu(X) = 1 \Rightarrow \Gamma$ est fini.

Inversement. Si $\mathcal{R}$ est à orbites finies, puisque $X \simeq [0,1]$ est ordonné, $D = \{$plus petit élément de chaque classe$\}$ est un domaine fondamental borélien.

Deux actions libres de groupes finis sont OE ssi les groupes ont même cardinal.
Le th. sur les nombres de Betti ℓ^2 est vrai dans ce cas-là :$\frac{1}{|\Gamma|}, 0, 0, \cdots$

1.5 Relations hyperfinies

Les classes d'équivalence sont aussi appelées **orbites**. *Le* saturé *d'un borélien B est la réunion des orbites des points de B. On le note $\mathcal{R}.B$; c'est un borélien.*
La relation est **ergodique** *si les boréliens saturés sont de mesure ou de co-mesure nulle.*

Une relation $\mathcal{R}$ est dite **hyperfinie** si elle est réunion croissante de sous-relations dont toutes les classes sont finies.
Exemple: action libre de $\oplus_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Théorème 1.7 *Dans le cadre où la mesure finie μ sur un borélien standard est préservée, H. Dye a montré que (1–4) :*
-1- toutes les relations ergodiques hyperfinies sont isomorphes entre elles
*-2- toutes les relations hyperfinies (***même non ergodique***) sont donnée par une action de $\mathbb{Z}$,*
-3- toutes les actions de $\Gamma = \mathbb{Z}$ sont hyperfinies. [Dye59],
idée de la preuve **dans le cas ergodique** avec des isomorphismes partiels φ_n définis sur des parties X_n de X croissantes et de co-mesure non nulle tendant vers 0
-4- toutes actions des groupes Γ abéliens ou à croissance polynomiale [Dye63, th.1, p. 560] sont hyperfinies.
-5- réciproque [Zimmer]: si Γ possède une action libre α préservant μ telle que $\mathcal{R}_\alpha$ soit hyperfinie, alors Γ est moyennable.
-6-[OW80] ont étendu le résultat de Dye : les actions des groupes moyennables sont toutes hyperfinies. Cas plus général [CFW81].

Les actions ergodiques des groupes moyennables infinis définissent UNE unique relation d'équivalence, celle donnée par une action ergodique de $\mathbb{Z}$.

Corollaire 1.8 *(du point -2-) Toute action d'un produit libre de groupe moyennables infinis est OE à une action d'un groupe libre.*

(même si si les facteurs libres n'agissent pas ergodiquement, chacun est OE à une action de $\mathbb{Z}$)

1.6 Espace quotient "$X/\mathcal{R}$"- SOE

Situation naturelle où l'on a envie de dire que D$X/\mathcal{R} = Y/\mathcal{S}$:
C'est lorsque $\mathcal{S} = \mathcal{R}_Y$ où Y un borélien de X qui rencontre toutes les classes de $\mathcal{R}$.
Plus généralement SOE:

Définition 1.9 *Une relation $\mathcal{R}_1$ sur (X_1, μ_1) est stablement orbitalement équivalente (SOE) à $\mathcal{R}_2$ sur (X_2, μ_2) s'il existe des boréliens $A_1 \subset X_1$ et $A_2 \subset X_2$, qui rencontrent chaque orbite, tels que les relations induites $\mathcal{R}_{1|A_1}$ et $\mathcal{R}_{2|A_2}$ s'identifient par un isomorphisme borélien entre A_1 et A_2 qui préserve la mesure à une constante multiplicative près.*

Dans l'exemple de la lamination mesurée : changer de transversale produit des rel. SOE.

(OE)⇒(SOE)

1.7 Equivalence mesurable

Définition 1.10 *Deux groupes dénombrables Γ_1 et Γ_2 sont* **commensurables** *s'il existe un groupe Γ qui est isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de chacun d'eux.*

Caracterisation. *Deux groupes dénombrables Γ_1 et Γ_2 sont* **commensurables** *si et seulement si il existe, sur un ensemble dénombrable Ω, des actions de Γ_1 et Γ_2 qui commutent, telles que l'action de chacun des groupes est libre et a un* **domaine fondamental fini**.

$$i_\Omega(\Gamma_1, \Gamma_2) := \frac{[\Gamma_1 : \Gamma]}{[\Gamma_2 : \Gamma]} = \frac{\sharp(\Omega/\Gamma_2)}{\sharp(\Gamma_1\backslash\Omega)}$$

Exemple standard : deux sous-groupes d'indices finis dans un même groupe

Deux façons de généraliser :
– un ensemble fini est un très simple compact → (QI)
– un ensemble fini est un très simple compact ensemble de mesure finie → (ME)

Critère *[Gro93, 0.2.C_2'] Deux groupes Γ_1 et Γ_2 de type fini sont* **quasi-isométriques** *si et seulement si il existe, sur un espace localement compact, des actions de Γ_1 et Γ_2 qui commutent, et chacune des deux actions est propre et cocompacte.*

La notion d'équivalence mesurable est un analogue mesurable de la quasi-isométrie :

Définition 1.11 *Deux groupes Γ_1 et Γ_2 sont* **mesurablement équivalents** *(ME) s'il existe, sur un espace borélien standard de mesure infinie (Ω, m), des actions de Γ_1 et Γ_2 qui commutent, et chacune des deux actions est libre, préserve la mesure et admet un domaine fondamental B_1 (resp. B_2) de mesure finie.*

Le rapport $c = m(B_1) : m(B_2)$ est appelé *constante de compression* de l'équivalence mesurable.

L'équivalence mesurable est une relation d'équivalence sur l'ensemble des groupes (cf. [Fur99a, sect. 2]) et l'exemple standard de deux groupes ME est donné par deux réseaux, pas nécessairement cocompacts, d'un groupe G localement compact à base dénombrable qui agissent sur G par multiplication respectivement à gauche et à droite.

Classification des groupes modulo (ME) parallèle à celle modulo (QI).

Théorème 1.12 *Deux groupes Γ_1 et Γ_2 sont (ME) ssi ils admettent des actions libres (préservant une probabilité) qui soient (SOE).*

Preuve de (OE) ⇒ (ME).

Preuve de (ME) ⇒ (SOE).

Ou bien on croit que SOE signifie meme espace quotient. Dans ce cas, les actions de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ sur Ω, Γ_1 sur Ω/Γ_2 et Γ_2 sur $\Gamma_1\backslash\Omega$ ont les meme orbites. **Attention à libérer les actions !!**.

Ou bien preuve en numérotant les éléments de $\Gamma_1 \times \Gamma_2 = \{m_1, m_2, \cdots\}$.
D_1 et D_2 domaines fond; de Γ_1 et Γ_2.
$D_1^1 := \{x \in D_1 : m_1(x) \in D_2\}$
$\vdots$
$D_1^j = \{x \in D_1 : m_j(x) \in D_2, m_j(x) \notin \cup_{i<j} m_i(D_1^i)\}$

Quand ça s'arrête, $\overline{D_1} = \coprod_i D_1^i$, vu dans $\Gamma_1\backslash\Omega$ rencontre toutes les orbites de Γ_2, et symétriquement pour $\overline{D_2} = \coprod_i m_i D_1^i$

Les m_i se combinent pour donner un isomorphisme entre les deux $\overline{D_1}$ et $\overline{D_2}$

Question Déterminer l'ensemble des groupes dénombrables qui sont dans la classe de ME du groupe libre $\mathbf{F}_2$. Cette classe contient tous les produits libres d'un nombre fini de groupes moyennables (sauf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), et les groupes de surfaces compactes.

1.8 Zimmer-Furman-Adams

Le théorème d'Ornstein-Weiss déjà cité montre que tous les groupes moyennables infinis sont dans la même classe de ME que $\mathbb{Z}$.

La propriété (T) de Kazhdan est un invariant de ME [Fur99a, th. 8.2].

Les travaux combinés de F. Furman et R. Zimmer montrent que pour un groupe de Lie simple de rang supérieur, la collection de tous ses réseaux (modulo groupes finis) constitue une classe de ME (voir [Fur99a] pour plus de détails).

La propriété de Haagerup (a-T-menability) est un invariant de ME [Jolissaint].

Tableau : quelques propriés des groupes et leur invariance ou non par QI et par ME

	QI	ME
type de croissance	oui	non
moyennabilité	oui	oui
nombre de bouts	oui	non
propriété (T) de Kazhdan	non	oui
propriété de Haagerup	?	oui
propriété (FA) de Serre	non	non
nombres de Betti ℓ^2	$\beta_n(\Gamma) = 0$	$(\beta_n(\Gamma))_n / \mathbb{R}_+^*$
signe de la caractéristique d'Euler	non	oui
dimension ergodique	?	oui
dimension ergodique approximative	?	oui
invariants de Novikov-Shubin	?	non
$I_\Omega(\Gamma)$	?	oui

$I_\Omega(\Gamma)$ est le sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ engendré par les constantes de compressions des divers couplages (ME) entre Γ et lui-même (cf. [Gab01b, sect. 2.2]).

2 Exposé 2 et 3 : Actions simpliciales de relations d'équivalence et nombres de Betti L^2

2.1 Γ-complexes simpliciaux

Soit Γ un groupe dénombrable discret. Considérons $\ell^2(\Gamma)$, l'espace de Hilbert des fonctions sur Γ à valeurs réelles de carré sommable, $\xi = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \gamma$, et les représentations régulières gauche et droite de Γ données respectivement par $\lambda(\gamma')(\xi) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \gamma' \gamma$ et $\rho(\gamma')(\xi) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \gamma(\gamma')^{-1}$.

L'algèbre de von Neumann du groupe Γ est par définition ... [MvN43, sect. 5.3].
Sa commutante est l'algèbre ... engendrée par ...
Ces deux algèbres possèdent une trace finie fidèle normale, la trace standard $\tau(a) = (a(1), 1)$, où 1 est la fonction caractéristique de l'élément neutre du groupe.

Si Γ est fini, la $N(\Gamma)$-dimension d'un $N(\Gamma)$-module de Hilbert est sa dimension usuelle divisée par le cardinal de Γ.

Un **complexe simplicial** K est la donnée d'un ensemble $K^{(0)}$ de *sommets* et de parties $K^{(1)} \subset K^{(0)} \times K^{(0)}, \cdots, K^{(n)} \subset \underbrace{K^{(0)} \times \cdots K^{(0)}}_{n+1 \text{ fois}}, \cdots$ telle que

1. $K^{(n)}$ est invariant par le groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$ de permutations des coordonnées,
2. si $(v_0, v_1, \cdots, v_n) \in K^{(n)}$ alors $v_0 \neq v_1$
3. si $(v_0, v_1, \cdots, v_n) \in K^{(n)}$ alors $(v_1, \cdots, v_n) \in K^{(n-1)}$.

Un élément $\sigma = (v_0, v_1, \cdots, v_n)$ de $K^{(n)}$ est un $n+1$**-simplexe ordonné** et l'ensemble de ses sommets est un **simplexe non ordonné**.

Soit K un complexe simplicial dénombrable sur lequel Γ agit par automorphismes simpliciaux et librement (i.e. les simplexes non ordonnés ont des stabilisateurs triviaux).

2.2 Homologie ℓ^2 et nombres de Betti ℓ^2 de (Γ, K)

Une base hilbertienne de l'espace $C_n^{(2)}(K)$ des n-chaînes ℓ^2 ?

Choisir une famille $\{s_1, s_2, \cdots\}$ de représentants ordonnés des Γ-orbites de n-simplexes.
i.e. choisir une famille de n-simplexes ordonnés qui constitue un **domaine fondamental pour l'action du groupe** $\Gamma \times \mathfrak{S}_{n+1}$.

Une base : $(\Gamma.s_1, \Gamma.s_2, \cdots)$, où s_i est vu comme une chaîne.

Cela permet de définir une identification Γ-équivariante

$$C_n^{(2)}(K) \simeq \oplus_{i=1}^{i=\alpha_n} \ell^2(\Gamma),$$

(où α_n est égal au nombre de Γ-orbites de n-simplexes) et de munir $C_n^{(2)}(K)$ d'une structure de Γ-module de Hilbert.

La chaîne $s_i \qquad \simeq \qquad \delta_e$ dans la i-ème copie de $\ell^2(\Gamma)$.

Si F est un sous-espace fermé Γ-invariant de $C_n^{(2)}(K)$ et p le projecteur orthogonal sur F

$$\dim_\Gamma F = \sum_{i=1}^{\alpha_n} (p(s_i), s_i).$$

Si l'action est cocompacte. Les opérateurs bord sont bornés et s'étendent par continuité en des opérateurs bornés $\partial_n : C_n^{(2)}(K) \to C_{n-1}^{(2)}(K)$, qui sont $N(\Gamma)$-équivariants. Ils vérifient $\partial_n \partial_{n+1} = 0$. On appelle **homologie ℓ^2 réduite** de l'action (K,Γ) l'espace

$$\bar{H}_n^{(2)}(K,\Gamma) := \text{Ker } \partial_n / \overline{\text{Im } \partial_{n+1}}.$$

Il se plonge isométriquement dans Ker $\partial_n \subset C_n^{(2)}(K)$ comme supplémentaire orthogonal de $\overline{\text{Im } \partial_{n+1}}$ et c'est $N(\Gamma)$-module. L'image de ce plongement est par définition l'espace, noté

$$\mathcal{H}_n(K),$$

des chaînes harmoniques ℓ^2.

NOTA : $\overline{\text{Im } \partial_{n+1}}^{\perp} = \text{Ker } \partial_{n+1}^*$ (adjoint=opérateur dual)

DONC : $\mathcal{H}_n(K) = \text{Ker } \partial_n \cap \text{Ker } \partial_{n+1}^* = \text{Ker } (\partial^* n \partial_n + \partial_{n+1}\partial_{n+1}^*)$.

Les **nombres de Betti** ℓ^2 de l'action sont les dimensions

$$\beta_n(K,\Gamma) := \dim_\Gamma \bar{H}_n^{(2)}(K,\Gamma) = \dim_\Gamma \mathcal{H}_n(K).$$

2.3 Algèbre de von Neumann de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}$-dimensions

Définition 2.1 *L'ensemble de tous les isomorphismes partiels dont le graphe est contenu dans $\mathcal{R}$ sera noté $[[\mathcal{R}]]$.*
Si $(\varphi : A \to B), (\varphi' : A' \to B') \in [[\mathcal{R}]]$, l'isomorphisme partiel

$$\varphi\varphi' : \varphi'^{-1}(A \cap B') \to \varphi(A \cap B')$$

est défini par $\varphi\varphi'(z) = \varphi(\varphi'(z))$ et

$$\varphi^{-1} : B \to A$$

par $\varphi^{-1}\varphi(z) = z$, pour tout $z \in A$.

...

2.4 Représentation de $[[\mathcal{R}]]$ par isométries partielles

2.5 Définition de l'algèbre de von neumann de $\mathcal{R}$, trace $\tau(a) = (a\chi_\Delta, \chi_\Delta)$

2.6 $\mathcal{R}$-modules de Hilbert, dimensions de von Neumann

2.7 Changement de point de vue sur $L^2(\mathcal{R},\nu)$; champs d'espaces de Hilbert et champs de vecteurs mesurables

Cela permet de rappeler la notion d'intégrale hilbertiennes et introduit ce qu'on va faire ensuite avec les champs de complexes simpliciaux.

2.8 Faire agir $\mathcal{R}$

2.9 $\mathcal{R}$-complexes simpliciaux

Champs mesurables de complexes simpliciaux $x \mapsto \Sigma_x$, avec une action de $\mathcal{R}$.

Étant donné un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ, on dispose, associé au champ de complexes simpliciaux $x \mapsto \Sigma_x$ des *champs d'espaces de chaînes entières :*

$$x \mapsto C_n(\Sigma_x, \mathbb{Z})$$

et des *champs d'espaces de chaînes ℓ^2 :*

$$x \mapsto C_n^{(2)}(\Sigma_x).$$

Condition correspondant à la liberté de l'action (Γ, K) : la $\mathcal{R}$-action a un domaine fondamental. Cela permet de donner une structure de $\mathcal{R}$-module de Hilbert aux intégrales hilbertiennes

$$C_n^{(2)}(\overline{\Sigma}) = \int^{\oplus} C_n^{(2)}(\overline{\Sigma}_x) d\mu(x)$$

Les *champs d'applications bord*

$$\partial_n^x : C_n(\Sigma_x, \mathbb{Z}) \to C_{n+1}(\Sigma_x, \mathbb{Z})$$

s'étendent (sous une hypothèse de bornitude : Uniformément Localement Borné, ULB) en des champs d'opérateurs bord

$$\partial_n^x : C_n^{(2)}(\Sigma_x) \to C_{n+1}^{(2)}(\Sigma_x)$$

qui s'intègrent en des opérateurs $\mathcal{R}$-équivariants $\partial_n = \int_X^{\oplus} \partial_n^x$ pour conduire à un complexe de $\mathcal{R}$-modules de Hilbert

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0^{(2)}(\overline{\Sigma}) \xleftarrow{\partial_1} C_1^{(2)}(\overline{\Sigma}) \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} C_n^{(2)}(\overline{\Sigma}) \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1}^{(2)}(\overline{\Sigma}) \xleftarrow{\partial_{n+2}} \cdots$$

Définition 2.2 *L'homologie* L^2 réduite du $\mathcal{R}$-complexe simplicial uniformément localement borné Σ *est constituée des $\mathcal{R}$-modules de Hilbert :*

$$\bar{H}_n^{(2)}(\Sigma, \mathcal{R}, \mu) = \mathrm{Ker}\ \ \partial_n / \overline{\mathrm{Im}\ \ \partial_{n+1}},$$

où $\overline{\mathrm{Im}\ \ \partial_{n+1}}$ *est l'adhérence de* Im ∂_{n+1}. *Leurs $\mathcal{R}$-dimensions donnent les* nombres de Betti L^2 de Σ *:*

$$\beta_n(\Sigma, \mathcal{R}, \mu) := \dim_{\mathcal{R}}(\bar{H}_n^{(2)}(\Sigma, \mathcal{R}, \mu)).$$

2.10 Exemple : graphages

... Description au tableau

Question : Peut-on faire en sorte que les $\Sigma\Phi_x$ soient tous des arbres ?

Théorème 2.3 (Adams-Spatzier, 90) *Si $\mathcal{R}$ est donnée par une action libre d'un groupe ayant la propriété (T) de Kazhdan, alors $\mathcal{R}$ ne peut pas agir* librement *sur un champ d'arbres.*

Champs $x \mapsto C_0^{(2)}(\Sigma\Phi_x)$ et $x \mapsto C_1^{(2)}(\Sigma\Phi_x)$

$C_0^{(2)}(\Sigma\Phi) = \int_X^{\oplus} C_0^{(2)}(\Sigma\Phi_x) d\mu(x)$

$C_1^{(2)}(\Sigma\Phi)$? Choisir pour chaque arête une arête orientée

$$C_1^{(2)}(\Sigma\Phi) = \oplus_{i\in I} L^2(\overline{A_i}, ..) \simeq \oplus_{i\in I} L^2(\widetilde{A_i}, \nu)$$

C'est un $\mathcal{R}$-module de Hilbert.

$$\dim_{\mathcal{R}} C_1^{(2)}(\Sigma\Phi) = \sum_{i\in I} \dim_{\mathcal{R}} L^2(\widetilde{A_i}, \nu) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$$

Cette quantité, c'est le coût de Φ (introduit par G. Levitt, 95)

Théorème 2.4 (G.) *Si Φ donne à chaque orbite la structure d'un arbre, alors le coût de Φ est un invariant de $\mathcal{R}$.*

Exemple 2.5 Si $\mathcal{R}$ est donnée par une action libre α de $\mathbf{F}_p$, et $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_p$ une base de $\mathbf{F}_p$ alors avec $\Phi = (\alpha(\gamma_1), \alpha(\gamma_2), \cdots, \alpha(\gamma_p)$,
les $\Sigma\Phi_x$ sont des arbres
coût de Φ=p.

Corollaire 2.6 *Les groupes libres* $\mathbf{F}_p$ *et* $\mathbf{F}_q$ *n'ont d'actions libres OE que si* $p = q$.

Théorème 2.7 (G. Hjorth, 2001) *Si* Φ *est un arborage et coût de* Φ *est entier, alors* $\mathcal{R}_\Phi$ *est donnée par une action libre d'un groupe libre.*

Un théorème dont on verra des éléments de preuve plus tard :

Théorème 2.8 *Si que le groupe* Γ *admet une action libre* arborable, *alors* $\beta_n(\Gamma) = 0$ *pour tout* $n \geq 2$. *De plus,* Γ *est alors moyennable si et seulement si* $\beta_1(\Gamma) = 0$.

2.11 Si $\mathcal{R}$ est donnée par une action libre de Γ et si (Γ, K) est une action libre.

L'espace $\Sigma K := X \times K$ est muni de l'*action diagonale* de Γ.

Cette action s'étend en une $\mathcal{R}$-action pour faire de ΣK un $\mathcal{R}$-*complexe simplicial*.

Plus précisément, l'espace $\Sigma K^{(0)} := X \times K^{(0)}$ est un espace fibré standard : $\pi(x, s) = x$.
L'action diagonale de Γ sur $X \times K^{(0)}$ s'étend en une action disrète de $\mathcal{R}$: $(y.x).(x, s) = (\gamma.x, x).(x, s) = (\gamma.x, \gamma.s)$.
Les espaces de n-simplexes ordonnés s'obtiennent à partir de ceux de K : $\Sigma K^{(n)} = X \times K^{(n)}$.

(le n-simplexe $(s_0, s_1, \cdots, s_n)$ de K donne les simplexes $((x, s_0), (x, s_1), \cdots, (x, s_n))$, $x \in X$)

Théorème 2.9 *Si* Γ *agit librement en préservant la probabilité* μ *sur* X *et si* Γ *agit librement sur le complexe simplicial* K, *alors pour tout* $n \in I\!N$:

$$\beta_n(K, \Gamma) = \beta_n(\Sigma K, \mathcal{R}).$$

On donne des indications de preuve dans le cas ULB. Le cas général sera traité après la sous-section 2.12. De plus :

Théorème 2.10 *Soient* $K_1 \subset K_2$ *deux sous-complexes* Γ*-invariants* **cocompacts** *de* K, *soient* j *et* J *les opérateurs induits en homologie (ou sur les chaînes harmoniques) par l'inclusion. avec :* $\nabla_n(K_1, K_2) = \dim_\Gamma(\mathrm{Im}\ \bar{H}_n^{(2)}(K_1) \xrightarrow{j} \bar{H}_n^{(2)}(K_2))$
$= \nabla_n(\Sigma K_1, \Sigma K_2) = \dim_{\mathcal{M}}(\mathrm{Im}\ \bar{H}_n^{(2)}(\overline{\Sigma} K_1) \xrightarrow{J} \bar{H}_n^{(2)}(\overline{\Sigma} K_2))$,
on a

$$\nabla_n(K_1, K_2) = \nabla_n(\Sigma K_1, \Sigma K_2).$$

2.12 Si Σ n'est pas uniformément Localement Borné

Soit $\mathfrak{C}_\Sigma$ la catégorie dont les objets sont tous les sous-complexes simpliciaux $\mathcal{R}$-invariants uniformément localement bornés de Σ, et les seuls morphismes sont les inclusions. À une telle inclusion $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta$ correspond en homologie le morphisme

$$J_{\alpha,\beta} : \bar{H}_n^{(2)}(\Sigma_\alpha, \mathcal{R}, \mu) \to \bar{H}_n^{(2)}(\Sigma_\beta, \mathcal{R}, \mu).$$

Posons

$$\nabla_n(\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta) := \dim_{\mathcal{M}} \overline{\mathrm{Im}\ (J_{\alpha,\beta})}.$$

Pour les $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta$, la fonction ∇_n est décroissante en Σ_β et croissante en Σ_α (par le théorème du rang).

Définition des $\beta_n(\Sigma, \mathcal{R}, \mu)$:

Proposition 2.11 *Soit* $(\Sigma_s)_{s \in I\!N}$ *une suite croissante exhaustive de sous-complexes* $\mathcal{R}$*-invariants ULB de* Σ. *Alors*

$$\beta_n(\Sigma, \mathcal{R}, \mu) := \lim_{s\to\infty} \nearrow \lim_{t \geq s\ t\to\infty} \searrow \nabla_n(\Sigma_s, \Sigma_t)$$

ne dépend pas de la suite exhaustive choisie.

3 Exposé 3 (suite). Applications

Ce qu'on a obtenu jusqu'ici :

3.1 Invariance des nombres de Betti ℓ^2 par OE

Théorème 3.1 *Si Γ et Λ ont des actions libres orbitalement équivalentes, alors $\forall n$, $\beta_n(\Gamma) = \beta_n(\Lambda)$*

Corollaire 3.2 (Cheeger-Gromov) *Les nombres de Betti ℓ^2 des groupes moyennables infinis sont tous nuls.*

Il sont en effet égaux à ceux de $\mathbb{Z}$ (par le théorème de Ornstein-Weiss).

3.2 Nombres de betti de $\mathcal{R}$

Le théorème général est en fait le suivant :

Théorème 3.3 *Tous les $\mathcal{R}$-complexes simpliciaux qui sont p-connexes ont le même nombre de Betti β_p.*

Cela permet de définir les *nombres de Betti L^2 de la relation $\mathcal{R}$* comme cette valeur commune, qu'on note

$$\beta_p(\mathcal{R}, \mu)$$

Corollaire 3.4 *Si $\mathcal{R}$ est produite par une action libre de Γ, préservant la mesure de probabilité, alors Γ et $\mathcal{R}$ ont les mêmes nombres de Betti ℓ^2.*

3.3 Induction, SOE

Théorème 3.5 *Soit $Y \subset X$ est un borélien qui rencontre presque toutes les classes de $\mathcal{R}$ et Σ un $\mathcal{R}$-complexe simplicial. Les nombres de Betti L^2 de Σ et $\overline{\Sigma}_Y$ sont reliés par la formule :*

$$\beta_n(\Sigma, \mathcal{R}, \mu) = \mu(Y).\beta_n(\overline{\Sigma}_Y, \mathcal{R}_Y, \bar{\mu}).$$

Théorème 3.6 *Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont deux relations d'équivalence préservant une probabilité, stablement orbitalement équivalentes, avec constante de compression $c(\mathcal{R}, \mathcal{S})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\beta_n(\mathcal{R}) = c(\mathcal{R}, \mathcal{S}).\beta_n(\mathcal{S}).$$

Corollaire 3.7 *Les relations d'équivalence ergodiques $\mathcal{R}$ dont un nombre de Betti n'est pas nul sont incompressibles : on a trivialité du groupe fondamental (sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}$ engendré par les mesures des boréliens sur lesquels la relation induite est isomorphe à $\mathcal{R}$, (c'est-à-dire engendré par les constantes de compression $c(\mathcal{R}, \mathcal{R})$).*

C'est le cas des relations d'équivalence produites par les actions libres des groupes dont les β_p ne sont pas tous nuls. Les groupes moyennables infinis fournissent des exemples de groupes qui sont mesurablement équivalents à eux même avec une constante de compression c différente de 1. D'ailleurs, toutes les valeurs de $c \in]0, 1]$ sont possibles. On a aussi des exemples non moyennables, comme le produit direct $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ de deux groupes infinis, l'un moyennable, l'autre non. Une action produit d'une action (compressible) de Γ_1 et d'une action de Γ_2 est compressible.

Théorème 3.8 *Si Γ_1 est ME à Γ_2, alors ils ont des nombres de Betti ℓ^2 proportionnels : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n(\Gamma_1) = c.\beta_n(\Gamma_2)$.*

où c est la constante de compression de l'équivalence mesurable de Γ_1 à Γ_2.

Comme annoncé dans le programme...

On obtient de nouveaux résultats de *rigidité* en rang 1

Corollaire 3.9 *Si deux réseaux*
– de $Sp(n,1)$ et $Sp(p,1)$ sont ME, alors $p = n$,
– de $SU(n,1)$ et $SU(p,1)$ sont ME, alors $p = n$
– de $SO(2n,1)$ et $SO(2p,1)$ sont ME, alors $p = n$
– de $SO(2n+1,1)$ et $SO(2p+1,1)$ sont ME, avec $p \leq n$, alors $n \leq 2p$.

Soit Γ_1 un réseau de $SO(2n+1,1)$ qui contient comme sous-groupe un réseau Γ_2 de $SO(2n,1)$. Puisque $\beta_n(\Gamma_2) \neq 0$, les actions libres de Γ_2 sont de dimension $\geq n$. Celles de Γ_1 aussi par le corollaire (dimension ergodique des sous-groupes d'un groupe). Soit Λ_1 un réseau non cocompact de $SO(2p+1,1)$. Ses actions libres sont de dimension $\leq 2p$. Une ME entre Γ et Λ en donne une par transitivité entre Γ_1 et Λ_1. Les actions libres SOE associées ont même dimension $n \leq$ et $\leq 2p$.

Corollaire 3.10 *Les nombres de Betti ℓ^2 des réseaux d'un même groupe localement compact à base dénombrable sont dans le même rapport que les covolumes.*

Corollaire 3.11 *Les groupes de la forme $\mathbf{F}_{p_1} \times \mathbf{F}_{p_2} \times \cdots \times \mathbf{F}_{p_\ell}$, $p_j \geq 2$ sont ME ssi ils ont le même ℓ. Ils admettent des actions libres OE ssi ils ont de plus le même $\prod_1^\ell (p_i - 1)$.*

Si ils ont même ℓ, ils sont alors commensurables.

3.4 Nombres de Betti des feuilletages au sens de A. Connes

Considérons une variété compacte munie d'un feuilletage mesuré ergodique $\mathcal{F}$ **à feuilles contractiles**. Fixons une mesure transverse invariante et choisissons une transversale totale X de mesure 1.

Théorème 3.12 *Les nombres de Betti (au sens de A. Connes) de $\mathcal{F}$ coïncident avec ceux de la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}$ engendrée par les applications d'holonomie sur X :*

$$\beta_n(\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}) = \beta_n(\mathcal{F}).$$

En particulier, ces nombres ne dépendent que de la relation $\mathcal{R}$.

On peut illustrer cela grâce à un exemple présenté par A. Connes : Considérons un groupe fondamental Γ d'une surface compacte de genre g qui admet une représentation fidèle dans SO(3) et une action libre cocompacte de Γ sur le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Le feuilletage par plans hyperboliques de $\mathbb{H}^2 \times \mathrm{SO}(3)$ étant préservé par l'action diagonale de Γ fournit un feuilletage sur $\mathbb{H}^2 \times \mathrm{SO}(3)/\Gamma$.

Ses nombres de Betti sont les mêmes que les nombres de Betti ℓ^2 de la relation donnée par l'action de Γ sur SO(3) et que ceux du groupe Γ (cf. cor. **??** ci-dessous), à savoir $\beta_1 = 2g - 2$ et $\beta_i = 0$ pour $i \neq 1$.

3.5 Dimensions

Définition 3.13 *Une relation $\mathcal{R}$ est* **de dimension** *n si n est le minimum des dimensions $\mathcal{R}$-complexes simpliciaux contractiles.*

Les relations produites par les actions libres des groupes de la forme $\mathbf{F}_{p_1} \times \mathbf{F}_{p_2} \times \cdots \times \mathbf{F}_{p_\ell}$, $p_j \geq 2$, les groupes libres $\mathbf{F}_p$ de rang distincts et les groupes de la forme $(\mathbf{F}_m \times \mathbf{F}_n) * \mathbf{F}_k$ (pour $m, n, p, k > 1$) sont de dimensions respectives ℓ, 1 et 2.

En effet, les β_j sont tous nuls sauf $\beta_\ell = \prod_{j=1}^\ell (p_j - 1)$, resp. $\beta_1 = p-1$, resp. $\beta_1 = k, \beta_2 = (m-1)\cdot(n-1)$.

Exemple 3.14 *Si $\mathcal{R}$ est arborable alors $\beta_n(\mathcal{R}) = 0$, pour tout $n > 1$. Cela permet de trouver de nombreux groupes dont les actions libres ne sont pas arborables.*

Question : *Toutes les actions libres d'un groupe produisent-elles des relations de même dimension ?*

Définition 3.15 *La* **dimension ergodique** *erg-dim(Γ) d'un groupe Γ est le minimum des dimensions des relations d'équivalence produites par une action de Γ libre préservant la probabilité sur le borélien standard (X, μ).*

Proposition 3.16 *La dimension ergodique est un invariant d'équivalence mesurable (ME).*

Une conséquence d'un théorème de Hjorth (2001) :

Théorème 3.17 *Les groupes de dimension ergodique 1 sont tous dans la classe de ME d'un groupe libre (de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbf{F}_2$, selon qu'ils sont moyennables ou non)*

Questions : Quelle est la dimension ergodique
– des réseaux de $SO(n,1)$, $SU(n,1)$, $Sp(n,1)$,... ?
– des groupes fondamentaux des variétés compactes acycliques ?
– de $\underbrace{(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_2 \times \cdots \times \mathbf{F}_2)}_{n \text{ fois}} \times \mathbb{Z}$? C'est n ou $n+1$? (noter que $\mathbf{F}_2 \times \mathbb{Z}$ est de dimension ergodique = 2).

Définition 3.18 *Une relation $\mathcal{R}$ est* **approximativement de dimension** n *si elle est réunion croissante de relations $\mathcal{R}_i$ de dimension n.*

Proposition 3.19 *Si $\mathcal{R}$ est réunion croissante de relations $\mathcal{R}_i$ alors $\beta_n(\mathcal{R}) \leq \liminf_{i \in \mathbb{N}} \beta_n(\mathcal{R}_i)$.*
En particulier, si $\mathcal{R}$ est approximativement de dimension p, alors $\beta_n(\mathcal{R}) = 0$ pour tout $n \geq p+1$.
En particulier, si Γ est de dimension ergodique approximative p, alors $\beta_n(\Gamma) = 0$ pour tout $n \geq p+1$. Et il en est de même pour tous ses sous-groupes.

Définition 3.20 *La* **dimension ergodique approximative** *d'un groupe Γ est le minimum des dimensions approximatives des relations d'équivalence produites par une action de Γ libre préservant la probabilité sur le borélien standard (X, μ).*

Proposition 3.21 *La dimension ergodique approximative est un invariant d'équivalence mesurable (ME).*

Cela permet de distinguer des classes de ME où les nombres de Betti ℓ^2 sont tous nuls.

Exemple 3.22 – $\mathbf{F}_2 \times \mathbb{Z}$ *est de dimension ergodique = 2 et approximativement de dimension ergodique* 1
– $\underbrace{(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_2 \times \cdots \times \mathbf{F}_2)}_{n \text{ fois}} \times \mathbb{Z}$ *est de dimension ergodique approximative n*

Exemple 3.23 *Les groupes $\underbrace{(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_2 \times \cdots \times \mathbf{F}_2)}_{n \text{ fois}} \times \mathbb{Z}$ et $\underbrace{(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_2 \times \cdots \times \mathbf{F}_2)}_{p \text{ fois}} \times \mathbb{Z}$ ne sont pas ME pour $n \neq p$.*

Questions : Trouver pour chaque n des groupes qui aient tous leurs nombres de Betti ℓ^2 nuls, qui soient de même dimension ergodique n, mais de dimension ergodique approximative différentes. Pour $n = 1$, un groupe de dimension ergodique = 1 mais de dim. approx. = 0 est précisément un groupe moyennable.

3.6 En théorie des groupes

Les résultats de [CG86, th. 0.1 et th. 0.2] entraînent qu'*un groupe qui contient un sous-groupe normal infini moyennable a tous ses nombres de Betti ℓ^2 nuls.*

Les deux théorèmes suivants généralisent des résultats de W. Lück [Lüc94], [Lüc98b, quest. 3.11, th.3.3(5)] qui eux-mêmes répondent à des questions de [Gro93, 8.A_4 p.229 et p.235].

Rappelons aussi qu'une majoration du β_1 apporte des informations sur les présentations du groupe : *si Γ est de type fini, alors pour toute présentation à g générateurs et r relations, on a $g \leq 1 + \beta_1(\Gamma) + r$.*

Théorème 3.24 *Soit $1 \to N \to \Gamma \to \Lambda \to 1$ une suite exacte de groupes infinis où Λ est moyennable. Si n est un entier pour lequel $\beta_n(N)$ est fini, alors $\beta_n(\Gamma) = 0$.*

Généralisation du théorème de Schreier sur les sous-groupes normaux des groupes libres :

Théorème 3.25 Si Γ vérifie $\beta_1(\Gamma) \neq 0$ et N est un sous-groupe normal tel que $\beta_1(N) < \infty$ (par exemple N de type fini), alors N est fini ou d'indice fini.

Bibliographie

[Ada90] S. Adams. Trees and amenable equivalence relations. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 10(1):1–14, 1990.

[AS90] S. Adams and R. Spatzier. Kazhdan groups, cocycles and trees. *Amer. J. Math.*, 112(2):271–287, 1990.

[Ati76] M. Atiyah. Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras. In *Colloque "Analyse et Topologie" en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*, pages 43–72. Astérisque, No. 32–33. Soc. Math. France, Paris, 1976.

[BCH94] P. Baum, A. Connes, and N. Higson. Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras. In *C^*-algebras: 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993)*, pages 240–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Bor85] A. Borel. The L^2-cohomology of negatively curved Riemannian symmetric spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 10:95–105, 1985.

[Bro82] K. Brown. *Cohomology of groups.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[CFW81] A. Connes, J. Feldman, and B. Weiss. An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 1(4):431–450 (1982), 1981.

[CG86] J. Cheeger and M. Gromov. L_2-cohomology and group cohomology. *Topology*, 25(2):189–215, 1986.

[Co79] A. Connes. Sur la théorie non commutative de l'intégration. In *Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978)*, pages 19–143. Lect. Notes 725. Springer, Berlin, 1979.

[Co82] A. Connes. A survey of foliations and operator algebras. In *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, pages 521–628. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[CZ89] M. Cowling and R. Zimmer. Actions of lattices in $\mathrm{sp}(1,n)$. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 9(2):221–237, 1989.

[Dix69] J. Dixmier. *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann).* Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1969. Deuxième édition, revue et augmentée, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXV.

[Dye59] H. Dye. On groups of measure preserving transformation. I. *Amer. J. Math.*, 81:119–159, 1959.

[Dye63] H. Dye. On groups of measure preserving transformations. II. *Amer. J. Math.*, 85:551–576, 1963.

[Eck00] B. Eckmann. Introduction to l_2-methods in topology: reduced l_2-homology, harmonic chains, l_2-Betti numbers. *Israel J. Math.*, 117:183–219, 2000. Notes prepared by Guido Mislin.

[Ele97] G. Elek. Betti numbers and Euler's formula for combinatorial foliations. *Manuscripta Math.*, 92(2):239–247, 1997.

[FM77a] J. Feldman and C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 234(2):289–324, 1977.

[FM77b] J. Feldman and C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 234(2):325–359, 1977.

[FSZ89] J. Feldman, C. Sutherland, and R. Zimmer. Subrelations of ergodic equivalence relations. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 9(2):239–269, 1989.

[Fur99a] A. Furman. Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices. *Ann. of Math. (2)*, 150(3):1059–1081, 1999.

[Fur99b] A. Furman. Orbit equivalence rigidity. *Ann. of Math. (2)*, 150(3):1083–1108, 1999.

[Gab00a] D. Gaboriau. Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Invent. Math.*, 139(1):41–98, 2000.

[Gab00b] D. Gaboriau. Sur la (co-)homologie L^2 des actions préservant une mesure. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(5):365–370, 2000.

[Gab01] D. Gaboriau. Invariants ℓ^2 de relations d'équivalence et de groupes. preprint.

[Gab01b] D. Gaboriau. On Orbit Equivalence of Measure Preserving Actions. Preprint. preprint.

[Gro93] M. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[Har00] P. de la Harpe. *Topics in geometric group theory.* University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.

[Hae71] A. Haefliger. Homotopy and integrability. In *Manifolds–Amsterdam 1970 (Proc. Nuffic Summer School)*, pages 133–163. Springer, Berlin, 1971.

[HL91] J. Heitsch, C. Lazarov. Homotopy invariance of foliation Betti numbers. *Invent. Math.*, 104(2):321–347, 1991.

[Kri70] W. Krieger. On constructing non-*isomorphic hyperfinite factors of type III. *J. Functional Analysis*, 6:97–109, 1970.

[Lev95] G. Levitt. On the cost of generating an equivalence relation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15(6):1173–1181, 1995.

[Lüc94] W. Lück. L^2-torsion and 3-manifolds. In *Low-dimensional topology (Knoxville, TN, 1992)*, pages 75–107. Internat. Press, Cambridge, MA, 1994.

[Lüc98] Wolfgang Lück. L^2-invariants of regular coverings of compact manifolds and CW-complexes à paraître in "Handbook of Geometry", Elsevier (1998).

[Lüc98a] W. Lück. Dimension theory of arbitrary modules over finite von Neumann algebras and L^2-Betti numbers. I. Foundations. *J. Reine Angew. Math.*, 495:135–162, 1998.

[Lüc98b] W. Lück. Dimension theory of arbitrary modules over finite von Neumann algebras and L^2-Betti numbers. II. Applications to Grothendieck groups, L^2-Euler characteristics and Burnside groups. *J. Reine Angew. Math.*, 496:213–236, 1998.

[Moo82] Calvin C. Moore. Ergodic theory and von Neumann algebras. In *Operator algebras and applications, Part 2 (Kingston, Ont., 1980)*, pages 179–226. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[MvN36] F. Murray and J. von Neumann. On rings of operators. *Ann. of Math., II. Ser.*, 37:116–229, 1936.

[MvN43] F. Murray and J. von Neumann. On rings of operators. IV. *Ann. of Math. (2)*, 44:716–808, 1943.

[OW80] D. Ornstein and B. Weiss. Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 2(1):161–164, 1980.

[Pau99] F. Paulin. Propriétés asymptotiques des relations d'équivalences mesurées discrètes. *Markov Process. Related Fields*, 5(2):163–200, 1999.

[Sch87] K. Schmidt. Some solved and unsolved problems concerning orbit equivalence of countable group actions. In *Proceedings of the conference on ergodic theory and related topics, II (Georgenthal, 1986)*, pages 171–184, Leipzig, 1987. Teubner.

[Shl99a] D. Shlyakhtenko Free Fisher information with respect to a completely positive map and cost of equivalence relations. *MSRI preprint 1999-030*, 1999.

[Shl99b] D. Shlyakhtenko Microstates free entropy and cost of equivalence relations. *preprint* http://xxx.lanl.gov/abs/math.OA/9912224.

[Sun87] V. Sunder. *An invitation to von Neumann algebras*. Springer-Verlag, New York, 1987.

[Zim78] R. Zimmer. Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks. *J. Functional Analysis*, 27(3):350–372, 1978.

[Zim84] R. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.